# Bonus d'électromagnétisme

PHYS 301 – TD 0

Un exo par jour

## 1 - Divergence d'un champ vectoriel

*La divergence est un opérateur différentiel, introduit en 1885 par Oliver Heaviside (1850–1925), associant à un champ de vecteur $\vec{v}$ une fonction scalaire, notée $div\,\vec{v}$ ou $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$, et définie en coordonnées cartésiennes (en écrivant $\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$)par*

$$div\,\vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,.$$

*Attention, cet opérateur prend des formes différentes dans d'autres systèmes de coordonnées. Il s'écrit ainsi en coordonnées cylindriques (si $\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\phi\vec{u}_\phi + v_z\vec{u}_z$)*

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

*et en coordonnées sphériques (si $\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_\phi\vec{u}_\phi$)*

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\,,$$

*La divergence intervient notamment dans l'équation de continuité et dans les équations de Maxwell.*

**1.** On définit le champ de vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yx + yz \\ zx \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 2 + z$$

**2.** On définit le champ de vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 7y^4 + z \\ y + z^3 + 3\sqrt{x} \\ \exp\left(\sqrt{\sin(\ln(x^3+y^4))}\right) \end{pmatrix}$$

Sans vous laisser impressionner, montrer que

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 6x + 1$$

**3.** Montrer que $\mathrm{div}\,\vec{r} = 3$ où $\vec{r} = r\vec{u}_r$, en utilisant les coordonnées cartésiennes (on rappelle que $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). Même question en utilisant les coordonnées sphériques (c'est plus rapide).

**4.** On définit le champ de vecteurs unitaires $\vec{u}_r = \vec{r}/r$. Montrer que les coordonnées de $\vec{u}_r$ s'écrivent $(x/r, y/r, z/r)$. Montrer que $\mathrm{div}\,\vec{u}_r = 2/r$, en utilisant les coordonnées sphériques. Même question en passant par les coordonnées cartésiennes.

**5.** Le champ électrique engendré par une charge ponctuelle $q$ située à l'origine s'écrit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

Montrer que $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ quand $r \neq 0$.

**6.** Le champ magnétique créé par un fil infini situé selon $Oz$ s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$$

Montrer que $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

## 2 - Gradient d'un champ scalaire

*Le gradient est un opérateur vectoriel, noté $\overrightarrow{grad}$ ou $\vec{\nabla}$, qui généralise la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables et associe une grandeur vectorielle à une fonction scalaire. En coordonnées cartésiennes, son action est définie par*

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) .$$

*Attention, cet opérateur prend des formes différentes dans d'autres systèmes de coordonnées. Il s'écrit par exemple en coordonnées cylindriques*

$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

*et en coordonnées sphériques*

$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) .$$

*Le gradient de $f$ décrit les variations spatiales de cette fonction, le vecteur $\vec{\nabla}f$ étant perpendiculaire aux surfaces iso-$f$ et dirigé dans le sens des valeurs croissantes de $f$. Cet opérateur fut introduit en 1885 par nom(Heaviside). Il s'agit d'un cas particulier de différentielle et il est parfois avantageux de le considérer comme une forme (ou covecteur) plutôt que comme un vecteur.*

**1.** Soit la fonction $f(x,y,z) = xyz + x^2 + z^2$. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \begin{pmatrix} yz + 2x \\ xz \\ xy + 2z \end{pmatrix}$$

**2.** Soit la fonction $f(r) = r^2$. En se plaçant en coordonnées sphériques, montrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = 2\vec{r}$$

Remontrer ce résultat en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire montrer que le gradient de cette même fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

## 3 - Rotationnel d'un champ vectoriel

*Le rotationnel est un opérateur vectoriel noté $\overrightarrow{rot}$ (ou $\overrightarrow{curl}$ pour les anglosaxons), agissant sur un vecteur et dont le résultat est aussi un vecteur. En coordonnées cartésiennes, son action est définie par*

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_y V_z - \partial_z V_y \\ \partial_z V_x - \partial_x V_z \\ \partial_x V_y - \partial_y V_x \end{pmatrix} ,$$

*où la notation $\partial_x V_y$ désigne la dérivée $\partial V_y/\partial x$. Cette expression peut être notée sous une forme plus simple à retenir en utilisant l'opérateur nabla, sous la forme*

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \, ,$$

*L'opérateur rotationnel intervient dans de nombreux domaines de la physique, en particulier dans les équations de Maxwell en électromagnétisme et en hydrodynamique. Il fut introduit en 1885 par Heaviside.*

**1.** Représenter sur un schéma le champ vectoriel $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{A} \wedge \vec{r}$ où $\vec{A}$ désigne un vecteur constant. Montrer que le rotationnel de $\vec{v}$ est un vecteur constant.

## 4 - Gymnastique vectorielle

*En se plaçant en coordonnées cartésiennes, montrer les relations suivantes ($\vec{v}$ désigne un champ vectoriel et $f$ un champ scalaire)*

**1.** $\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = 0$

**2.** $\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \triangle f$ où $\triangle$ désigne l'opérateur laplacien défini en coordonnées cartésiennes par

$$\triangle f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**3.** $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \left( \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \right) = \vec{0}$

**4.** $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \left( \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, (\mathrm{div}\, \vec{v}) - \triangle \vec{v}$