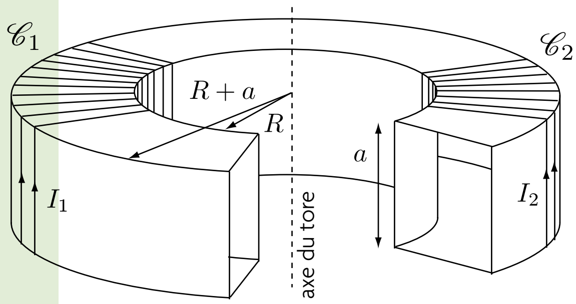
PHYS 301 – Électromagnétisme
Exercice 6-2 : Transformateur torique
Difficulté : ★★☆☆

Énoncé

On considère un milieu magnétique torique à section carrée, de rayon intérieur R et de rayon extérieur $R+a$ et de hauteur a. Deux circuits $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, parcourus par des courants d'intensité I_1 et I_2, sont enroulés sur ce tore, l'un fait N_1 tours et l'autre N_2 tours autour de la section du tore. On admet que le matériau magnétique dont est constituée la bobine canalise les lignes de champ magnétique le long de cercles centrés sur l'axe du tore et que l'intensité du champ magnétique en un point P intérieur à la bobine ne dépend que de la distance r qui sépare le point P de l'axe du tore.



1. À l'aide du théorème d'Ampère, calculer le champ $\vec{B}$ créé par le circuit $\mathscr{C}_1$ en tout point de l'intérieur de la bobine.

2. Calculer le flux du champ magnétique à travers une seule spire.

3. En déduire l'expression des coefficients d'auto-inductance L_1 et L_2, ainsi que du coefficient d'inductance mutuelle M.

4. Montrer que si les circuits ont une résistance nulle, on a

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}$$

5. En déduire que

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Résolution

1. D'après l'énoncé, le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé à l'intérieur de la bobine par le courant circulant dans $\mathscr{C}_1$ est orienté selon un cercle centré sur l'axe du tore (le champ est **orthoradial**),

$$\vec{B}_1 = B_1(r)\,\vec{u}_\theta$$

Appliquons le théorème d'Ampère

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

à un contour $\mathscr{C}$ suivant la ligne de champ qui passe par le point P. Le long de ce contour, $d\vec{\ell} = d\ell\,\vec{u}_\theta$ et donc $\vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = B_1\,d\ell$ où B_1 désigne la **norme** de $\vec{B}_1$,

$$B_1 \equiv \|\vec{B}_1\|$$

Attention ici à la nuance entre les deux quantités $\vec{B}_1$ et B_1, la première est un vecteur qui pointe dans une direction donnée, alors que la seconde est un nombre (on dit un **scalaire**, par opposition à vecteur)

Dans l'expression précédente du théorème d'ampère, I désigne le courant qui passe à travers toute surface délimitée par $\mathscr{C}$, c'est-à-dire ici $I = I_1$. On a donc

$$\oint_{\mathscr{C}} B_1\,d\ell = \mu_0 I_1$$

Or B_1 ne dépend que de r, qui ne varie pas le long du contour choisi, si bien qu'on peut le sortir de l'intégrale (c'est une constante vis-à-vis de la variable d'intégration ℓ),

$$B_1 \oint_{\mathscr{C}} d\ell = \mu_0 I_1$$

Et l'intégrale des éléments de longueur $d\ell$ sur le contour $\mathscr{C}$ donne la longueur du contour, soit $2\pi r$, si bien que

$$2\pi r B_1 = \mu_0 I_1$$

et donc finalement la norme du champ magnétique à la distance r de l'axe du tore s'écrit

$$\boxed{B_1(r) = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}}$$

2. Le flux magnétique à travers une spire de $\mathscr{C}_1$ créé par le courant I_1 est alors donné par

$$\phi_{1\to1} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$\phi_{1\to1} = \int_R^{R+a} dr \int_0^a dz\, N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\phi_{1\to1} = N_1 \frac{a\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Comme le circuit $\mathscr{C}_1$ possède N_1 spires, le flux $\phi_{1\to1}$ est en fait donné par

$$\phi_{1\to 1} = N_1^2 \frac{a\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

3. Le coefficient d'auto-induction du circuit $\mathscr{C}_1$, aussi appelée **inductance propre** du circuit $\mathscr{C}_1$, est défini par

$$\phi_{1\to 1} = L_1 I_1$$

il vaut donc ici

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

On montre de même que l'inductance propre du circuit $\mathscr{C}_2$ est donnée par

$$L_2 = N_2^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Pour calculer l'inductance mutuelle, il faut calculer le flux à travers une surface s'appuyant sur $\mathscr{C}_2$ du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le courant circulant dans $\mathscr{C}_1$. Le flux traversant une spire s'écrit

$$\phi_{1\to 2} = \iint_{\mathscr{C}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$\phi_{1\to 2} = \int_R^{R+a} dr \int_0^a dz\, N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\phi_{1\to 2} = N_1 \frac{a\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Comme le circuit $\mathscr{C}_2$ comporte N_2 spires, on a finalement

$$\phi_{1\to 2} = N_1 N_2 \frac{a\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

L'inductance mutuelle est définie par

$$\phi_{1\to 2} = M I_1$$

et on a donc

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

On remarque que l'on est dans la situation où

$$M^2 = L_1 L_2$$

4. Ce dispositif (deux enroulements électriques autour d'un même tore) peut être utilisé pour élever ou abaisser la valeur d'une tension alternative, c'est le principe du **transformateur**.

En supposant que les résistances des fils peuvent être négligés, les tensions aux bornes des deux circuits s'écrivent

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \text{ et } u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

soit, en combinant ces deux équations pour éliminer di_1/dt,

$$\frac{u_1}{L_1} = \frac{u_2}{M} - \frac{L_2}{M}\frac{di_2}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt}$$

ou encore

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}$$

5. Lorsque la condition $M^2 = L_1 L_2$ est remplie, ceci se simplifie en

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2$$

soit, avec les expressions obtenues pour L_1 et M,

$$\boxed{u_1 = \frac{N_1}{N_2} u_2}$$

La tension aux bornes de chaque circuit est proportionnelle au nombre de spires de ce circuit. On peut ainsi élever une tension (passer d'une tension u_2 à une tension u_1 plus élevée) en choisissant $N_1 > N_2$ ou au contraire abaisser une tension en choisissant $N_1 < N_2$.

Il existe aussi des transformateurs dans lesquels $N_1 = N_2$, qui « recopient » simplement la tension u_2 en u_1. On les appelle des **transformateurs d'isolement**, leur but est d'utiliser la tension u_2 dans un circuit qui est complètement déconnecté électriquement du premier, par exemple pour des raisons de sécurité électrique.

Attention, tout ceci n'est valable que pour des tensions alternatives. Si les tensions sont continues, le phénomène d'induction, à la base du fonctionnement des transformateurs, n'a pas lieu.