PHYS 111 – Mécanique
Exercice 5-2 : Jouet sautillant de Gaston
Difficulté : ★★★☆

Énoncé

Pour décrire le sautillement d'un jouet tel que celui du dessin ci-dessous (tiré de Gaston Lagaffe), on représente ce dernier par un ressort vertical au sommet duquel est fixé un objet de masse m. La base du ressort est fixée à un socle de masse M qui est posé, sans être attaché, sur un support horizontal. La longueur du ressort non comprimé est ℓ_0, sa constante de raideur est k.

1. En prenant l'origine au niveau du support horizontal, faire un schéma et déterminer l'altitude z_e de la masse m à l'équilibre.

2. On appuie sur la masse avec une force $\vec{F}$ dirigée vers le bas. Déterminer la nouvelle position d'équilibre z_0 en fonction de z_e, F et k.

3. En établissant le bilan des forces agissant sur un système à définir, déterminer la réaction R du support en fonction de F.

4. À l'instant $t = 0$, on arrête d'appliquer la force $\vec{F}$. Écrire l'équation de la dynamique de la masse m en supposant que la masse M reste immobile. Calculer la position $z(t)$ de la masse m en fonction de z_e et de F. Décrire le mouvement.

5. En déduire l'expression de la réaction R du support. Quelle est la condition sur R pour que la masse M ne décolle pas du support? En déduire la valeur minimale de F qu'il faut appliquer pour faire sauter le bonhomme.

Résolution

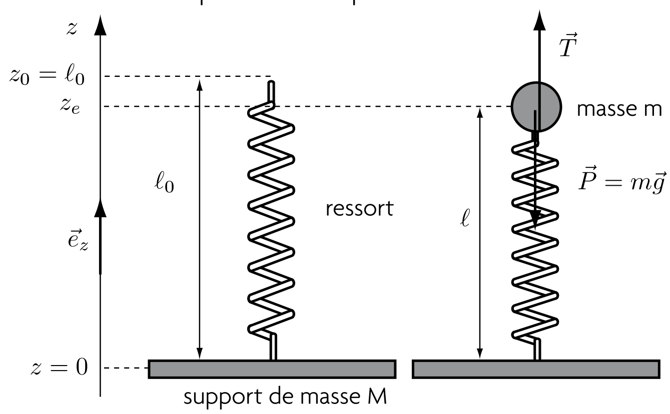
Choix du système étudié : la masse m.

Repère : On se place dans un référentiel galiléen, lié au sol. On le munit d'un axe z dirigé vers le haut, avec un vecteur unitaire $\vec{e}_z$ dirigé vers le haut (on pourrait faire le choix inverse, certains signes changeraient dans la suite).

Bilan des forces exercées sur le système :

- force $\vec{T}$ exercée par le ressort sur la masse, elle est proportionnelle à l'allongement du ressort, $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$. Cette force est bien dirigée vers le haut lorsque le ressort est comprimé ($\ell < \ell_0$) et et vers le bas lorsqu'il est allongé ($\ell > \ell_0$) ;
- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$.

1. On commence par faire un schéma, ceci nous permet de réfléchir au problème, de se poser la question des forces en jeu et de leur direction, par exemple. Plus ce schéma est précis et moins on risque de se tromper.



Le ressort vertical sans masse posée sur lui a une longueur ℓ_0. Lorsqu'on pose la masse m, celle-ci comprime le ressort à cause de son poids, dirigé vers le bas. On parlera tout de même d'**allongement**, celui-ci sera simplement négatif. Il peut s'exprimer par :

$$\Delta\ell = \ell_{\text{force appliquée}} - \ell_{\text{pas de force}} = \ell - \ell_0 = z - z_0$$

avec les conventions de notre schéma. Le système est au repos, la somme des forces qui s'applique sur lui est donc nulle,

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

soit

$$-mg - k\Delta\ell = 0$$

ou encore

$$-mg - k\Delta\ell = 0$$

ce qui donne

$$-mg - k(z_e - z_0) = 0$$

où l'on a noté z_e la valeur de z à l'équilibre. Elle vaut

$$\boxed{z_e = z_0 - \frac{mg}{k}}$$

2. Il y a maintenant une force de plus, dirigée vers le bas, on peut l'écrire $\vec{F} = -F\,\vec{e}_z$ où $F > 0$. La relation fondamentale de la dynamique (ici de la statique)

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$$

soit

$$-mg\,\vec{e}_z - k(z'_e - z_0)\,\vec{e}_z - F\,\vec{e}_z = \vec{0}$$

où l'on a noté z'_e la nouvelle position d'équilibre. On a donc

$$-mg - k(z'_e - z_0) - F = 0$$

ce qui conduit à

$$\boxed{z'_e = z_0 - \frac{mg + F}{k}}$$

C'est la même expression que précédemment, où mg a été remplacé par $mg + F$, ceci ne devrait pas vous étonner puisque la force $\vec{F}$ s'ajoute simplement au poids. la position d'équilibre est située plus bas qu'en l'absence de force supplémentaire, sans surprise.

3. Le système sur lequel agit la réaction R peut être pris égal à l'ensemble masse m + ressort + masse M. Au repos, les forces extérieures agissant sur lui sont les poids des masses m et M, la force appliquée $\vec{F}$ et la réaction $\vec{R}$. Les forces exercées par la masse m sur le ressort et par le ressort sur la masse M sont des forces intérieures au système puisque le ressort et les deux masses en font partie. Elles n'ont pas à être prises en compte dans la relation fondamentale de la dynamique, car elles se compensent nécessairement d'après la troisième loi de Newton (loi de l'action-réaction). On peut donc écrire :

$$\vec{R} + \vec{F} + m\vec{g} + M\vec{g} = \vec{0}$$

soit, en projetant cette relation sur l'axe z,

$$R_z - F - (m + M)g$$

ici, R_z est la composante suivant z de $\vec{R}$, c'est une grandeur **algébrique** (elle peut être négative ou positive) et F est la norme de $\vec{F}$. On a donc

$$R_z = (M + m)g + F$$

4. À l'instant initial, on supprime brutalement $\vec{F}$. Le système n'est donc plus à l'équilibre. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m s'écrit donc

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

où $\vec{T}$ désigne encore la force exercée par le ressort sur m et $\vec{a}$ l'accélération de m. La force $\vec{T}$ est initialement dirigée vers le haut puisque, au moment où l'on arrête d'exercer $\vec{F}$, le ressort est comprimé et se détend. Ensuite, l'intensité et la direction de cette force $\vec{T}$ varie selon l'allongement du ressort et pourra pointer vers le bas ou vers le haut. Lorsqu'on écrit

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$$

ces deux possibilités sont automatiquement prises en compte, il n'y a pas à se poser la question du sens de $\vec{T}$ et il ne faut surtout pas essayer de rajouter de signe moins ! La notation algébrique prend tout ça en charge. De même, on peut écrire pour le poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg_z\,\vec{e}_z = -mg\,\vec{e}_z$$

Méditez longuement sur les signes présents dans cette expression ! Enfin, l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}\,\vec{e}_z = \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc

$$-k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_z - mg\,\vec{e}_z = m\ddot{z}\,\vec{e}_z$$

soit

$$-k(\ell - \ell_0) - mg = m\ddot{z}$$

Cette équation fait intervenir les quantités ℓ et z qui ne sont pas indépendantes ; avec notre choix de l'origine sur l'axe vertical on a $\ell = z$ et l'équation se réécrit

$$m\ddot{z} + kz = k\ell_0 - mg$$

On peut remarquer que le deuxième membre de cette équation est égal à kz_e calculé à la première question, si bien que

$$m\ddot{z} + kz = kz_e$$

On obtient une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. En la résolvant, on trouvera $z(t)$ la position de la masse m en fonction du temps. Revenons sur la méthode systématique pour résoudre ce type d'équation. Elle comporte trois étapes :

- trouver la solution générale de l'équation sans second membre, aussi appelée équation homogène ;
- trouver une solution de l'équation totale (avec second membre), on l'appelle solution particulière ;
- déterminer les constantes d'intégration à partir des conditions initiales du problème.

La dernière étape doit absolument être effectuée en dernier !

C'est parti, cherchons la solution de l'équation sans second membre

$$m\ddot{z} + kz = 0 \text{ ou } \ddot{z} + \frac{k}{m}\,z = 0$$

qu'on écrit souvent sous la forme

$$\ddot{z} + \omega_0^2\,z = 0$$

en définissant la pulsation propre

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La solution de cette équation sera notée $z_{\text{hom}}(t)$ pour ne pas la confondre avec $z(t)$, la solution complète recherchée. Vous avez vu en maths que cette solution est de la forme

$$z_{\text{hom}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

maths

où A et B sont des constantes d'intégration, c'est-à-dire des grandeurs qui peuvent a priori prendre n'importe quelles valeurs : quelles que soient ces valeurs, la fonction $z_{\rm hom}(t)$ vérifie l'équation sans second membre. Pour un problème physique donné, comme celui qui nous intéresse ici, elles ont des valeurs bien déterminées qui seront fixées par les conditions initiales, mais seulement une fois que la deuxième étape du calcul aura été faite.

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre. Il n'y a pas de méthode systématique ou générale, mais dans beaucoup de cas simples, on peut essayer une solution qui a la même forme que le second membre. Ici, c'est une constante et on peut chercher

$$z_{\rm part}(t) = C$$

où C est une constante. Les dérivées de cette fonction par rapport au temps sont nulles si bien qu'en reportant cette fonction dans l'équation complète

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$$

on trouve simplement

$$0 + \omega_0^2 k = \omega_0^2 z_e \text{ soit } C = z_e$$

L'équation peut donc être vérifiée si on choisit pour valeur de la constante $C = z_e$. La solution particulière s'écrit donc

$$z_{\rm part}(t) = z_e$$

La solution la plus générale est obtenue en faisant la somme des deux fonctions que nous venons de déterminer, la solution homogène et la solution particulière,

$$z(t) = z_{\rm hom}(t) + z_{\rm part}(t)$$

soit

$$z(t) = z_e + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Maintenant nous pouvons déterminer les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. D'une part, à $t = 0$ le système se trouve à la position $z(t = 0) = z'_e$ calculée à la question **2**. On a donc

$$z(t = 0) = z_e + A\cos(0) + B\sin(0) = z'_e$$

soit

$$A = z'_e - z_e$$

D'autre part, à $t = 0$ le système est lâché avec une vitesse nulle. La vitesse vaut

$$v(t) = \dot{z} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

et donc la condition sur la vitesse s'écrit

$$v(t = 0) = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = 0$$

soit

$$B = 0$$

La solution s'écrit donc finalement

$$\boxed{z(t) = z_e + (z'_e - z_e)\cos(\omega_0 t)}$$

La masse oscille autour de sa position d'équilibre z_e, avec des oscillations dont l'amplitude est égale à la distance sur laquelle on a enfoncé le ressort avec la force $\vec{F}$.

5. Pour étudier la réaction $\vec{R}$, il faut faire le bilan des forces sur un système qui est effectivement soumis à cette force, ce qui n'est pas le cas de la masse m. On peut étudier le système total masse m + ressort + masse M, ou encore le système constitué par la masse M. Nous allons traiter le problème des deux manières, pour montrer qu'elles mènent au même résultat.

Méthode 1 : système total

Le système total est soumise à deux forces extérieures : son poids $(m + M)\vec{g}$ et la réaction du support $\vec{R}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$(m + M)\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OP}_1 + M\overrightarrow{OP}_2$$

Attention, il y a une subtilité, comme le système est constitué de plusieurs parties dont tous les points n'ont pas nécessairement la même accélération et il faut préciser de l'accélération de quel point il s'agit. C'est celle du centre de masse. Or, par définition, pour un système composé de deux masses, on a

$$(m + M)\overrightarrow{OG} = m\,\overrightarrow{OM}_1 + M\,\overrightarrow{OM}_2$$

où P_1 et P_2 désignent les positions respectives des masses m et M. On a donc pour les accélérations

$$(m + M)\vec{a}_G = m\,\vec{a}_1 + M\,\vec{a}_2$$

Or la masse M est immobile, donc $\vec{a}_2 = \vec{0}$, soit

$$(m + M)\vec{a}_G = m\,\vec{a}_1$$

Cette accélération $\vec{a}_1$ est celle de la masse m, que nous avons notée $\vec{a}$ jusqu'à maintenant et qui vaut

$$\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

Finalement, la relation fondamentale de la dynamique devient

$$(m + M)\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$$

soit en projetant sur l'axe z,

$$-(m + M)g + R = m\ddot{z}$$

et donc

$$R = m\ddot{z} + (m + M)g$$

Or

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 (z'_e - z_e)\cos(\omega_0 t)$$

et donc

$$R = m\omega_0^2 (z'_e - z_e)\cos(\omega_0 t) + (m + M)g$$

Or, $z'_e - z_e = -F/k$ et $\omega_0^2 = k/m$, ce qui donne

$$R = (m + M)g + F\cos(\omega_0 t)$$

Cette quantité doit être positive quand le socle est en contact avec le sol (le sol ne colle pas le socle, il peut seulement le repousser vers le haut), et il faut donc que

$$F < (m+M)g$$

Si la force est supérieure à cette valeur, il vient un moment où le calcul indique une réaction dirigée vers le sol, ce qui est absurde et indique que les hypothèses de départ ne sont pas valables : le mobile a décollé. On a donc $F_{\min} = (m+M)g$.

Méthode 2 : étude du socle seul

Le socle est soumis à trois force, son poids $M\vec{g}$, la réaction du sol $\vec{R}$ et la force $\vec{T}'$ exercée par le ressort. Cette dernière s'exprime comme

$$\vec{T}' = k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_z = k(z - z_0)\,\vec{e}_z$$

Lorsque $\ell > \ell_0$; le ressort est en extension et la force exercée sur le support est bien dirigée vers le haut. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit, pour le socle lorsqu'il n'a pas décollé (il est alors immobile)

$$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{T}' = \vec{0}$$

En projetant sur l'axe vertical, on obtient

$$-Mg + R + k(z - z_0) = 0$$

soit

$$R = Mg - k(z - z_0)$$

et donc

$$R = Mg - kz_e - k(z_e' - z_e)\cos(\omega_0 t) + kz_0$$

Or, comme $z_e = z_0 - mg/k$ et $z_e' - z_e = -F/k$,

$$R = Mg + mg + F\cos(\omega_0 t)$$

On retrouve l'expression obtenue par la méthode précédente et on peut reprendre le raisonnement à partir de là.

