

Table des matières

1	Introduction	1
1	La gravitation newtonienne	1
2	Bref historique de la RG	1
3	Vue d'ensemble du cours	2
4	Bibliographie	2
2	Principe d'équivalence	3
1	Le principe d'équivalence	3
1.1	En physique newtonienne : égalité de la masse grave et de la masse inerte	3
1.2	Tests expérimentaux	4
1.3	Version forte du principe d'équivalence	4
1.4	Référentiel en chute libre – référentiel fixe	5
1.5	La physique dans des référentiels accélérés	5
2	Tenseur métrique $g_{\mu\nu}$	6
2.1	Définition	6
2.2	Inverse $g^{\mu\nu}$	7
2.3	Relation entre $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ et $g_{\mu\nu}$	7
2.4	Exemples des coordonnées polaires et de la sphère	8
2.5	Remarques	8
3	Limite newtonienne	8
4	Déviation des rayons lumineux dans un champ homogène	9
5	L'effet Einstein – décalage gravitationnel des fréquences	10
6	L'expérience de Pound et Rebka	11
6.1	Résultat de l'expérience historique	11

6.2	Versions modernes	11
7	Les difficultés	11
7.1	Tous les systèmes de coordonnées se valent	11
7.2	Le système à deux corps	11
7.3	Comment déterminer la courbure ?	11
7.4	La topologie	11
3	Variétés riemanniennes et calcul tensoriel	13
1	Espaces courbes	13
1.1	Courbure extrinsèque et courbure intrinsèque	13
1.2	Géodésiques	14
1.3	La géométrie dans des espaces courbes	15
1.4	Courbure gaussienne	15
1.5	Variété (pseudo-)riemannienne	15
1.6	Le référentiel local de Lorentz	16
2	Tenseurs	17
2.1	Introduction	17
2.2	Scalars	17
2.3	Vecteurs	17
2.4	Interprétation géométrique des composantes covariantes et contravariantes	18
2.5	Tenseurs de rang quelconque	18
2.6	Le tenseur métrique	19
2.7	Monter et descendre les indices	19
2.8	Intérêt des tenseurs	19
3	Abrégé de calcul tensoriel	20
3.1	Combinaison linéaire de tenseurs	20
3.2	Produit de tenseurs	20
3.3	Contraction	20
3.4	Théorème du quotient	20
4	La connexion affine n'est pas un tenseur	21
5	Dérivée covariante	22
5.1	Gradient d'un scalaire	22
5.2	Dérivée d'un vecteur	22
5.3	Dérivée covariante	22
5.4	Divergence covariante	23
5.5	Généralisation aux tenseurs de rang plus élevé	23
5.6	Transport parallèle	23
6	Tenseur de courbure	23
6.1	Construire un tenseur à partir des dérivées de $g_{\mu\nu}$	23
6.2	Tenseur de courbure et commutation des dérivées covariantes	23

6.3	Tenseur de courbure et transport parallèle	23
6.4	Expression de R en fonction des dérivées secondes de g	24
6.5	Symétries de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$	24
6.6	Identité de Bianchi	25
6.7	Tenseur de Ricci, courbure scalaire et tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$	25
6.8	Exemples	26
7	La déviation des géodésiques	27
8	Le principe de covariance	27
9	Exemples	27
9.1	Référentiel en rotation	27
9.2	Référentiel uniformément accéléré	27
4	Équations d'Einstein	29
1	Introduction	29
2	Le tenseur énergie-impulsion	29
2.1	Une particule	29
2.2	Fluide parfait	30
2.3	Électromagnétisme	30
3	Les équations d'Einstein	30
3.1	Énoncé	30
3.2	Équations dans le vide	31
3.3	Constante cosmologique	31
4	Solution cosmologique	32
5	La solution de Schwarzschild	32
5.1	Métrie d'un espace statique invariant par rotation	32
5.2	Détermination des fonctions $A(r)$ et $B(r)$	33
5.3	Autres formes de la métrie	34
5.4	Théorème de Birkhoff	34
5.5	Géométrie de l'espace	34
6	Le principe de Mach	35
6.1	Le seau de Newton et le principe de Mach	35
6.2	L'origine de l'inertie en RG	35
6.3	Retour sur le seau de Newton	35
7	Le principe de moindre action	35
8	D'autres équations du champ gravitationnel	36

8.1	Des alternatives à la RG	36
8.2	Théorie scalaire de la gravité	36
8.3	La gravitation selon Brans-Dicke (1961)	36
8.4	TeVes	36
8.5	Termes plus élevés en puissances du tenseur de courbure R	36
8.6	Torsion	36
8.7	Les paramètres post-newtoniens	36
9	Autres métriques	36
5	Mouvements relativistes et tests expérimentaux	37
1	Des équations des géodésiques aux équations du mouvement	37
1.1	Paramètre affine	37
1.2	Intégrales premières du mouvement	37
1.3	Interprétation des constantes k et h	39
1.4	Trajectoire dans le cas où $h \neq 0$	39
2	Précession du périhélie des planètes	40
2.1	Calcul	40
2.2	Discussion	40
3	La déviation de la lumière – l’expérience d’Eddington (1919)	40
3.1	Calcul	40
3.2	Expérience d’Eddington	41
3.3	Mesures modernes	41
3.4	Les lentilles gravitationnelles	41
4	L’effet Shapiro – le retard de l’écho radar	42
4.1	Calcul	42
4.2	Mesures	43
5	Précession des gyroscopes	43
5.1	Effet Einstein–de Sitter	43
5.2	L’effet Lense-Thirring	44
5.3	La difficulté de la mesure terrestre	44
5.4	L’expérience Gravity Probe B	44
6	Les horloges autour de la Terre	44
7	Le pulsar 1913+16	45
8	Utilisations de la RG	45
8.1	Le Global Positionning System (GPS)	45
8.2	L’expérience GRACE	45

6	Les trous noirs	47
1	Le trou noir classique	47
1.1	Premières remarques	47
1.2	Trajectoires radiales de particules massives	48
1.3	Trajectoires circulaires de particules massives	49
1.4	Trajectoires radiales de particules sans masse	51
1.5	Trajectoires circulaires de particules sans masse	51
2	L'horizon	53
2.1	Singularité et pseudo-singularité	53
2.2	Coordonnées d'Eddington-Finkelstein	53
2.3	Coordonnées de Kruskal	54
2.4	Trous noirs en rotation	56
2.5	Trous noirs chargés	56
2.6	Le paradigme de la membrane	56
3	Équation d'Oppenheimer et Volkoff	56
4	Les trous noirs en astrophysique et en cosmologie	56
4.1	Formation des trous noirs stellaires	56
4.2	Accrétion et émission électromagnétique	58
4.3	Trous noirs supermassifs	58
4.4	Preuves expérimentales	59
4.5	Trous noirs primordiaux	59
5	Le trou noir quantique – Rayonnement de Hawking et évaporation des trous noirs	59
5.1	Entropie des trous noirs	59
5.2	Rayonnement thermique des trous noirs	59
5.3	Évaporation	60
5.4	Effet Unruh	61
5.5	Principe holographique	61
7	Ondes gravitationnelles	63
1	Linéarisation de la relativité générale	63
1.1	Linéarisation	63
1.2	Transformations de jauge	64
1.3	Solution dans le vide	65
1.4	Solution générale	65
1.5	Application aux sources stationnaires	66
1.6	Analogie avec l'électromagnétisme	66
1.7	Application aux corps sphériques en rotation	67
1.8	Subtilités	67
2	Les ondes gravitationnelles	67
2.1	Introduction	67

2.2	Propriétés	68
2.3	Sources potentielles	68
2.4	Détection des ondes gravitationnelles	68

1. Introduction

Biblio utilisée : The New Physics (Clifford Will)

1 La gravitation newtonienne

Proposée par Newton en 1687, explique le mouvement de la Lune, des planètes, les lois de Kepler. Action à distance.

2 Bref historique de la RG

Vers 1915, Albert Einstein parvient à décrire la gravitation par une théorie basée sur la relativité restreinte. Sa démarche et son objectifs sont théoriques, il n'essaie pas d'expliquer des phénomènes incompris, il veut une théorie de la gravitation. La théorie qu'il expose est assez compliquée, basée sur des notions mathématiques abstraites (le mathématicien Grossmann a joué un rôle important dans le développement de la partie mathématique).

Toutefois, cette théorie connaît rapidement quelques succès :

- elle explique l'anomalie du mouvement de Mercure, l'avance de son périhélie, observé par Le Verrier en 1859, et qui était restée inexpliquée depuis (bien que de nombreuses hypothèses aient été proposées) ;
- elle prédit le phénomène de déviation des rayons lumineux par le Soleil. Cette prédiction sera vérifiée en 1919, avec une précision assez médiocre, de l'ordre de 50 %. C'est Eddington qui mène l'expédition chargée d'observer une éclipse. Il deviendra plus tard un opposant acharné à l'hypothèse des trous noirs.
- elle prédit aussi le décalage gravitationnel des fréquences, qui ne sera vérifiée qu'en 1960.

Cette théorie rencontre un autre succès important. Lorsqu'on l'applique à l'Univers dans son ensemble, elle permet de décrire le phénomène d'expansion cosmologique. En fait, la relativité générale fonde une branche nouvelle de la physique, la cosmologie. Toutefois, la situation reste confuse jusque dans les années 1960, car les prédictions de la cosmologie ne correspondent pas du tout à certaines observations. Par exemple, l'âge de l'Univers, calculé en utilisant les lois de la relativité, semble plus court que celui du système solaire. Pendant la première moitié du XX^e siècle, la relativité générale va rester une théorie anecdotique, considérée comme un joli passe-temps stérile et éloignée des considérations des physiciens.

Les années 1959–1960 sont marquées par plusieurs événements qui marquent un tournant important :

- On détecte l'écho radar de la planète Vénus. Ceci va ouvrir la voie à de nouveaux tests expérimentaux de la RG ;
- Expérience de Pound & Rebka, vérification de l'effet Einstein et inauguration d'une nouvelle ère expérimentale, basée sur des technologies nouvelles (premier laser en 1960) ;

- Penrose publie une nouvelle approche de la RG (spineurs) ;
- théorie de Brans-Dicke, une alternative testable, qui permet de mieux réaliser ce qui dans les tests expérimentaux teste la RG et ce qui teste le principe d'équivalence ;
- découverte du premier quasar.

Le domaine de la RG va alors devenir beaucoup plus actif, à la fin des années 1960 Weber se met en quête des ondes gravitationnelles, en 1967 Wheeler invente le mot « trou noir », en 1974 Hawking commence à marier la RG avec la physique quantique et introduit la notion de rayonnement des trous noirs.

Aujourd'hui, la relativité générale est complètement intégrée dans le paysage des théories physiques et dans la culture des physiciens, voir celle du grand public (trous noirs, trous de ver, Hawking est un star, hyperespace, pliage de l'espace-temps dans Dune). Pour rester dans la physique :

- antennes gravitationnelles (virgo, ligo, lisa) ;
- astrophysique des objets compacts (trous noirs supermassifs au centre des galaxies, étoiles à neutrons, naines blanches) ;
- cosmologie ;
- lentilles gravitationnelles ;
- GPS.

Plusieurs théories tentent de combiner la RG avec la physique quantique, et au passage de l'intégrer dans une théorie qui unifierait l'ensemble des interactions fondamentales (théorie des cordes, théorie M, gravité quantique à boucles).

Il existe différentes approches de la RG, plus ou moins formelles. Nous allons suivre dans ce cours une approche assez physique, proche de celles présentées dans l'ouvrage de Steven Weinberg et celui de Hobson et al.

3 Vue d'ensemble du cours

Plan général, objectifs.

4 Bibliographie

- « *General Relativity – An Introduction for Physicists* » de Hobson, Efstathiou et Lasenby ;
- « *General Relativity and Cosmology* » de S. Weinberg ;
- « *Basic Relativity* » de R. Mould ;
- « *Relativity – Special, General and Cosmological* » de W. Rindler ;
- « *Gravitation* » de Misner, Thorne et Wheeler ;
- « *le destin de l'Univers* » de Luminet pour quelque chose de plus léger.

2. Principe d'équivalence

Lorsque Einstein développe la relativité restreinte, il est guidé par le fait que les équations de Maxwell, décrivant l'électromagnétisme, gardent leur forme lorsqu'on fait subir une transformation de Lorentz aux coordonnées. Ce n'est pas le cas de la gravitation, dont les lois relativistes restent alors à découvrir. Remarquons d'ailleurs que la relativité restreinte ne permet pas d'action instantanée entre deux points différents, ce qui disqualifie la version newtonienne de la gravitation dans la course des théories valables. On pourrait imaginer en chercher une version retardée (au sens des potentiels retardés de l'électromagnétisme), mais il resterait à vérifier que ces lois sont relativistes.

On peut aussi rechercher une forme relativiste en se basant sur la force de Newton et en faisant des transformations de Lorentz, de la même manière que l'on peut trouver la force de Lorentz à partir de l'expression du champ électrostatique dans un référentiel lié à la charge. On trouve alors que la force gravitationnelle possède une composante qui dépend de la vitesse, c'est le gravitomagnétisme. Cette approche pose des problèmes (pour commencer, il se trouve que la force de Newton n'est pas exacte) et doit être abandonnée, mais la relativité générale prédit aussi l'existence de ce phénomène.

L'approche d'Einstein, qui s'avérera extrêmement fructueuse, est différente. De la même façon qu'il avait postulé l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel pour établir les lois de la relativité restreinte, il s'appuie sur un autre principe pour décrire la gravitation de façon relativiste. C'est le principe d'équivalence. L'objet de ce chapitre est d'en étudier les justifications, les formulations et les conséquences.

1 Le principe d'équivalence

1.1 En physique newtonienne : égalité de la masse grave et de la masse inerte

La mécanique newtonienne fait intervenir deux notions de masse qui n'ont a priori rien à voir l'une avec l'autre. La masse inertielle intervient dans le principe fondamental de la dynamique et correspond à la « résistance » qu'un corps oppose à la mise en mouvement sous l'action d'une force. La masse gravitationnelle intervient dans l'expression de la force gravitationnelle

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

où l'on peut d'ailleurs différencier la masse gravitationnelle active m_1 , qui intervient dans le champ gravitationnel

$$\phi_1 = -\frac{Gm_{a1}}{r}$$

de la masse gravitationnelle passive m_{p2} qui intervient dans la relation entre force et champ,

$$\vec{F} = -m_{p2} \overrightarrow{\text{grad}}\phi_1$$

D'après le principe d'action-réaction, la masse passive est égale à la masse active. De plus, on observe expérimentalement que la masse gravitationnelle est égale à la masse inertielle (universalité de la chute libre).

Sous sa forme newtonienne, le principe d'équivalence *stipule* que la masse inerte est égale à la masse grave. Selon le principe fondamental de la dynamique newtonienne, on peut dégager plusieurs conséquences importantes (non indépendantes) de ce postulat, dans le cas de systèmes qui ne sont soumis qu'à des forces gravitationnelles :

- le mouvement d'un corps ne dépend pas sa masse, mais seulement du champ de pesanteur dans lequel il est plongé. Plus précisément, la trajectoire d'un corps dans un champ de pesanteur donné ne dépend que de sa vitesse initiale. On peut en déduire la déviation d'objets se déplaçant à la vitesse de la lumière ;
- dans le référentiel lié à un corps ponctuel en chute libre, les forces d'inertie compensent exactement la force gravitationnelle, et le système est pseudo-isolé (l'action des forces d'inertie qui apparaissent dans un référentiel non galiléen ne dépend pas non plus de la masse) ;

On peut dire la même chose d'un autre manière encore : en observant le mouvement d'un corps, il est impossible de déterminer s'il est dû à un champ de gravitation où à des forces d'inertie. C'est sous une forme similaire que le principe d'équivalence est étendu au cas relativiste.

1.2 Tests expérimentaux

L'égalité de la masse grave et de la masse inerte peut être testée expérimentalement, en comparant la chute de corps différents ou en étudiant des systèmes soumis simultanément à une force gravitationnelle et à une force d'inertie. Les expériences de chute libre dans l'air sont compliquées par la présence du frottement de l'air. Cette force augmente avec la vitesse, et on a tout intérêt à se placer dans des conditions où les vitesses sont faibles. D'autre part, on a aussi intérêt à considérer des temps de chute très longs. La solution est d'utiliser des pendules constitués de matériaux différents et dont on compare les périodes.

D'autres expériences utilisent cette fois des pendules de torsion dans des situations statiques, dans lesquels une inégalité du rapport m_i/m_g se manifesterait pas un couple sur le pendule, sous l'action conjuguée des forces d'inertie d'entraînement et de la force de gravité (cf Weinberg, p. 11–15). Les expériences d'Eötvös¹ (qui a mis au point des accéléromètres précis pour des mesures des gradients gravitationnels, pour la géodésie) permirent entre 1890 et 1905 de tester l'égalité de ces masses avec une précision relative de l'ordre de 10^{-8} . Dicke et ses collaborateurs purent dépasser la barre de 10^{-10} en 1961, et on espère bientôt pouvoir atteindre une précision de 10^{-18} grâce aux expériences Microscope et STEP [parler aussi de la télémétrie laser Terre-Lune]. Ces tests sont cruciaux, car l'ensemble de la relativité générale est bâtie sur le principe d'équivalence. La notion de masse grave passive y est d'ailleurs totalement absente.

1.3 Version forte du principe d'équivalence

On peut l'énoncer de manière équivalente sous la forme

« dans un champ de gravitation il est toujours possible, en tout point de l'espace, de choisir un référentiel (appelé référentiel inertielle) dans lequel les lois de la physique sont localement identiques à celles en l'absence de champ de gravitation »

Il en existe plusieurs nuances, selon le sens que l'on donne au terme « lois de la nature ». On distingue le principe d'équivalence faible lorsqu'on le restreint aux lois de la gravitation, et le principe d'équivalence fort lorsqu'on l'étend à l'ensemble des lois de la physique. Sous sa forme forte, il s'énonce

« dans un champ de gravitation, les lois de la physique dans un référentiel inertielle sont localement décrites par la relativité restreinte ».

1. <http://www.kfki.hu/~tudtor/eotvos1/onehund.html>

1.4 Référentiel en chute libre – référentiel fixe

L'égalité de la masse grave et de la masse inerte implique que dans un référentiel en chute libre, la force de gravitation est compensée par la force d'inertie d'entraînement, c'est-à-dire qu'elle ne se manifeste plus. Ceci n'est vrai que localement : si le champ gravitationnel est inhomogène, il subsiste des forces de marée qui deviennent de plus en plus importantes quand on s'éloigne du centre de masse du corps en chute libre.

Le référentiel du laboratoire est souvent considéré comme fixe, c'est celui que l'on considère naturel pour appliquer les lois de la physique, que l'on élève au rang de référentiel galiléen. D'après le principe d'équivalence, il est plus naturel et plus simple de faire de la physique dans le référentiel en chute libre !

Le référentiel du laboratoire, dans lequel on ressent la force de gravitation, doit donc être considéré comme un référentiel accéléré, vers le haut, avec l'accélération $-\vec{g}$.

1.5 La physique dans des référentiels accélérés

Selon ce principe, il est alors simple de déterminer l'effet de la gravitation. On se place dans le référentiel inertiel évoqué plus haut, on écrit les lois de la relativité restreinte, puis on effectue un changement de référentiel vers le référentiel qui nous intéresse. Cette deuxième étape peut être très compliquée, car il ne s'agit pas, en général, de transformations de Lorentz. Par exemple dans le cas d'un champ gravitationnel homogène, il faudrait faire un changement de référentiel faisant intervenir une accélération constante.

La physique dans des référentiels accélérés semble radicalement différente de celle des référentiels inertiels : forces d'inertie en mécanique, « paradoxe » de l'induction unipolaire en électromagnétisme, paradoxe du disque en rotation en relativité restreinte. Il semble exister certains référentiels dans lesquels la physique est simple, et d'autres dans lesquels elle ne l'est pas.

Il faut donc écrire les lois de la physique dans un référentiel quelconque (ce que vous n'avez probablement jamais fait en relativité restreinte). La manière la plus naturelle de le faire est d'utiliser des objets mathématiques appelés des tenseurs.

C'est parti, lançons-nous dans le programme énoncé plus haut. En l'absence de champ de gravitation, le mouvement d'une particule est décrit par

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.1)$$

où le temps propre τ est relié à l'intervalle ds défini par²

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.2)$$

et où les ξ^α désignent les coordonnées dans le référentiel inertiel, ξ^0 étant la composante temporelle, et les trois autres ξ^i (où $i \in \{1, 2, 3\}$) les composantes spatiales. Effectuons un changement de référentiel, se traduisant par un changement de coordonnées $\xi^\alpha \rightarrow x^\alpha$. En utilisant la relation

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.3)$$

l'équation du mouvement se réécrit

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad (2.4)$$

soit

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.5)$$

2. Dans toute la suite, on utilisera la convention des sommes implicites sur les indices répétés.

Ce qui se réécrit, en multipliant par $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, en sommant sur les indices α , et en utilisant la propriété

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda, \quad (2.6)$$

on arrive à

$$\boxed{\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0} \quad (2.7)$$

où l'on a introduit la **connexion affine**, définie par

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}} \quad \text{aussi notée} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Cette quantité est aussi appelée **symbole de Christoffel**.

L'équation du mouvement indique que dans le référentiel accéléré, la particule semble évoluer sous l'action d'une force

$$f^\lambda = -m \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.9)$$

Ici on a juste fait un changement de coordonnées $\xi \rightarrow x$, et le terme en $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ décrit des forces d'inertie, analogues à celles que l'on rencontre en mécanique newtonienne dans l'étude des référentiels non galiléens. Ces forces d'inertie peuvent dépendre de la vitesse (force de Coriolis).

Cette force peut aussi décrire la force gravitationnelle, en choisissant correctement $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Ce terme ne pourra alors plus être associé à un changement de coordonnées faisant passer de l'espace-temps minkowskien aux coordonnées x . En revanche, l'équation du mouvement est formellement identique à l'équation des géodésiques sur une surface courbe. Nous allons voir que la gravitation peut s'interpréter comme une courbure de l'espace-temps.

Dit autrement : si le référentiel initial décrit par les coordonnées ξ est « galiléen », alors la force f^λ décrit les forces d'inertie dans le référentiel accéléré. Si le référentiel initial est en chute libre, alors la force f^λ décrit la force gravitationnelle (responsable de la chute) dans le référentiel fixe.

2 Tenseur métrique $g_{\mu\nu}$

2.1 Définition

L'intervalle

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.10)$$

se transforme par changement de coordonnées selon

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.11)$$

On définit le **tenseur métrique** $g_{\mu\nu}$ comme

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.12)$$

ce qui permet d'écrire

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.13)$$

La quantité $g_{\mu\nu}$ est un tenseur (on verra plus loin ce que ça veut dire précisément), symétrique sur ses indices,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (2.14)$$

Il intervient dans l'expression de ds^2 lorsqu'on l'écrit en fonction des coordonnées x . Il relie donc des différences de coordonnées à la valeur de l'intervalle, qui joue ici le rôle de distance, d'où le nom de tenseur métrique.

2.2 Inverse $g^{\mu\nu}$

Le tenseur inverse de $g_{\mu\nu}$ est noté $g^{\mu\nu}$ (nous verrons pourquoi plus tard), il vérifie

$$g_{\alpha\nu}g^{\nu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (2.15)$$

où δ_{α}^{β} désigne le symbole de Kronecker, défini par

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3 Relation entre $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ et $g_{\mu\nu}$

Les deux quantités $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ et $g_{\mu\nu}$ sont liées aux dérivées $\partial\xi^{\alpha}/\partial x^{\mu}$ et ne sont pas indépendantes. Il se trouve que l'on peut exprimer la première en fonction de la seconde. Calculons la dérivée de $g_{\alpha\mu}$ par rapport à une coordonnée x^{ν} . Cette quantité sera notée $g_{\alpha\mu,\nu}$.

$$g_{\alpha\mu} \equiv \eta_{ij} \frac{\partial\xi^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\xi^j}{\partial x^{\mu}} \quad (2.16)$$

$$g_{\alpha\mu,\nu} = \eta_{ij} \frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\nu}} \frac{\partial\xi^j}{\partial x^{\mu}} + \eta_{ij} \frac{\partial\xi^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2\xi^j}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \quad (2.17)$$

Or nous avons vu précédemment que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$$

soit en multipliant pas $\partial\xi^{\beta}/\partial x^{\lambda}$,

$$\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial\xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \delta_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$$

soit finalement

$$\frac{\partial^2\xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \quad (2.18)$$

ce qui donne

$$g_{\alpha\mu,\nu} = \eta_{ij} \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} \frac{\partial\xi^i}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial\xi^j}{\partial x^{\mu}} + \eta_{ij} \frac{\partial\xi^i}{\partial x^{\alpha}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial\xi^j}{\partial x^{\lambda}} \quad (2.19)$$

$$g_{\alpha\mu,\nu} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\alpha\lambda} \quad (2.20)$$

De même,

$$g_{\alpha\nu,\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\alpha\lambda} \quad (2.21)$$

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} \quad (2.22)$$

En combinant ces expressions, on arrive à

$$2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\alpha\lambda} = g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha} \quad (2.23)$$

En multipliant par l'inverse du tenseur métrique, $g^{\alpha\beta}$,

$$2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta_{\lambda}^{\beta} = g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.24)$$

soit finalement

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.25)$$

On remarque que la connexion affine $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$, qui se manifeste comme une force, est liée aux dérivées de $g_{\mu\nu}$, qui joue donc le rôle d'un potentiel. En relativité générale, les forces gravitationnelles sont dues à une propriété de l'espace-temps.

2.4 Exemples des coordonnées polaires et de la sphère

Dans un espace plat 2D muni de coordonnées polaires,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.26)$$

et donc

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

On a alors

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0 \quad (2.28)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r \quad (2.29)$$

Sur une sphère de rayon R décrite en coordonnées sphériques,

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.30)$$

et donc

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

soit

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0 \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta \quad (2.33)$$

2.5 Remarques

L'expression du tenseur métrique dépend du choix de coordonnées. Il dépend aussi des propriétés intrinsèques de l'espace qu'il décrit, on verra plus loin qu'il permet de calculer la courbure.

3 Limite newtonienne

Bibliographie utilisée : Hobson, Efstathiou, Lasenby, section 7.6

Reprenons l'équation (2.7), et considérons-là dans la limite newtonienne, c'est-à-dire pour des vitesses faibles (sinon ça devient relativiste au sens restreint) et pour des champs gravitationnels faibles (c'est-à-dire $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$, à justifier plus tard), dans une situation stationnaire. On a alors

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

Comme $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ ne dépend pas du temps, on peut écrire l'équation (2.25) sous la forme

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta \approx \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\alpha\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.35)$$

où l'on a aussi remplacé le premier $g^{\alpha\beta}$ par $\eta^{\alpha\beta}$, la différence étant du second ordre en h . Dans l'équation du mouvement (2.7), on a alors pour $\lambda = 0$ (coordonnée temporelle $x^0 = ct$) et $\eta^{00} = 1$

$$c \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (h_{0\mu,\nu} + h_{0\nu,\mu} - h_{\mu\nu,0}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.36)$$

Le terme $h_{\mu\nu,0}$ est nul car h ne dépend pas du temps. D'autre part, on suppose que les vitesses $dx^i/d\tau \ll 1$, car on se place dans la limite non-relativiste. Le produit de h par une vitesse est donc considéré comme un ordre deux, que l'on néglige. Il reste simplement

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{soit} \quad t \propto \tau \quad (2.37)$$

Plaçons-nous dans un système d'unités tel que $ct = \tau$. Les autres composantes de l'équation du mouvement (2.7) s'écrivent alors, avec et $\eta^{ii} = -1$ (pas de sommation)

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (h_{i\mu,\nu} + h_{i\nu,\mu} - h_{\mu\nu,i}) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (2.38)$$

À l'ordre le plus bas, les termes correspondant à $\mu = \nu = 0$ dominent, soit en tenant compte du fait que les dérivées temporelles de h sont nulles,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{h_{00,i} c^2}{2} = 0 \quad (2.39)$$

On trouve alors que l'équation du mouvement se réduit à

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00} \quad (2.40)$$

ce qui est identique à l'équation de Newton, pourvu que $\Phi = c^2 h_{00}/2$ soit

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \quad (2.41)$$

Ainsi, le tenseur g contient la description du champ gravitationnel. Il contient aussi l'information nécessaire pour passer d'un référentiel quelconque à un référentiel inertiel. C'est exactement ce que dit le principe d'équivalence : ces deux informations sont équivalentes, car si l'on connaît le champ gravitationnel, on peut calculer le mouvement de chute libre et en déduire un référentiel inertiel.

De plus, l'expression de g_{00} permet d'estimer la déviation par rapport à la métrique de Minkowski due au champ gravitationnel. Avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $M_{\text{Terre}} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ et $R_{\text{Terre}} \approx 6400 \text{ km}$, on trouve 10^{-9} à la surface de la Terre. On trouve de même 10^{-6} à la surface du Soleil et 10^{-4} à la surface des naines blanches.

Enfin, comme g_{00} est lié à la façon dont un observateur ressent le passage du temps, on voit que la présence d'un champ gravitationnel altère les durées. C'est une conséquence directe du principe d'équivalence. Les sections suivantes sont consacrées à cet effet.

4 Déviation des rayons lumineux dans un champ homogène

D'après la relativité générale, la propagation de la lumière est affectée par la présence d'un champ gravitationnel, comme nous le verrons en détail plus loin. Dans le cas d'un champ homogène, on peut le montrer sans calcul, en se basant sur le principe d'équivalence. Considérons un observateur au repos dans un champ de pesanteur homogène dirigé vers le bas. Les référentiels inertiels sont en chute libre vers le bas et pour cet observateur, tout se passe comme s'il était accéléré vers le haut par rapport à un référentiel inertiel, avec une accélération constante. [petit schéma] Vu depuis l'ascenseur, le rayon lumineux est courbé. Le principe d'équivalence implique que les rayons lumineux sont déviés dans un champ de pesanteur. Pour un champ gravitationnel inhomogène, tel que celui créé par un corps sphérique comme le Soleil, il faut faire appel aux outils de la relativité générale pour calculer quantitativement cette déviation, nous le ferons dans un chapitre ultérieur.

5 L'effet Einstein – décalage gravitationnel des fréquences

L'effet du champ gravitationnel sur les durées est appelé **effet Einstein**. On peut analyser cet effet de plusieurs manières.

Pour un objet au repos dans un champ gravitationnel (pas dans un référentiel inertiel, donc), le temps propre $d\tau$ est relié au temps dt par

$$d\tau^2 = g_{00}dt^2 \quad \text{soit} \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{g_{00}}} \quad (2.42)$$

Le temps qui sépare deux tics d'une même horloge dépend de g_{00} , et donc du champ gravitationnel présent,

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}} \quad (2.43)$$

ce qui donne, avec l'expression précédente de g_{00} (valable pour les champs faibles),

$$\frac{dt_1}{dt_2} = 1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2} \quad (2.44)$$

Examinons l'expérience de Pound-Rebka, dans le cas où une onde électromagnétique issue d'une transition atomique est émise vers le haut depuis un émetteur où le potentiel gravitationnel vaut Φ_1 , vers le détecteur où il vaut $\Phi_2 > \Phi_1$. Prenons pour dt_1 la période de l'onde émise, c'est-à-dire l'écart temporel entre les maxima de l'onde électromagnétique émise. Le temps de parcours de la lumière entre 1 et 2 étant indépendant du temps, les maxima de l'onde sont reçus en 2 avec le même écart temporel dt_1 . Or, si l'observateur situé en 2 dispose d'une source identique à celle placée en 1, la période du rayonnement émis par la transition atomique (ou la période des ondes susceptibles d'être absorbées par l'atome placé en 2) vaut dt_2 qui d'après la relation précédente vérifie $dt_2 < dt_1$. Pour l'observateur 2, l'onde reçue a donc une période plus longue (et donc une fréquence plus faible) que celle de la transition atomique : l'onde a été décalée vers le rouge. La fréquence reçue en 2 est donnée par l'inverse de la période dt_1 et la fréquence de la transition atomique qui aurait lieu en 2 par l'inverse de dt_2 , si bien que vérifie donc

$$\frac{f_{\text{reçue}}}{f_{\text{émise}}} \approx 1 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2} < 1 \quad (2.45)$$

On peut comprendre ce résultat, dans le cas d'un champ gravitationnel homogène, en utilisant le principe d'équivalence. La physique dans un référentiel au repos dans champ de gravitation \vec{g} est la même que dans un référentiel accéléré vers le haut, avec l'accélération $\vec{a} = -\vec{g}$, sans gravitation. Plaçons nous dans ce référentiel, par exemple dans une cabine d'ascenseur accélérée vers le haut. Considérons une horloge constituée d'un ensemble émetteur-récepteur séparés par une distance ℓ faible, l'émetteur produisant un rayonnement monochromatique. La lumière émise en bas met le temps $\delta t \approx \ell/c$ pour atteindre un récepteur situé haut. Pendant ce temps, le récepteur a acquis une vitesse relative $\delta v \approx g \delta t = g\ell/c$ par rapport à l'émetteur. L'effet Doppler se traduit par un décalage de la fréquence

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{g\ell}{c^2} \quad (2.46)$$

Ceci s'exprime en fonction du potentiel gravitationnel $\phi \approx gz$ (si z est orienté vers le haut) selon

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{\phi}{c^2} \quad (2.47)$$

La lumière a une fréquence d'autant plus faible que le récepteur est situé haut, c'est-à-dire dans des régions où le potentiel gravitationnel est élevé.

On peut aussi retrouver cet effet en faisant un bilan d'énergie sur un photon d'énergie $E = h\nu$.

6 L'expérience de Pound et Rebka

Expérience réalisée en 1959 par Robert Pound (1919–) et Glen Rebka. Elle consiste à placer en haut d'une tour une source de rayons gamma émettant une raie très fine (la raie à 14 keV du ^{57}Fe), un détecteur sensible à cette raie en bas de la tour, et à mesurer le décalage en fréquence entre la raie émise et la raie détectée, en utilisant le fait que la probabilité d'absorption par le détecteur dépend de la fréquence de la raie reçue. La difficulté de cette expérience réside dans le fait que le décalage Doppler de la raie dû au recul des atomes est beaucoup plus important que l'effet gravitationnel recherché. Elle ne put être réalisée en pratique qu'après la découverte de l'effet Mössbauer (1957) dans lequel ce recul est beaucoup moins important, le photon interagissant avec l'ensemble du réseau cristallin et non un seul atome.

6.1 Résultat de l'expérience historique

6.2 Versions modernes

7 Les difficultés

7.1 Tous les systèmes de coordonnées se valent

Il n'est pas immédiat de dégager le sens physique d'une coordonnée à partir d'une métrique.

7.2 Le système à deux corps

Il est difficile de seulement poser le problème à deux corps. Comment mettre deux corps à une certaine distance l'une de l'autre si on ne connaît pas la métrique? La notion de masse n'est pas non plus évidente a priori, car il y a de l'énergie de liaison en jeu.

7.3 Comment déterminer la courbure?

Le principe d'équivalence permet de décrire la physique dans un espace courbe, mais il ne dit rien sur ce qui détermine la courbure, ou dit autrement, sur les sources du champ de gravitation. Nous allons voir que c'est le rôle des équations d'Einstein, qui définissent la relativité générale. Il existe d'autres choix possibles qui définissent des alternatives ou des prolongements de la relativité générale.

7.4 La topologie

La métrique détermine les propriétés géométriques locales de l'espace-temps, mais pas la topologie. Par exemple dans un espace de dimension 2, une géométrie plane peut être réalisé dans un plan, dans un cylindre ou sur un tore, si l'on identifie certains points du plan. Pour chaque géométrie il existe généralement plusieurs topologies possibles. La détermination de la topologie adaptée pour décrire l'Univers dans lequel nous vivons est une question de cosmologie expérimentale [cf Luminet].

3. Variétés riemanniennes et calcul tensoriel

Dans ce qui précède, nous avons écrit l'équation du mouvement d'un corps soumis à un champ de gravitation, en utilisant le principe d'équivalence. L'équation obtenue est identique à celle qui décrit les géodésiques dans un espace courbe, comme nous allons le voir, et il sera très utile de rappeler/voir quelques notions relatives à ces espaces.

1 Espaces courbes

Biblio utilisée : Rindler, chapitre 8; Mould, chapitre 11; Hobson, chapitre 2.

1.1 Courbure extrinsèque et courbure intrinsèque

La courbure est une notion géométrique, qui caractérise les distances sur une surface. On dit qu'une surface est plate ou euclidienne lorsque les distances entre les points obéissent au théorème de Pythagore, soit en dimension 2 par exemple,

$$\ell^2 = x^2 + y^2$$

On visualise bien, intuitivement, cette notion de platitude. Prenons une surface plate et déformons-la. Par exemple, roulons-là en un cylindre. Elle devient courbée, ou plus précisément, on dit qu'elle possède une courbure extrinsèque. Pour un insecte vivant sur la surface, celle-ci reste plate, cependant. Les longueurs obéissent en effet à la relation de Pythagore, pourvu qu'on les compte dans la surface,

$$\ell^2 = x^2 + R^2\theta^2 = x^2 + (R\theta)^2$$

Pour d'autres surfaces, comme la sphère, ce n'est pas le cas et les distances ne vérifient pas Pythagore. La surface possède une courbure intrinsèque.

C'est cette courbure intrinsèque qui va nous intéresser ici. On peut la définir pour n'importe quelle surface, ou n'importe quel espace, sans avoir besoin de la plonger dans un espace de dimension plus grande. Cela peut parfois aider à comprendre certaines propriétés de visualiser une surface bidimensionnelle plongée dans l'espace 3D, mais il faudra dépasser cette vision.

Dans le cas de la sphère 2D de rayon R , par exemple, décrites par les coordonnées sphériques (θ, ϕ) (colatitude et longitude), les distances sont données par

$$d\ell^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Les coefficients qui interviennent dans cette expression forment la métrique, qui constitueront plus loin le tenseur métrique. Cette expression contient toutes les informations sur la courbure de la sphère. Un habitant de la sphère qui mesure les distances entre 4 villes assez éloignées peut utiliser cette expression pour en déduire le rayon de la Terre. On peut écrire d'autres formes équivalentes de la métrique, par exemple en partant de l'expression tridimensionnelle de la surface

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{avec} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

soit

$$dz = -\frac{x dx + y dy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$$

et donc

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x dx + y dy)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

En posant $x = \rho \cos \phi$ et $y = \rho \sin \phi$, on a

$$dx = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi \quad \text{et} \quad dy = \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi$$

ce qui donne

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \quad \text{et} \quad (x dx + y dy)^2 = \rho^2 d\rho^2$$

ce qui donne finalement

$$d\ell^2 = \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 d\phi^2 \tag{3.1}$$

On peut noter une singularité dans ces expressions, en $\rho = R$. Elle provient du choix de coordonnées, pas d'une singularité réelle de la surface. En RG, il faudra se méfier de ce type de singularité et de ne pas les attribuer à la structure de l'espace-temps.

Dans le cas tridimensionnel, on trouve de même

$$d\ell^2 = \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\Omega^2$$

où $d\Omega$ désigne l'angle solide élémentaires en coordonnées sphériques.

Notons enfin qu'il n'est pas immédiat de voir qu'une surface est courbe d'après son $d\ell^2$. Par exemple le plan en coordonnées polaires.

1.2 Géodésiques

On appelle géodésique une courbe \mathcal{C} reliant deux points et dont la longueur

$$\ell \equiv \int_{\mathcal{C}} d\ell$$

est stationnaire, dans le sens où

$$\delta\ell = 0 \tag{3.2}$$

pour toute perturbation $\delta\mathcal{C}$ de la courbe. De manière équivalente, la courbe est localement de longueur minimale, c'est-à-dire que la distance entre deux points infinitésimalement proches est minimale. Quant à la longueur peut être minimale (exemple de deux points sur la sphère), ou correspondre à une situation plus complexe (pas un maximum), dans laquelle les variations $\delta\ell$ sont nulles au premier ordre, mais peuvent être positives ou négatives au second ordre, selon la perturbation considérée. C'est un point de selle (exemple avec deux points sur la sphère, de la géodésique qui fait le tour).

On peut montrer (cf TD) que la condition 3.2 conduit à l'équation des géodésiques.

1.3 La géométrie dans des espaces courbes

La somme S des angles d'un triangle n'est pas nécessairement égale à π radians, et il existe des diangles. L'écart entre S et π dépend de l'aire du triangle considéré.

Le rapport entre la circonférence et le rayon d'un cercle n'est pas égal à 2π . Calculons la circonférence d'un cercle de rayon r . Un point sur une sphère de rayon R peut être repéré par sa distance $r = R\theta$ à l'un des pôles et par sa longitude ϕ . La circonférence d'un cercle de rayon r et centré sur un pôle s'écrit

$$C = 2\pi R \sin \theta = 2\pi R \sin \left(\frac{r}{R} \right) < 2\pi R \frac{r}{R} = 2\pi r$$

On remarque que la circonférence atteint un maximum pour une valeur donnée de r . Pour des petits cercles ($r \ll R$), on a

$$C \approx 2\pi r - \frac{\pi}{3} \frac{r^3}{R^2}$$

De même, calculons la surface du disque correspondant, toujours sur la sphère :

$$S = \int_0^r C(r) dr = \int_0^r 2\pi R \sin \theta dr = 2\pi R^2 \int_0^\theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \left[1 - \cos \left(\frac{r}{R} \right) \right]$$

Pour des petits disques ($r \ll R$), le développement limité du cosinus donne

$$S \approx \pi R^2 - \frac{\pi r^4}{12R^2}$$

Calcul similaire dans un espace 3D courbe, volume d'une sphère, volume total de la variété. Deux personnes qui avancent en ligne droite en partant parallèles. Idem avec des rayons lumineux.

Ballon qu'on gonfle sur une sphère, dans l'espace : la surface du ballon atteint une surface maximale pour un rayon donné.

1.4 Courbure gaussienne

Gauss avait introduit la courbure d'une sphère en considérant la relation entre les angles α, β, γ d'un triangle,

$$K = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S} = \frac{1}{R^2}$$

On peut montrer que K vaut $1/R^2$ en considérant un triangle dont les trois angles valent $\pi/2$, et dont la surface vaut donc un huitième de celui de la sphère. Pour une surface dont la courbure n'est pas constante (une patatoïde), la courbure locale est donnée par

$$K = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S}$$

On voit sur la figure 3.1 que la courbure est liée à la manière dont un vecteur tourne lorsqu'il parcourt le triangle, en le forçant à être parallèle à chaque côté au cours de son trajet, en lui faisant subir une rotation d'angle α, β ou γ aux trois sommets. Voir le lien plus loin entre courbure et transport parallèle.

1.5 Variété (pseudo-)riemannienne

Ce qu'on a dit ici peut être transposé au cas d'une variété décrite localement non pas par la longueur $d\ell^2$, mais par l'intervalle que l'on va noter ds^2 , même si cette quantité pourra être négative ou positive.

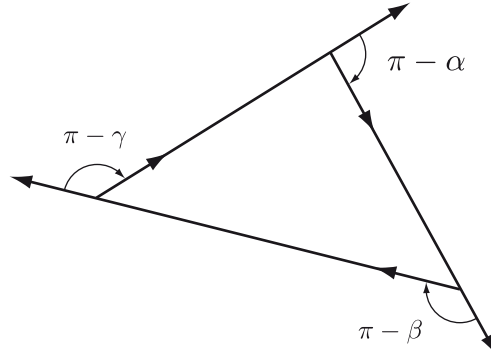


FIGURE 3.1: Lorsque l'on parcourt un triangle, à chaque sommet on tourne d'un angle complémentaire de l'angle interne correspondant. Pour un triangle plan, lorsqu'on revient à son point de départ, on a tourné de 2π , si bien que $2\pi = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)$, soit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1.6 Le référentiel local de Lorentz

À partir d'une métrique quelconque, peut-on choisir un système de coordonnées ξ^μ dans lequel la métrique est euclidienne ou minkowskienne? À partir d'un système de coordonnées quelconque x^μ , on veut trouver un nouveau système de coordonnées x'^μ tel qu'en tout point P ,

$$\forall P, \quad g'_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Ces conditions (autant que de composantes indépendantes de g) sont généralement impossibles à remplir en tout point, car on ne dispose que de 4 fonctions ξ^μ à ajuster pour remplir 10 conditions. La réponse est donc négative. En revanche, on peut vouloir les remplir localement autour d'un point P donné, c'est-à-dire

$$g'_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g'_{\mu\nu,\alpha}(P) = \left. \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\alpha} \right|_P = 0 \quad (3.4)$$

en érigeant autour de ce point P un système de coordonnées x'^μ , relié au système de départ par

$$x^\alpha = x'_0{}^\alpha + a_\mu^\alpha (x'^\mu - x'_0{}^\mu) + b_{\mu\nu}^\alpha (x'^\mu - x'_0{}^\mu) (x'^\nu - x'_0{}^\nu) + c_{\mu\nu\sigma}^\alpha (x'^\mu - x'_0{}^\mu) (x'^\nu - x'_0{}^\nu) (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma) + \dots \quad (3.5)$$

où les a , b et c sont des ensembles de constantes. Le calcul de $g'_{\mu\nu}(P)$ contient les dérivées premières du changement de coordonnées, et ne fait intervenir que les a_μ^α . Ceux-ci peuvent effectivement être choisis pour satisfaire la condition (3.3). On dispose en effet de $N^2 = 16$ paramètres a_μ^α pour satisfaire $N(N+1)/2 = 10$ conditions. La différence de 6 correspond à la liberté de choix correspondant à la transformation de Lorentz d'un référentiel localement inertiel à un autre. Le calcul des dérivées premières de $g'_{\mu\nu}(P)$ contient les dérivées secondes du changement de coordonnées, et au point P ces dérivées secondes ne font intervenir que les termes $b_{\mu\nu}^\alpha$. Ils peuvent eux aussi être choisis pour satisfaire la condition (3.4). On dispose en effet de $N^2(N+1)/2 = 40$ paramètres $b_{\mu\nu}^\alpha$ pour satisfaire $N^2(N+1)/2 = 40$ conditions. Par contre, les termes $c_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ ne peuvent pas être ajustés pour satisfaire

$$g'_{\mu\nu,\alpha\beta}(P) = \left. \frac{\partial^2 g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right|_P = 0 \quad (3.6)$$

car on ne dispose que de $N^2(N+1)(N+2)/6 = 80$ paramètres $c_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ (voir plus loin) pour satisfaire $N^2(N+1)^2/4 = 100$ conditions. Ces termes en dérivée seconde de $g_{\mu\nu}$ correspondent à la courbure de l'espace-temps et ne peuvent

être éliminés par aucun changement de référentiel. Notons qu'il y a 20 de ces nombres, ce qui correspond exactement au nombre de composantes indépendantes du tenseur de courbure (voir plus loin).

Le référentiel dans lequel les conditions précédentes sont remplies est appelé le référentiel localement inertiel ou référentiel local de Lorentz. On remarque que dans ce référentiel, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$.

Nombre de contraintes en dimension 2, 3 ou 4.

Le calcul du nombre de paramètres $c_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ indépendants peut s'effectuer comme suit. Il y a N possibilités pour choisir α , et il reste à calculer le nombre de triplets $(\mu, \nu, \sigma) \in \{0, 1, 2, 3\}^3$, sachant que les coefficients sont symétriques par échange de deux indices. Ainsi, $c_{023}^1 = c_{032}^1 = c_{302}^1 = \dots$, par exemple. Il faut simplement indiquer le nombre de fois où chaque possibilité (0, 1, 2 ou 3) apparaît dans le triplet (μ, ν, σ) , par exemple ici une fois 0, une fois 2 et une fois 3. Ceci pourrait être représenté par la notation $\times || \times | \times$, où la première case représente le nombre de 0, la seconde le nombre de 1, etc. De même le coefficient $c_{002}^1 = c_{020}^1 = c_{200}^1$ serait représenté par $\times \times || \times |$. Le nombre de $c_{\mu\nu\sigma}^\alpha$ indépendants est donc obtenu en calculant le nombre de manières de disposer trois \times et $N - 1$ symboles $|$ de manière non ordonnée dans $N + 2$ cases, soit

$$\frac{(N+2)(N+1)N}{3!}$$

ce qui donne bien pour le nombre de paramètres différents

$$\frac{(N+2)(N+1)N^2}{6}$$

2 Tenseurs

2.1 Introduction

Les calculs sur des surfaces peuvent être pénibles. On va s'affranchir d'une grande partie de la difficulté (pas toutes) en utilisant des tenseurs, qui sont des objets mathématiques caractérisés par des propriétés de transformation particulières. Ce sont en quelque sorte les extensions des vecteurs (à condition d'avoir bien défini ce qu'est un vecteur).

2.2 Scalaires

Plus précisément, lorsque l'on change de système de coordonnées pour décrire les points sur une variété (une surface 2D ou un espace de dimension plus grande), $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, certaines quantités ne sont pas modifiées, dans le sens où leur nouvelle valeur S' au point x'^μ est égale à l'ancienne valeur S , prise au point x^μ ,

$$S'(x'^\mu) = S(x^\mu)$$

Ce sont des scalaires. Par exemple, l'altitude ou la température en chaque point de la surface terrestre.

2.3 Vecteurs

D'autres quantités changent au cours de la transformation. On définit les vecteurs contravariants comme ceux qui se transforment selon

$$\boxed{V'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} V^\mu} \quad (3.7)$$

Par exemple, les coordonnées dx^ν d'un déplacement élémentaire sont changées par changement de coordonnées (exemple, passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires), selon

$$dx'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Ceci les oppose à un autre type d'objets, les vecteurs covariants qui se transforment selon

$$\boxed{V'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V_\mu} \quad (3.8)$$

C'est le cas par exemple du gradient d'une fonction scalaire, $\partial_\mu \Phi$. En effet, en utilisant le fait que $\Phi'(x') = \Phi(x)$ si Φ est scalaire (voir plus loin),

$$(\partial_\mu \Phi)' = \frac{\partial \Phi'}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \Phi$$

On remarque alors que le produit $W_\mu V^\mu$ est un scalaire, car

$$W'_\nu V'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} W_\alpha \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta = \delta^\alpha_\beta W_\alpha V^\beta = W_\alpha V^\alpha$$

Pour un vecteur contravariant V^μ donné, on définit le vecteur covariant V_μ de sorte que $V_\mu V^\mu$ donne le carré de la norme du vecteur,

$$V_\mu V^\mu = \|V\|^2$$

C'est-à-dire que V_μ est le vecteur dual de V^μ .

2.4 Interprétation géométrique des composantes covariantes et contravariantes

Dans le plan muni d'un repère non orthogonal, on peut visualiser la différence entre les deux types de coordonnées : les coordonnées contravariantes sont obtenues par projection parallèle sur les axes correspondants alors que les coordonnées covariantes sont obtenues par projection orthogonale (voir la figure 3.2). On montre alors par le calcul que $v^2 = v_x v^x + v_y v^y$. On écrit que

$$v^2 = (v_y)^2 + h^2 \quad \text{et} \quad (v^x)^2 = h^2 + (v_y - v^y)^2$$

La deuxième équation s'écrit

$$(v^x)^2 = h^2 + (v_y)^2 + (v^y)^2 - 2v_y v^y$$

on remplace h^2 par son expression obtenue par l'équation précédente, ce qui donne après simplification

$$(v^y)^2 - 2v_y v^y = (v^x)^2 - v^2$$

On obtient une expression similaire en intervertissant x et y , ce qui donne finalement en combinant les deux équations ainsi obtenues,

$$v^2 = v_x v^x + v_y v^y$$

2.5 Tenseurs de rang quelconque

On peut étendre la définition précédente à des tenseurs de rang plus élevé. Un objet est un tenseur covariant de rang 2 s'il se transforme selon

$$\boxed{T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}} \quad (3.9)$$

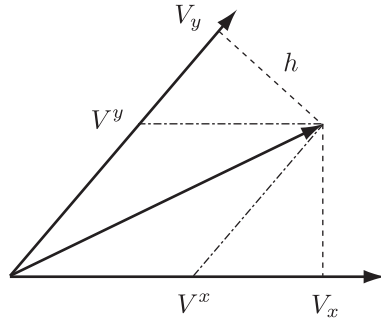


FIGURE 3.2: Coordonnées contravariantes et covariantes.

Un objet est un tenseur contravariant de rang 2 s'il se transforme selon

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

Tenseur mixte : T^{μ}_{ν} .

2.6 Le tenseur métrique

La quantité $g_{\mu\nu}$ est un tenseur covariant d'ordre 2. Son inverse $g^{\mu\nu}$ est un tenseur contravariant d'ordre 2. En effet,

$$g'_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = g_{\sigma\rho} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}$$

Le vecteur $V_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} V^{\nu}$ est un vecteur covariant, il est appelé le vecteur dual de V^{ν} , car $V_{\mu} V^{\mu}$ est égal au produit scalaire de V^{μ} par lui-même, $g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$.

Le tenseur métrique est symétrique sur ses indices, il comporte donc $n(n+1)/2$ composantes indépendantes, soit 10 en dimension $n = 3 + 1$.

2.7 Monter et descendre les indices

On passe d'une composante covariante à une composante contravariante (et vice-versa) par contraction avec le tenseur métrique,

$$V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu} \quad \text{et} \quad V^{\mu} = g^{\mu\nu} V_{\nu}$$

2.8 Intérêt des tenseurs

L'intérêt des tenseurs généralise celui des vecteurs habituels, ce sont des entités dont les propriétés ne dépendent pas du choix de coordonnées. Une égalité tensorielle est vraie dans tout système de coordonnées. On peut alors souvent se placer dans un choix qui donne une équation simple. Grâce au principe d'équivalence, en particulier, on peut écrire des égalités tensorielles dans un référentiel inertiel (dans lequel $\Gamma = 0$ au moins en

un point). Ces égalités resteront vraies en présence de gravitation (dans un référentiel non inertiel). Elles seront alors plus compliquées à cause de la connexion affine.

En particulier, un tenseur nul dans un système de coordonnées est nul dans tous les autres.

Dit autrement : une quantité que l'on peut annuler par changement de référentiel n'est pas un tenseur.

3 Abrégé de calcul tensoriel

3.1 Combinaison linéaire de tenseurs

La combinaison linéaire de deux tenseurs de même rang et de même caractère covariant/contravariant est un tenseur. Par exemple, si $A^\mu_{\alpha\beta}$ et $B^\mu_{\alpha\beta}$ sont deux tenseurs, alors

$$C^\mu_{\alpha\beta} = aA^\mu_{\alpha\beta} + bB^\mu_{\alpha\beta} \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

est aussi un tenseur. On le montre très facilement à partir des relations de transformation des tenseurs.

3.2 Produit de tenseurs

La quantité $A^\mu B^\nu$ se transforme comme un tenseur doublement contravariant. On peut généraliser à des tenseurs de rang plus élevé, et à des composantes covariantes.

Attention, un tenseur de rang deux ne s'écrit pas forcément comme le produit de deux tenseurs de rang inférieur (on peut par exemple intriquer les composantes, $A^\mu B^\nu + A^\nu B^\mu$).

3.3 Contraction

On appelle contraction d'un tenseur $A^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ la quantité obtenue en sommant ses composantes sous la forme $A^{\mu\alpha}_{\alpha\beta}$. On obtient ainsi un nouveau tenseur. Calculons par exemple la manière dont se transforme $A^{\mu\alpha} B_{\alpha\nu}$ où A et B sont des tenseurs. On a

$$A'^{\mu\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma} A^{\rho\sigma} \quad \text{et} \quad B'_{\alpha\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} B_{\lambda\kappa}$$

et donc, en mettant tout ça ensemble, et en prenant en compte le fait que

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma} = \delta^\lambda_\sigma$$

on arrive à

$$A'^{\mu\alpha} B'_{\alpha\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} A^{\rho\lambda} B_{\lambda\kappa}$$

3.4 Théorème du quotient

Si une quantité de la forme $A^{\mu\alpha}_{\beta\nu} B_{\alpha\kappa}$ est un tenseur, et si B est un tenseur, alors on peut montrer que nécessairement l'objet A est lui-même un tenseur.

4 La connexion affine n'est pas un tenseur

Calculer la connexion affine $\Gamma'_{\mu\nu}{}^\alpha$ après un changement de coordonnées

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}]$$

Il faut déterminer comment $g_{\mu\nu,\alpha}$ se transforme par changement de coordonnées. Or, pour tout tenseur $A_{\mu\nu}$,

$$A'_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_{\alpha\beta} \right]$$

soit

$$A'_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\rho \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu} A_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x'^\rho}$$

Dans le dernier terme on peut écrire

$$\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}$$

et le dernier terme s'écrit donc

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} A_{\alpha\beta,\sigma}$$

On le notera [cov] dans la suite, c'est la partie covariante de la dérivée recherchée (seul ce terme est présent si cette dérivée est un tenseur). On a donc

$$A'_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\rho \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu} A_{\alpha\beta} + [\text{cov}]$$

ce qui donne, en l'appliquant à g et en remplaçant les dérivées de g par leur valeur dans l'expression de Γ (deux simplifications deux à deux),

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta} \left[\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right] g_{\kappa\sigma} + [\text{cov}]$$

Or, le terme

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\kappa$$

ce qui permet d'écrire

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} g_{\beta\sigma} + [\text{cov}]$$

soit en utilisant le fait que

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} = \delta_\sigma^\alpha$$

on trouve

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + [\text{cov}]$$

Ce n'est donc pas un tenseur. D'ailleurs, on peut annuler la connexion affine en un point, en se plaçant dans le référentiel localement inertiel, ce qui ne serait pas possible avec un tenseur.

On peut remarquer que la formule qu'on a obtenue ci-dessus donne [cov] = 0 lorsque le référentiel initial est inertiel (on avait noté ξ^μ les x^μ), soit

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$$

ce qui avait constitué notre point de départ pour introduire cette grandeur.

5 Dérivée covariante

5.1 Gradient d'un scalaire

On a montré au paragraphe 2.3 que si φ est un champ scalaire, alors son gradient quadridimensionnel $\partial_\mu \phi$ est un tenseur covariant de rang 1, c'est-à-dire un vecteur.

5.2 Dérivée d'un vecteur

Calcul de la dérivée d'un vecteur dans une nouvelle base, ce n'est pas un vecteur.

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V_\alpha$$

La dérivée par rapport à x'^ν s'écrit $V'_{\mu;\nu}$, et elle vaut

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V_\alpha \right) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} V_\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$$

Si la quantité était covariante, on n'aurait que le dernier terme. Dans tous les calculs suivants, on va noter [cov] la partie covariante des expressions obtenues.

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\alpha + [\text{cov}]$$

5.3 Dérivée covariante

En revanche, on peut définir un vecteur à partir de $V_{\mu;\nu}$, selon

$$V_{\mu;\nu} \equiv V_{\mu;\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta V_\beta$$

En effet, cette quantité se transforme selon (en utilisant les transformées de Γ et de V)

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\alpha - \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \times \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} V_\sigma + [\text{cov}]$$

En utilisant le fait que

$$\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} = \delta_\alpha^\sigma$$

les deux premiers termes de la somme s'annulent et on arrive à

$$V'_{\mu;\nu} = [\text{cov}]$$

C'est une quantité covariante, appelée « dérivée covariante » et notée

$$D_\nu A_\mu \equiv \nabla_\nu A_\mu \equiv A_{\mu;\nu} \equiv \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\beta A_\beta$$

Pour obtenir l'expression équivalente pour un tenseur contravariant, on écrit que $A_\mu A^\mu$ est un scalaire, et que $\partial_\nu (A_\mu A^\mu)$ est un vecteur. On trouve que

$$D_\nu A^\mu \equiv \nabla_\nu A^\mu \equiv A^\mu{}_{;\nu} \equiv \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha$$

Propriété : la dérivée covariante se réduit à la dérivée simple dans le référentiel localement inertiel. Ceci fournira un moyen puissant pour prendre en compte les effets de la gravitation.

5.4 Divergence covariante

5.5 Généralisation aux tenseurs de rang plus élevé

Par exemple,

$$A^{\mu\nu}_{\sigma;\beta} = A^{\mu\nu}_{\sigma,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha\nu}_{\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} A^{\mu\alpha}_{\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} A^{\mu\nu}_{\alpha}$$

5.6 Transport parallèle

Le transport parallèle est défini par

$$A^{\mu}_{;\nu} = 0$$

soit

$$\partial_{\nu} A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} A^{\alpha}$$

Le vecteur A^{μ} est donc changé de

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} A^{\alpha} dx^{\nu}$$

au cours d'un transport parallèle dans la direction donnée par dx^{ν} .

6 Tenseur de courbure

6.1 Construire un tenseur à partir des dérivées de $g_{\mu\nu}$

À partir de $g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\alpha}$, on ne peut construire que des tenseurs qui ne dépendent que de $g_{\mu\nu}$.

À partir des dérivées secondes de g , on obtient (avec les signes de Hobson et Rindler)

$$\boxed{R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \Gamma^{\eta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\eta} \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}} \quad (3.11)$$

C'est le tenseur de courbure, qu'on appelle aussi tenseur de Riemann. On ne va pas adopter cette approche ici, c'est calculatoire et le calcul est assez opaque.

6.2 Tenseur de courbure et commutation des dérivées covariantes

On va plutôt montrer qu'un tenseur construit à partir des dérivées secondes de g intervient lorsque l'on calcule le commutateur de dérivées covariantes

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V_{\alpha} = R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} V_{\beta} \quad (3.12)$$

[calcul ; on a besoin de la dérivée covariante d'un tenseur de rang 2]

Or, le terme de gauche est un tenseur, et V aussi. Le théorème du quotient indique donc que R est aussi un tenseur.

6.3 Tenseur de courbure et transport parallèle

Ce tenseur intervient aussi dans la situation suivante. On considère un petit chemin, constitué de deux branches $x \rightarrow x + dx^{\nu} \rightarrow x + dx^{\nu} + dx^{\alpha}$ et $x \rightarrow x + dx^{\alpha} \rightarrow x + dx^{\alpha} + dx^{\nu}$. On considère un vecteur V^{μ} que

l'on transporte parallèlement le long de ces deux branches. En général, les deux vecteurs obtenus ne sont pas parallèles. En effet, par le premier transport $x \rightarrow x + dx^\nu$,

$$V^\rho \rightarrow V^\rho(x + dx^\nu) = V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\mu dx^\nu \quad (3.13)$$

puis

$$V^\rho(x + dx^\nu) \rightarrow (V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\mu dx^\nu) - \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho(x + dx^\nu) \times (V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\mu dx^\nu) dx^\alpha \quad (3.14)$$

(pas de somme sur ν), soit

$$V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\mu dx^\nu - (\Gamma_{\sigma\alpha}^\rho + \Gamma_{\sigma\alpha,\nu}^\rho dx^\nu) \times (V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\mu dx^\nu) dx^\alpha \quad (3.15)$$

soit

$$V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\mu dx^\nu - \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho V^\sigma dx^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha,\nu}^\rho V^\sigma dx^\nu dx^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\mu dx^\nu dx^\alpha \quad (3.16)$$

En parcourant la boucle par l'autre branche, on obtient ($\nu \leftrightarrow \alpha$)

$$V^\rho - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho V^\mu dx^\alpha - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho V^\sigma dx^\nu - \Gamma_{\sigma\nu,\alpha}^\rho V^\sigma dx^\alpha dx^\nu + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma V^\mu dx^\alpha dx^\nu \quad (3.17)$$

La différence entre les deux vecteurs s'écrit

$$\delta V^\rho = R_{\mu\nu\alpha}^\rho V^\mu dx^\alpha dx^\nu \quad (3.18)$$

où l'on voit apparaître le tenseur de courbure introduit au paragraphe précédent. En ajoutant une multitude de petits carrés du type précédent, on montre que sur un chemin de forme quelconque,

$$\delta V^\rho = R_{\mu\nu\alpha}^\rho V^\mu dS \quad (3.19)$$

6.4 Expression de R en fonction des dérivées secondes de g

Un calcul long et pénible permet de montrer que (écrit de trois manières équivalentes)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\beta\nu}) - g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\sigma\alpha\mu} \Gamma_{\rho\beta\nu} - \Gamma_{\sigma\alpha\nu} \Gamma_{\rho\beta\mu})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) - g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\sigma\alpha\mu} \Gamma_{\rho\beta\nu} - \Gamma_{\sigma\alpha\nu} \Gamma_{\rho\beta\mu})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\beta\mu,\nu\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu\beta} + g_{\alpha\nu,\mu\beta} - g_{\beta\nu,\mu\alpha}) - g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\sigma\alpha\mu} \Gamma_{\rho\beta\nu} - \Gamma_{\sigma\alpha\nu} \Gamma_{\rho\beta\mu})$$

6.5 Symétries de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$

Le tenseur $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ est antisymétrique sous l'échange des deux premiers ou des deux derniers indices, et symétrique sous l'échange des blocs $\mu\nu$ et $\alpha\beta$,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (3.20)$$

Il vérifie aussi des identités cycliques que l'on peut démontrer en se plaçant dans un référentiel localement inertiel, pour lequel les Γ sont nuls. On a alors

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\beta\nu})$$

$$R_{\alpha\nu\beta\mu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\beta \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\beta \partial_\alpha g_{\nu\mu})$$

$$R_{\alpha\mu\nu\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\beta \partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta})$$

La somme de ces trois termes donne bien zéro,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

C'est une équation tensorielle, elle est donc valable de manière générale.

On en déduit le nombre de composantes indépendantes. En considérant $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ comme une matrice M_{ab} dont chaque indice a et b est un couple (α, β) ou (μ, ν) , les antisymétries indiquent que ces « indices » ne peuvent prendre que $N(N-1)/2$ valeurs indépendantes. La matrice M est donc une matrice $N(N-1)/2 \times N(N-1)/2$ symétrique, qui peut prendre

$$\frac{1}{2} \times \frac{N(N-1)}{2} \left(\frac{N(N-1)}{2} + 1 \right) = \frac{N(N-1)[N(N-1)+2]}{8}$$

valeurs indépendantes. Il faut retirer les

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}$$

conditions imposées par les identités cycliques. On notera en effet que lorsque deux des indices sont égaux, la condition de cyclicité se réduit à celle de symétrie et d'antisymétrie et n'apporte pas de contrainte supplémentaire. Il faut donc compter le nombre de manières de tirer au sort une liste non ordonnée de 4 parmi N . On arrive à

$$\frac{N^2(N^2-1)}{12}$$

composantes indépendantes, soit 0 pour $D = 1$, 1 pour $D = 2$, 6 pour $D = 3$ et 20 pour $D = 4$. On remarque que ce 20 est la différence entre les 80 coefficients dans le changement de coordonnées et les 100 contraintes dans la partie .

6.6 Identité de Bianchi

[Weinberg, section 6.8, p.146] Dans un référentiel localement inertiel, les Γ sont nuls et la dérivée covariante du tenseur de Riemann s'écrit

$$R_{\mu\nu\alpha\beta;\rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(-\frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) \quad (3.21)$$

d'où l'on déduit facilement (par permutations circulaires)

$$R_{\mu\nu\alpha\beta;\rho} + R_{\mu\nu\rho\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\rho;\alpha} = 0 \quad (3.22)$$

C'est l'identité de Bianchi. C'est une égalité tensorielle, elle est donc valable dans tout autre référentiel.

Hobson en donne une démo différente et plus concise [p. 161], en un point P où l'on se place dans le référentiel inertiel,

$$D_e R_{abcd} = \partial_e R_{abcd} = \partial_e \partial_c \Gamma_{abd} - \partial_e \partial_d \Gamma_{abc}$$

Avec les permutations circulaires sur c , d et e , on trouve le résultat recherché.

6.7 Tenseur de Ricci, courbure scalaire et tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$

On appelle **tenseur de Ricci** le tenseur défini par

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\nu\alpha}$$

et la **courbure scalaire** la quantité

$$R = R^\alpha_\alpha$$

En contractant l'équation de Bianchi (3.22) sur les indices μ et α , on montre que

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\mu} = 0 \quad (3.23)$$

Ce terme de divergence nulle de l'équation précédente est appelé tenseur d'Einstein,

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

Démonstration : l'équation (3.22) se réécrit

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta;\rho} + R^\mu_{\nu\rho\alpha;\beta} + R^\mu_{\nu\beta\rho;\alpha} = 0 \quad (3.24)$$

on contracte une première fois sur μ et β ,

$$R^\mu_{\nu\alpha\mu;\rho} + R^\mu_{\nu\rho\alpha;\mu} + R^\mu_{\nu\mu\rho;\alpha} = 0 \quad (3.25)$$

on utilise l'antisymétrie de R dans le dernier terme puis la définition de $R_{\alpha\beta}$,

$$R_{\nu\alpha;\rho} + R^\mu_{\nu\rho\alpha;\mu} - R_{\nu\rho;\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad R^\nu_{\alpha;\rho} + R^{\mu\nu}_{\rho\alpha;\mu} - R^\nu_{\rho;\alpha} = 0 \quad (3.26)$$

On contracte sur ν et ρ

$$R^\nu_{\alpha;\nu} + R^{\mu\nu}_{\nu\alpha;\mu} - R_{;\alpha} = 0 \quad (3.27)$$

les antisymétries dans le terme du milieu indiquent que

$$R^{\mu\nu}_{\nu\alpha;\mu} = R^{\nu\mu}_{\alpha\nu;\mu} = R^\mu_{\alpha;\mu} \quad (3.28)$$

et donc

$$2R^\nu_{\alpha;\nu} - R_{;\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad 2R^{\nu\alpha}_{;\nu} - g^{\nu\alpha}R_{;\nu} = 0 \quad (3.29)$$

6.8 Exemples

Calcul de ce tenseur pour un espace plat en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires, on part de

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.30)$$

On a vu dans le paragraphe 2.4 que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad (3.32)$$

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^r_{r\theta} = 0, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad (3.33)$$

ce qui donne pour seules dérivées non nulles

$$\Gamma^\theta_{r\theta,r} = \Gamma^\theta_{\theta r,r} = -\frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad \Gamma^r_{\theta\theta,r} = -1 \quad (3.34)$$

ce qui conduit à

$$R^r_{ijr} = R^r_{ij\theta} = R^\theta_{ijr} = R^\theta_{ij\theta} = 0 \quad (3.35)$$

Calcul similaire pour la sphère 2D, on part de

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.36)$$

ce qui donne

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^{ij} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

et

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} = \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0 \quad (3.38)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = 0, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (3.39)$$

et les dérivées non nulles

$$\Gamma_{\theta\phi,\theta}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta,\theta}^{\phi} = -\frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad \Gamma_{\phi\phi,\theta}^{\theta} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (3.40)$$

7 La déviation des géodésiques

8 Le principe de covariance

9 Exemples

9.1 Référentiel en rotation

9.2 Référentiel uniformément accéléré

4. Équations d'Einstein

1 Introduction

Nous avons vu comment prendre en compte les effets de la courbure dans les équations de la physique. Il reste maintenant à écrire les équations qui déterminent cette courbure. Il ne sera pas question de démontrer ces équations, pas plus qu'on ne peut démontrer les équations de Newton. La validité des équations reposera sur leur cohérence théorique et la comparaison de leurs prédictions avec les expériences. Il y a beaucoup de choix a priori possibles, la relativité générale constitue l'un d'entre eux. Nous allons nous laisser guider par la physique newtonienne, qui doit constituer la limite non relativiste des équations de la relativité.

En mécanique newtonienne, le champ gravitationnel est déterminé par l'équation

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (4.1)$$

où ρ désigne la masse volumique. On a vu aussi que Φ s'identifiait à $(g_{00} - 1)c^2/2$ dans la limite newtonienne. Il semble donc naturel de chercher une équation relativiste reliant des tenseurs faisant intervenir des dérivées secondes de g . Nous allons voir que l'on doit alors faire intervenir la courbure.

On peut remarquer que la densité volumique d'énergie ρ n'est pas un scalaire. Elle se transforme en $\gamma^2\rho$ lorsque l'on passe d'une situation au repos à un boost (en effet, au cours d'une transformation de Lorentz, les énergies se transforment selon $E \rightarrow \gamma E$ et les volumes selon $V \rightarrow V/\gamma$). C'est la marque que c'est une composante 00 d'un tenseur de rang 2 (pour la densité volumique de charge, on trouve $\gamma\rho$).

2 Le tenseur énergie-impulsion

En relativité restreinte, on peut exprimer la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie sous une forme tensorielle, en écrivant

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

où $T^{\mu\nu}$ désigne un tenseur de rang 2, dont l'expression dépend du système physique considéré.

2.1 Une particule

La quantité de mouvement et l'énergie sont des composantes du quadri-vecteur quantité de mouvement p^μ . La densité de courant de p^μ est représentée par le tenseur énergie-impulsion, qui s'écrit pour une particule ponctuelle localisée en $\vec{x}_0(t)$,

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}) = \frac{p^\mu p^\nu}{E} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0(t))$$

2.2 Fluide parfait

Pour un fluide parfait, on a

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

où p désigne la pression et ρ la densité volumique d'énergie. Cette expression est particulièrement utile en cosmologie.

2.3 Électromagnétisme

Pour le champ électromagnétique,

$$T^{\mu\nu} = F^\mu_\alpha F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad \text{où} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

3 Les équations d'Einstein

3.1 Énoncé

La relativité générale est basée sur le principe

$$G^{\mu\nu} = KT^{\mu\nu} \quad \text{ou} \quad R_{\mu\nu} = K \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda \right)$$

où K désigne une constante fondamentale. Pour obtenir la seconde équation à partir de la première, on utilise $G^\mu_\mu = -R$. On détermine la constante K en examinant la composante 00 de cette équation dans la limite non-relativiste,

$$R_{00} = K \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) \quad (4.2)$$

Dans la limite des champs statiques et faibles, on pose $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Un seul terme contribue à R_{00} , il s'écrit

$$R_{00} = R^\alpha_{00\alpha} = \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} - \Gamma^\alpha_{00,\alpha} + \mathcal{O}(h^2) = -\Gamma^i_{00,i}$$

Or, dans la limite des champs statiques faibles, on a

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\eta^{i\ell} (h_{\ell j,k} + h_{\ell k,j} - h_{jk,\ell})$$

soit pour la composante 00,

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{i\ell} h_{00,\ell} = \frac{1}{2}\delta^i_\ell h_{00,\ell}$$

et donc

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\Delta h_{00} \approx -\frac{1}{c^2}\Delta\Phi$$

Par ailleurs, avec $T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$, on a $T_{00} \approx \rho c^2$ dans la limite non relativiste, car $p \sim \rho\langle v^2 \rangle/3$ et donc $p/c^2 \sim \rho(v/c)^2 \ll \rho$. On a aussi $T \approx \rho c^2$ pour la même raison ($u^i \ll u^0$), ce qui donne

$$\frac{1}{c^2}\Delta\Phi = -\frac{K}{2}\rho c^2$$

L'équation de Poisson s'écrit $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, et l'on trouve que $K = -8\pi G/c^4$ où G désigne la constante de Newton.

On peut alors réécrire les équations d'Einstein sous la forme

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda\right)} \quad (4.3)$$

Résumé des équations, c'est non linéaire et en général très compliqué à résoudre. Bien noter qu'il y a du $g_{\mu\nu}$ dans $T_{\mu\nu}$! Très peu de solutions analytiques.

3.2 Équations dans le vide

Nous allons principalement chercher des solutions de ces équations à l'extérieur des sources de gravitation, c'est-à-dire dans des régions où $T^{\mu\nu} = 0$. On a alors

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.4)$$

On peut remarquer qu'en dimension 2, 3 ou 4, cette écriture représente respectivement 3, 6 et 10 équations, alors que le tenseur de Riemann possède 1, 6 et 20 composantes. En dimension 2 ou 3, la nullité du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ impose celle du tenseur de Riemann $R^\lambda{}_{\mu\nu\alpha}$: il n'y a pas de champ gravitationnel dans le vide !

Remarque sur la topologie, cf cordes cosmiques autour desquelles la métrique est plate mais il y a un déficit d'angle, ce qui donne à l'ensemble la topologie d'un cône. La courbure est en fait localisée à la pointe. On a un effet du type Bohm-Aharanov, cette courbure localisée affecte la physique des objets qui se propagent dans des régions où le champ gravitationnel est nul.

3.3 Constante cosmologique

On peut ajouter un terme proportionnel à $g^{\mu\nu}$ au terme de gauche (ou de droite), car

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

On le montre en se plaçant dans un référentiel inertiel, où

$$\eta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu} \right) \quad (4.6)$$

ce qui signifie qu'il est impossible de distinguer entre une modification de la structure fondamentale des lois de la gravitation (terme Λ dans le membre de gauche) et une source de champ gravitationnel nouvelle (terme Λ dans le membre de droite).

L'effet de Λ se traduit sur les équations newtoniennes par

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2$$

et

$$-\vec{\nabla}\Phi = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r + \frac{c^2\Lambda r}{3}\vec{u}_r$$

Discuter l'histoire de cette notion, l'importance en cosmologie et le lien avec la pression négative.

4 Solution cosmologique

Le cas le plus simple est celui que l'on rencontre en cosmologie, où l'univers est supposé homogène et isotrope (principe cosmologique). Ces symétries permettent de résoudre le problème, cf cours de cosmo. Donner la valeur numérique en J/m^3 .

5 La solution de Schwarzschild

5.1 Métrique d'un espace statique invariant par rotation

[Weinberg] Pour être invariante par rotation, la partie spatiale de la métrique ne doit dépendre que de $r^2 \equiv \vec{x} \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \cdot d\vec{x}$ et $d\vec{x} \cdot d\vec{x}$. Du coup,

$$ds^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dt \vec{x} \cdot d\vec{x} - D(r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - C(r)d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (4.7)$$

En coordonnées sphériques, ceci devient

$$ds^2 = F(r)dt^2 - 2rE(r)dt dr - r^2D(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.8)$$

En posant $t \equiv t' + \Phi(r)$ avec $\Phi' = rE/F$, on peut éliminer le terme en dr/dt . En redéfinissant le rayon en $\sqrt{C}r \rightarrow r$, on arrive à la métrique isotrope sous sa forme standard (où t' a été noté t)

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.9)$$

Il faut bien noter que les variables t et r n'ont aucune raison a priori de représenter le temps et le rayon. On tire de cette expression les composantes du tenseur métrique

$$g_{tt} = B(r), \quad g_{rr} = -A(r), \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\phi\phi} = -r^2\sin^2\theta \quad (4.10)$$

et

$$g^{tt} = \frac{1}{B(r)}, \quad g^{rr} = -\frac{1}{A(r)}, \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \quad (4.11)$$

Les connexions affines sont obtenues d'après la définition

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (4.12)$$

Les composantes non nulles valent

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2A} \frac{dA}{dr}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r\sin^2\theta}{A}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2A} \frac{dB}{dr} \quad (4.13)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (4.15)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB}{dr} \quad (4.16)$$

Et pour finir, le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \quad (4.17)$$

donne les composantes

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \quad (4.18)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{A} \quad (4.19)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (4.20)$$

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} \quad (4.21)$$

5.2 Détermination des fonctions $A(r)$ et $B(r)$

On écrit que $R_{\mu\nu} = 0$, ce qui donne quatre équations, en fait trois car celle en $R_{\phi\phi}$ est équivalente à celle en $R_{\theta\theta}$. On remarque que

$$R_{rr} + \frac{A}{B} R_{tt} = 0 = -\frac{A'}{rA} - \frac{B'}{rB}$$

ce qui indique que la fonction AB est une constante. Lorsque $r \rightarrow \infty$, cette grandeur vaut c^2 , et donc

$$A = \frac{c^2}{B}$$

Les composantes de la courbure se réécrivent alors

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{A'}{rA} \quad (4.22)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 - \frac{rA'}{A^2} + \frac{1}{A} = 0 \quad (4.23)$$

L'équation 4.23 se résoud en

$$A(r) = \frac{1}{1 - a/r} \quad (4.24)$$

où a désigne une constante d'intégration. Démonstration : l'équation sur A se réécrit

$$\frac{dA}{A(1-A)} = \frac{dr}{r}$$

or

$$\frac{1}{A(1-A)} = \frac{1}{A} - \frac{1}{1-A}$$

soit

$$\ln \frac{A}{A-1} = k + \ln r$$

ce qui conduit ensuite directement au résultat.

On arrive donc à la **métrique de Schwarzschild**

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Pour que g_{00} tende dans la limite newtonienne vers $(1 + 2\Phi/c^2)$, il faut que $a = 2GM/c^2$, soit

$$\boxed{ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2} \quad (4.25)$$

Cette équation va jouer un rôle extrêmement important dans la suite. Le rayon a est appelé **rayon de Schwarzschild**, il ne dépend que de la masse M et vaut numériquement

$$a \equiv \frac{2GM}{c^2} = 2,97 \text{ km} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$$

Discuter les singularités en $r = 0$ et $r = a$.

Exercice : tout refaire en dimension 2+1

Remarque : le g_{00} semble donné par la même expression que ce qu'on obtenu précédemment dans la limite des champs faibles, c'est-à-dire par le potentiel newtonien. Ce n'est pas le cas, car le r qui intervient n'est qu'une coordonnée radiale, ce n'est pas une distance !

5.3 Autres formes de la métrique

Les quantités t , r , θ et ϕ qui interviennent dans cette métrique sont des coordonnées qui n'ont pas forcément de signification physique nette (on a fait plusieurs changements de variables compliqués pour arriver à cette forme). D'autres coordonnées donnent d'autres formes, par exemple, en posant

$$\bar{r} = \left(1 + \frac{GM}{2r} \right) r$$

on arrive à la forme dite isotrope

$$ds^2 = \left(\frac{1 - GM/2\bar{r}}{1 + GM/2\bar{r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{2\bar{r}} \right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

5.4 Théorème de Birkhoff

La géométrie de l'espace-temps dans le vide, dans un problème à symétrie sphérique, est donnée par la métrique de Schwarzschild, même lorsque l'on n'impose pas l'invariance selon t . Ceci indique notamment que l'on ne peut pas détecter de façon gravitationnelle les pulsations radiales d'une distribution de masse. Ceci indique aussi dans une sphère vide placée dans un Univers en expansion, avec une étoile au centre, la métrique est celle de Schwarzschild, en particulier elle est statique.

[cf Rindler]

5.5 Géométrie de l'espace

[cf Rindler]

La géométrie de l'espace est décrite par

$$d\ell^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

La distance radiale R est reliée à r par

$$R = \int d\ell = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - a/r}} > r$$

Lorsque $r \gg a$, on peut calculer la distance radiale entre deux points situés sur un même rayon,

$$R = \int_{r_1}^{r_2} dl \approx \int \left(1 + \frac{a}{2r}\right) dr = (r_2 - r_1) + \frac{a}{2} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

En utilisant $r \approx R$ pour le calcul du terme correctif, on trouve que la distance Terre-Soleil est plus longue de 15,94 km que dans un espace plat.

Le périmètre d'un cercle de rayon R est quant à lui donné par

$$C = \int_0^{2\pi} r d\phi = 2\pi r < 2\pi R$$

ce qui indique que la géométrie de l'espace n'est pas plate. On peut représenter des cercles de périmètre $2\pi r$ dont le rayon est supérieur à r en les plaçant sur une surface courbe. Déterminons la forme de la surface de révolution qui aurait la même propriété géométrique. Dans le plan (r, z) , on aurait

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - a/r} \quad \text{et} \quad d\ell^2 = dr^2 + dz^2$$

ce qui se réarrange en

$$dz = \frac{dr}{\sqrt{r/a - 1}}$$

et s'intègre en

$$z = 2a\sqrt{\frac{r}{a} - 1} \quad \text{soit} \quad z^2 = 4a(r - a)$$

C'est un paraboloïde de révolution.

6 Le principe de Mach

Lire l'article de Brans-Dicke ! Cf aussi l'intro de Ciufolini & Wheeler.

6.1 Le seau de Newton et le principe de Mach

6.2 L'origine de l'inertie en RG

6.3 Retour sur le seau de Newton

7 Le principe de moindre action

Les équations d'Einstein peuvent s'écrire sous forme lagrangienne, avec

$$S = \int \sqrt{g} R d^4x$$

Les équations du mouvement peuvent elles aussi s'écrire sous une forme similaire avec

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

8 D'autres équations du champ gravitationnel

8.1 Des alternatives à la RG

On peut imaginer de nombreuses équations déterminant la courbure de l'espace-temps. Du moment que celles-ci fixent la métrique, le principe d'équivalence sera vérifié, et la théorie est en principe cohérente. On parle alors de théorie métrique de la gravitation. La question de la validité d'une théorie métrique est expérimentale, voir la suite.

8.2 Théorie scalaire de la gravité

[Hobson, Appendice 8A, p. 191]

8.3 La gravitation selon Brans-Dicke (1961)

[Hobson, Appendice 8A ; Weinberg]

8.4 TeVeS

Des théories plus complexes ont aussi été proposées, par exemple pour fournir un support théoriques aux propositions du type MOND (Modified Newtonian Dynamics), une théorie appelée TeVeS (pour Tenseur-Vecteur-Scalaire) est actuellement étudiée et mise à l'épreuve des observations.

8.5 Termes plus élevés en puissances du tenseur de courbure R

8.6 Torsion

8.7 Les paramètres post-newtoniens

Développement de la métrique en puissances de GM/r .

9 Autres métriques

On peut reprendre les calculs qui précèdent en relâchant les hypothèses, pour obtenir la métrique autour d'une masse en rotation (métrique de Kerr), autour d'une corde cosmique (invariance par rotation autour de l'axe z et par translation de long de z).

5. Mouvements relativistes et tests expérimentaux

On va écrire les lois du mouvement dans la métrique de Schwarzschild, et les appliquer pour étudier plusieurs systèmes. D'une part, l'étude de la trajectoire d'un corps massif autour du Soleil fournit un premier test de la relativité générale. D'autre part, l'étude de la propagation de la lumière s'applique à plusieurs situations physiques intéressantes.

1 Des équations des géodésiques aux équations du mouvement

1.1 Paramètre affine

Il y a une subtilité dans l'équation des géodésiques, elle n'est valable sous cette forme que pour certains paramètres α appelés paramètres affines. Dans le cas d'un corps massif, on a vu au premier chapitre que l'équation des géodésiques découle du principe d'équivalence avec $\sigma \equiv \tau$. Si l'on effectue un reparamétrage $\tau \rightarrow \sigma$ de la courbe, on s'aperçoit que l'équation des géodésiques ne garde cette forme que si $\sigma = a\tau + b$. Pour un corps de masse nulle, la question se pose différemment, car on ne peut pas utiliser le temps propre pour paramétrer la courbe car il n'y a pas de référentiel dans lequel la particule est au repos, ni l'intervalle ds , celui-ci étant constant au cours du mouvement. On peut montrer que l'équation des géodésiques reste valable pour certaines paramétrisations, que l'on appelle paramètre affine.

Une géodésique est définie par le fait que le vecteur tangent à la trajectoire est transporté parallèlement, au cours de la trajectoire, c'est-à-dire que

$$\frac{dt^\mu}{d\sigma} = \lambda(\sigma)t^\mu$$

Le choix de paramètre tel que $\lambda(\sigma) = 0$ est appelé paramètre affine.

1.2 Intégrales premières du mouvement

On a calculé les $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, qui permettent d'obtenir les équations du mouvement à partir de l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$$

On obtient quatre équations, une pour chaque indice λ , soit en notant avec des points les dérivées par rapport à σ ,

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{B'}{B} \dot{r} \dot{t} &= 0 \\ \ddot{r} + \frac{A'}{2A} \dot{r}^2 - \frac{r}{A} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A} \dot{\phi}^2 + \frac{B'}{2A} \dot{t}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} &= \dots \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cotan \theta \dot{\phi} \dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Nous allons aussi nous placer dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$, ce qui simplifie les équations en

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{B'}{B} \dot{r} \dot{t} &= 0 \\ \ddot{r} + \frac{A'}{2A} \dot{r}^2 - \frac{r \dot{\phi}^2}{A} + \frac{B'}{2A} \dot{t}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations peuvent s'intégrer pour fournir des relations entre les dérivées premières. Elles sont équivalentes à

$$\frac{d}{d\sigma} [\ln \dot{t} + \ln B] = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{B \dot{t} = k c^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{t} = k}$$

où l'on a introduit le facteur c^2 pour simplifier les notations ultérieures. D'autre part, on montre aussi que

$$A \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2 c^4}{B} = k' \quad (5.1)$$

$$\boxed{r^2 \dot{\phi} = h}$$

où l'on a noté h le moment cinétique du système étudié (lorsque $r \rightarrow \infty$, les variables r et ϕ se confondent avec le rayon et l'angle azimutal, et h a bien cette signification physique). On a utilisé la définition de h dans la première équation.

La constante k' qui figure dans l'équation (5.1) peut être déterminée en remarquant que les coordonnées obéissent à la relation

$$ds^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

soit

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2$$

Or on peut choisir $\sigma = \tau = s/c^2$ pour les particules massives, et on a $ds = 0$ pour les particules sans masse, ce qui donne

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \begin{cases} c^2 \\ 0 \end{cases}$$

Cette relation s'écrit

$$B \dot{t}^2 - A \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = \begin{cases} c^2 \\ 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

La constante k' est égale à $-c^2$ pour des particules massives et 0 pour des particules de masse nulle. L'équation 5.1 s'écrit donc

$$A \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2 c^4}{B} = \begin{cases} -c^2 \\ 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

soit en divisant par A et en remarquant que $AB = c^2$,

$$\boxed{\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{h^2}{r^2} - k^2 c^2 = \begin{cases} -c^2 + 2GM/r \\ 0 \end{cases}} \quad (5.4)$$

Remarque : en mécanique newtonienne, la conservation de l'énergie pour une particule de masse m s'écrit

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{cte} \quad \text{soit} \quad v^2 - \frac{2GM}{r} = \text{cte}$$

Or, $\vec{r} = r \vec{u}_r$, soit $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\phi}\vec{u}_\phi$ et

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\vec{u}_\phi$$

Si la force est radiale, la seconde parenthèse est nulle, ce qui indique que $r^2\dot{\phi} = h$. On a alors

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

et donc

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = \text{cte}$$

L'équation de conservation de l'énergie possède de fortes similitudes avec l'équation obtenue plus haut sur r . Le terme h^2/r^2 correspond à un terme centrifuge.

1.3 Interprétation des constantes k et h

Les constantes k et h sont des intégrales premières du mouvement. Comme en mécanique classique, on les appelle respectivement l'énergie et le moment cinétique. On pourrait montrer, par une approche lagrangienne, que ce sont bien les quantités associés à l'invariance par translation dans le temps et par rotation, via le théorème de Noether.

On peut remarquer que lorsque la particule peut se trouver dans des régions situées à l'infini, là où la métrique est plate et où les coordonnées ont bien le sens physique usuel, on trouve

$$\frac{dt}{d\sigma} = k$$

Or, loin du corps attracteur, le paramètre affine peut être choisi comme $\sigma = \tau$ pour un corps massif, c'est-à-dire $k = dt/d\tau = \gamma = E/mc^2$. C'est l'énergie rapportée à l'énergie de masse. C'est aussi le facteur de Lorentz, lorsque la particule atteint d'infini (si elle l'atteint).

1.4 Trajectoire dans le cas où $h \neq 0$

Dans l'équation 5.4, on utilise, si $h \neq 0$,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$$

ce qui donne

$$\frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - k^2 c^2 = \begin{cases} -c^2 + 2GM/r \\ 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

On pose $u = 1/r$, on remplace et on dérive par rapport à ϕ , on trouve

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3\frac{GM}{c^2}u^2 + \begin{cases} GM/h^2 \\ 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

C'est une des formules de Binet, avec le terme $3GMu^2/c^2$ supplémentaire par rapport au cas newtonien.

2 Précession du périhélie des planètes

2.1 Calcul

Le calcul sera effectué en TD. On trouve pour une révolution,

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{R(1-e^2)c^2}$$

où R désigne le demi-grand axe de l'ellipse et e l'ellipticité. Pour une trajectoire presque circulaire de rayon R , $\Delta\phi \approx 3\pi a/R$.

2.2 Discussion

Pour Mercure, $a = 5,9 \times 10^{10}$ m, $e = 0,2$ et la période vaut 88 jours. On obtient $\Delta\phi = 43''$ par siècle.

L'avance du périhélie de Mercure a été découverte en 1859 par Urbain Le Verrier (1811–1877), découvreur de Neptune.

Résultats et discussion. Une difficulté se présente lorsque l'on veut comparer cette valeur à la valeur observée, d'autres facteurs contribuent à cette avance du périhélie. La valeur observée vaut environ $5599,7''$, dont la majeure contribution ($5026''$) vient du mouvement du point vernal, utilisé comme référence pour repérer le mouvement des astres, et la principale partie du reste ($531''$) s'explique par les perturbations dues aux autres planètes et par l'aplatissement du Soleil. [Éléments historiques dans le cas de Mercure]. On a longtemps supposé que les 43 secondes d'arc de différence entre la valeur mesurée et la valeur calculée pouvaient indiquer la présence de corps perturbateurs à l'intérieur de l'orbite de Mercure. En fait non, c'est un effet relativiste.

Pour d'autres corps, 8,6 pour Vénus, 3,8 pour la Terre, 10,3 pour Icarus.

3 La déviation de la lumière – l'expérience d'Eddington (1919)

3.1 Calcul

On considère un rayon lumineux qui se propage dans une métrique de Schwarzschild, son mouvement obéit à l'équation

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3\frac{GM}{c^2}u^2$$

Lorsque les distances en jeu sont grandes devant le rayon de Schwarzschild, on peut considérer que GM/rc^2 est un petit paramètre et traiter le problème de façon perturbative. On pose

$$u(\phi) = u^{(0)} + u^{(1)}$$

où $u^{(1)}/u^{(0)} \sim GM/rc^2$. En injectant dans l'équation, et en conservant les termes d'un ordre donné, on arrive à

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{3GM}{c^2}(u^{(0)})^2$$

c'est-à-dire

$$u^{(0)} = b \sin \phi$$

où $1/b \equiv r_0$ désigne la distance de moindre approche, aussi appelée paramètre d'impact (r est minimal quand $\sin \phi$ est maximal, soit pour $u^{(0)} = b$). Le choix de la seconde constante d'intégration (ϕ_0) correspond à une

variable angulaire ϕ qui vaut 0 dans la direction incidente ($r \rightarrow -\infty$ soit $u \rightarrow 0$). Cette équation décrit une droite passant à la distance $1/b$ de la source. La seconde équation donne

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{3GM}{r_0^2 c^2} \sin^2 \phi$$

On trouve facilement une solution particulière (la solution sans second membre est de la même forme que $u^{(0)}$),

$$u^{(1)} = \frac{3GM}{2r_0^2 c^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right)$$

et donc

$$u(\phi) \approx b \sin \phi + \frac{3GM}{2r_0^2 c^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right)$$

La demi-déviations est obtenue en calculant la valeur pour laquelle $u = 0$, ce qui donne dans la limite des petites déviations ($\sin \phi \approx \phi$ et $\cos(2\phi) \approx 1$),

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{r_0 c^2} = \frac{2a}{r_0}$$

ce qui donne pour le Soleil une déviation totale de $1,75''$ lorsque la distance d'approche est la plus petite possible, c'est-à-dire $r_0 = R_\odot$.

On rappelle que $a \approx 3$ km, $R_\odot \approx 700\,000$ km et $R_{TS} \approx 150 \times 10^6$ km $\approx 200R_\odot$.

Remarque, la déviation à 90° du Soleil est encore de l'ordre de 4 millisecondes d'arc (attention, on n'est plus dans la limite des petits angles).

3.2 Expérience d'Eddington

La déviation des rayons lumineux par le champ gravitationnel du Soleil fut mise en évidence par Arthur Eddington. Il observa l'éclipse de Soleil du 29 mai 1919 depuis l'île de Principe (au large du Gabon), et photographia la position des étoiles proches du Soleil dans le ciel. La comparaison de la position de ces étoiles avec des photographies prises en l'absence du Soleil lui permit de mettre en évidence un décalage de la position apparente d'environ 1,7 seconde d'arc, en accord avec la prédiction de la théorie d'Einstein. Cette mesure, dont la validité a été mise en doute du fait des grandes incertitudes expérimentales, a depuis été reprise sous plusieurs formes et l'accord avec la relativité générale a été confirmé avec une précision de l'ordre de 10^{-4} .

3.3 Mesures modernes

On utilise des sources radio intenses, que l'on peut voir le jour. On utilise aussi des relevés astrométriques sur tout le ciel.

3.4 Les lentilles gravitationnelles

Description de l'effet, utilisation en astrophysique et en cosmologie, décalage temporel des images, mirages gravitationnels, microlentilles gravitationnelles. Mesure du décalage temporel des images avec les quasars, mesure des paramètres cosmologiques.

4 L'effet Shapiro – le retard de l'écho radar

4.1 Calcul

On écrit l'équation du mouvement des photons,

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} - k^2 c^2 = 0 \quad (5.7)$$

on l'exprime en fonction de dr/dt , en utilisant la relation

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \dot{t} = \frac{dr}{dt} \frac{k}{1 - 2GM/rc^2}$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{k^2}{(1 - a/r)^2} + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} - k^2 c^2 = 0 \quad (5.8)$$

On élimine les constantes h et k en introduisant r_0 , la distance à laquelle $dr/dt = 0$, donnée par

$$\left(1 - \frac{a}{r_0}\right) \frac{h^2}{r_0^2} = k^2 c^2$$

soit

$$\frac{h^2}{k^2 c^2} = \frac{r_0^2}{1 - a/r_0}$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{1}{c^2(1 - a/r)^2} + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{r_0^2}{r^2(1 - a/r_0)} - 1 = 0 \quad (5.9)$$

ou

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \frac{r_0^2(1 - a/r)}{r^2(1 - a/r_0)} \quad (5.10)$$

soit

$$dt = \frac{dr}{c(1 - a/r)} \times \left\{1 - \frac{r_0^2(1 - a/r)}{r^2(1 - a/r_0)}\right\}^{-1/2} \quad (5.11)$$

Or, les quantités a/r et a/r_0 sont petites, on va les traiter comme des infiniment petits du premier ordre,

$$dt \approx \frac{dr}{c} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \left\{1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right)\right\}^{-1/2} \quad (5.12)$$

$$dt \approx \frac{dr}{c} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \left\{\frac{r^2 - r_0^2}{r^2} + a \frac{r_0^2}{r^2} \frac{r_0 - r}{rr_0}\right\}^{-1/2} \quad (5.13)$$

$$dt \approx \frac{dr}{c} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left\{1 - a \frac{r_0^2(r_0 - r)}{2rr_0(r^2 - r_0^2)}\right\} \quad (5.14)$$

$$dt \approx \frac{r dr}{c\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \left\{1 + a \frac{r_0}{2r(r + r_0)}\right\} \quad (5.15)$$

$$dt \approx \frac{r dr}{c\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left\{1 + \frac{a}{r} + \frac{ar_0}{2r(r + r_0)}\right\} \quad (5.16)$$

On trouve, après intégration,

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{1/2}}{c} + \frac{a}{c} \ln \left[\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \right] + \frac{a}{2c} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}$$

En effet

$$(\operatorname{argch} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

et

$$\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)' = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

On fait l'approximation $r \gg r_0$ et on calcule pour l'aller-retour entre la Terre et la planète.

$$\Delta t \approx \frac{2a}{c} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_R}{r_0^2} \right) + 1 \right] = \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_R}{r_0^2} \right) + 1 \right]$$

Or, on a

$$\Delta \tau = \left(1 - \frac{2GM}{r_E c^2} \right)^{1/2} \Delta t \approx \Delta t$$

Le calcul donne donc bien le décalage mesuré, il vaut environ $220 \mu\text{s}$ pour une onde qui se réfléchit sur la planète Vénus, avec $r_0 = R_\odot = 696\,000 \text{ km}$, $r_E = 1 \text{ UA}$, $r_V = 0,72 \text{ UA}$ et $GM/c^3 = 4,95 \mu\text{s}$.

4.2 Mesures

L'effet attendu, un retard de l'ordre de $200 \mu\text{s}$, correspond au temps mis par la lumière pour parcourir une dizaine de kilomètres. Parler des erreurs dues aux réflexions sur les différentes parties de la planète.

Ce test fut proposé en 1964 par Shapiro, et l'effet fut mesuré en 1968 (précision de 20 %) puis en 1971 (précision de 5 %), grâce à l'écho d'un signal radar envoyé sur Mercure et Vénus. Il vaut alors quelques centaines de microsecondes. Il a été ensuite mesuré avec une précision plus grande grâce à des transpondeurs placés sur des sondes spatiales (Viking en 1979, précision de 0,1 %). Ainsi, la sonde Cassini a permis de confirmer la valeur prédite par la relativité générale avec une précision de l'ordre de 10^{-5} .

5 Précession des gyroscopes

5.1 Effet Einstein–de Sitter

Transport parallèle d'un vecteur S^μ ,

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu S^\nu u^\sigma = 0$$

On va supposer que le corps est en orbite circulaire dans le plan équatorial autour d'un corps de masse M , c'est-à-dire que $u^r = \dot{r}$ et $u^\theta = \dot{\theta}$ sont nuls. On trouve

$$\frac{dS^t}{d\tau} + \Gamma^t_{rt} S^r u^t = 0$$

$$\frac{dS^r}{d\tau} + \Gamma^r_{\phi\phi} S^\phi u^\phi = 0$$

$$\frac{dS^\theta}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dS^\phi}{d\tau} + \Gamma_{r\phi}^\phi S^r u^\phi = 0$$

La quadrivitesse s'écrit $u^\mu = u^0(1, 0, 0, \Omega)$ avec $\Omega = d\phi/dt = (GM/r^3)^{1/2}$ et $u^0 = dt/d\tau = (1 - 3GM/r)^{-1/2}$.

Précession d'origine relativiste de l'axe de rotation d'un corps en orbite autour d'un objet massif. Lorsque l'orbite est circulaire de rayon r , la vitesse angulaire de précession est donnée par

$$\Omega = \frac{3c}{2r} \left(\frac{GM}{rc^2} \right)^{3/2} = \frac{3c}{2r} \left(\frac{a}{r} \right)^{3/2},$$

Cet effet est aussi appelé **précession géodésique** ou **précession géodétique** et est très semblable à la précession de Thomas. Lorsque l'objet massif attracteur est lui-même en rotation, une précession supplémentaire s'ajoute à l'effet Einstein-de Sitter. La précession géodésique fut prédite en 1916 par de Sitter, et vérifiée expérimentalement en 1988 avec une précision de l'ordre du pourcent, grâce à la mesure par télémétrie laser de l'évolution de l'axe de rotation du système Terre-Lune autour du Soleil (l'effet est d'environ 2 secondes d'arc par siècle).

[à suivre]

5.2 L'effet Lense-Thirring

Entraînement des référentiels, explication à la Wheeler en faisant intervenir la contribution des masses dans l'Univers au caractère inertiel d'un référentiel en un point donné.

5.3 La difficulté de la mesure terrestre

5.4 L'expérience Gravity Probe B

L'expérience Gravity Probe B devait mesurer l'effet Einstein-de Sitter et l'effet Lense-Thirring, grâce à des gyroscopes mis en orbite autour de la Terre (environ 6,6 secondes d'arc par an). Elle n'a pu mesurer que le premier, mais avec une précision de l'ordre de 1 %.

6 Les horloges autour de la Terre

Expérience de Hafele-Keating (1971) : les indications d'horloges atomiques embarquées à bord d'avions de ligne ayant voyagé autour de la Terre dans des directions opposées furent comparées à celles d'une autre horloge restée au sol. Cette expérience fournit une confirmation expérimentale de la dilatation relativiste des durées et du ralentissement des horloges dans un champ gravitationnel.

Attention, il y a une contribution purment cinématique à la différence des indications des horloges : du fait de la rotation de la Terre sur elle-même, la vitesse des avions par rapport à un référentiel galiléen est donnée par $V + v$ et $V - v$, où V désigne $R_\oplus \Omega_\oplus$, la vitesse de la surface de la Terre. Les facteurs de Lorentz pour les deux avions valent donc

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{(V \pm v)^2}{2c^2}$$

7 Le pulsar 1913+16

8 Utilisations de la RG

8.1 Le Global Positionning System (GPS)

8.2 L'expérience GRACE

6. Les trous noirs

Nous avons étudié les écarts de la métrique de Schwarzschild par rapport à la métrique de Minkowski, dans des situations où ces écarts sont faibles. Ce chapitre va s'intéresser à quelques aspects extrêmes de la métrique de Schwarzschild, qui se manifestent surtout lorsque l'on s'approche du rayon de Schwarzschild a , ce qui n'est possible que pour des objets compacts, des étoiles à neutrons ou mieux encore, des objets dont la masse est située en-deça de a , c'est-à-dire des trous noirs.

1 Le trou noir classique

Nous allons commencer par nous intéresser à quelques trajectoires simples (radiales et circulaires) dans la métrique de Schwarzschild. L'équation du mouvement est donnée par (5.4), en notant $a \equiv 2GM/c^2$ le rayon de Schwarzschild,

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} - k^2 c^2 = \begin{cases} -c^2 + ac^2/r = -c^2(1 - a/r) \\ 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

et la trajectoire par (5.6)

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2} a u^2 + \begin{cases} ac^2/2h^2 \\ 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

On se souviendra aussi que

$$\dot{t} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = k$$

1.1 Premières remarques

Singularité de la métrique en $r = a$. Toutefois, les tenseurs de courbure sont réguliers à cet endroit.

Un corps ne peut pas rester immobile pour $r < a$. En-deçà de a , les rôles de t et r sont inversés dans la métrique.

On définit la **compacité** d'un objet de rayon R comme $a/R = 2GM/Rc^2$. Lorsque ce paramètre devient égal à 1, l'objet est contenu dans son rayon de Schwarzschild, c'est un trou noir. Attention, ce n'est pas la densité qui importe. Un objet très peu dense peut être un trou noir s'il est suffisamment grand. En effet, $\rho = 3M/4\pi R^3$ et pour un trou noir, $M = Rc^2/2G$, soit

$$\rho = \frac{3c^2}{8\pi G R^2} = 3,28 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2$$
$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} = 3,28 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2$$

On peut noter que la masse volumique moyenne d'un trou noir est inférieure à celle de l'eau dès que $M \gtrsim 10^3 M_\odot$ et que pour un trou noir supermassif de quelques $10^6 M_\odot$ tel que celui du centre de notre galaxie, $\rho \sim 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

1.2 Trajectoires radiales de particules massives

[Hobson 9.6 et 9.7]

Pour des particules massives, on a

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{h^2}{r^2} - k^2 c^2 = -c^2 + \frac{ac^2}{r} \quad (6.3)$$

Pour une trajectoire radiale, $h = r^2 \dot{\phi} = 0$, ce qui donne

$$\dot{r}^2 = (k^2 - 1)c^2 + \frac{ac^2}{r} \quad (6.4)$$

En dérivant par rapport à τ , on arrive à

$$\ddot{r} = -\frac{ac^2}{2r^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (6.5)$$

C'est exactement la même forme que l'équation classique. Attention, ceci ne veut pas dire grand-chose en fait, car la coordonnée r n'est pas le rayon classique, et car \ddot{r} n'est pas l'accélération physique mais la dérivée de la coordonnée r par rapport au temps propre.

[calcul de $r(\tau)$ pour un corps lâché depuis l'infini avec une vitesse nulle]. On a $k = 1$ soit

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{ac^2}{r}} \quad (6.6)$$

ce qui se résout en

$$\tau = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{r_0^3}{ac^2}} - \sqrt{\frac{r^3}{ac^2}} \right) \quad (6.7)$$

où l'on a choisi comme origine des temps $r(\tau = 0) = r_0$. On voit que l'horizon est atteint en un temps propre fini.

[calcul de la trajectoire dans le plan des coordonnées (r, t)] On écrit

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -\sqrt{\frac{ac^2}{r}} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = -c\sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{r-a}{r}\right)$$

soit

$$c dt = -\frac{dr(r/a)^{3/2}}{r/a - 1}$$

On a besoin de calculer une intégrale de la forme

$$I = \int \frac{x^{3/2} dx}{x - 1}$$

ce qui se fait bien, par exemple en effectuant le changement de variables $u = \sqrt{x}$,

$$I = \int \frac{2u^4 du}{u^2 - 1}$$

En écrivant l'intégrand sous la forme

$$\frac{2u^4}{u^2-1} = \frac{2(u^2-1)(u^2+1)+2}{u^2-1} = 2(u^2+1) + \frac{2}{u^2-1}$$

En se souvenant de la primitive

$$(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

On trouve

$$\begin{aligned} t = & \frac{2a}{3c} \left(\sqrt{\frac{r_0^3}{a^3}} - \sqrt{\frac{r^3}{a^3}} \right) + \frac{2a}{c} \left(\sqrt{\frac{r_0}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \right) \\ & + \frac{a}{c} \ln \left| \left(\frac{\sqrt{r/a}+1}{\sqrt{r/a}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{r_0/a}-1}{\sqrt{r_0/a}+1} \right) \right| \end{aligned} \quad (6.8)$$

ou encore

$$t = \tau + \frac{4GM}{c^2} \left(\sqrt{\frac{r_0}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \right) + \frac{2GM}{c} \ln \left| \left(\frac{\sqrt{r/a}+1}{\sqrt{r/a}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{r_0/a}-1}{\sqrt{r_0/a}+1} \right) \right| \quad (6.9)$$

Lorsque $r \gg a$ et $r_0 \gg a$, on retrouve le cas newtonien.

[tracé de ces trajectoires dans le plan (r, t)]

[calcul de la vitesse dr'/dt' à la traversée de a , pour un observateur stationnaire à la coordonnée r]

$$dr' = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1/2} dr \quad \text{et} \quad dt' = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{1/2} dt$$

et donc

$$\frac{dr'}{dt'} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{dt} = -c \sqrt{\frac{a}{r}}$$

1.3 Trajectoires circulaires de particules massives

[Hobson 9.8]

On calcule

$$h^2 = \frac{ac^2 r^2}{2r-3a} \quad \text{et} \quad k = \frac{1-a/r}{(1-3a/2r)^{1/2}}$$

On s'aperçoit que l'on ne peut pas avoir $r < 3a/2$. Il existe un rayon minimal en-deçà duquel les orbites ne peuvent pas être circulaires.

[Calcul des orbites liées, pour lesquelles $k < 1$, c'est-à-dire $E < m_0 c^2$]

En posant $x \equiv a/r$, la relation $k < 1$ se traduit par

$$(1-x)^2 < 1 - \frac{3x}{2}$$

soit, après calcul, $x < 1/2$ ou $r > 2a$.

[loi des aires, calcul]

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \right)^2 = \frac{h^2}{r^4 k^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2$$

ce qui donne, en remplaçant h et k par leurs expressions,

$$\boxed{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \frac{GM}{r^3}}$$

[stabilité des orbites] On introduit le potentiel effectif, en écrivant l'équation du mouvement sous la forme

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \frac{c^2}{2}(k^2 - 1)$$

Ce qui, en posant

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3}$$

donne

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = \frac{c^2}{2}(k^2 - 1)$$

Les orbites circulaires sont obtenues pour

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$$

et leur stabilité est déterminée par le signe de la dérivée seconde de V_{eff} en ce point.

La dérivée de la partie « centrifuge » du potentiel s'annule pour $r = 3GM/c^2 = 3a/2$ puis change de signe en-deçà, la force centrifuge devient centripète et contribue à déstabiliser la trajectoire. Ceci explique qu'il n'existe pas de trajectoire circulaire avec des rayons plus petits.

La courbe de la figure 6.1 est obtenue en normalisant le rayon à a , en introduisant $\tilde{r} = r/a$,

$$V_{\text{eff}}(\tilde{r}) = -\frac{c^2}{2\tilde{r}} + \frac{h^2}{2a^2} \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{h^2}{2a^2} \frac{1}{\tilde{r}^3}$$

soit encore, en notant $\tilde{h} \equiv h/ac$,

$$\frac{1}{c^2} V_{\text{eff}}(\tilde{r}) = -\frac{1}{2\tilde{r}} + \frac{\tilde{h}^2}{2\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{h}^2}{2\tilde{r}^3}$$

La courbe pointillée indique la position des extrema de V_{eff} , correspondant aux positions des orbites circulaires. Ces orbites sont instables pour les maxima (à gauche du minimum de la courbe pointillée, pour $r < 3a$) et sont stables pour les minima ($r > 3a$).

On trouve que la dernière solution stable se trouve à $r = 3a = 6GM/c^2$. En effet,

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\tilde{r}} = \frac{1}{2\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{r}^3} + \frac{3\tilde{h}^2}{2\tilde{r}^4} = 0$$

conduit à l'équation du second degré sur \tilde{r} ,

$$\tilde{r}^2 - 2\tilde{h}^2\tilde{r} + 3\tilde{h}^2 = 0$$

dont le discriminant $\Delta = 4\tilde{h}^4 - 12\tilde{h}^2$ n'est positif que si $\tilde{h}^2 > 3$. Les solutions s'écrivent

$$\tilde{r} = \tilde{h}^2 \pm \sqrt{\tilde{h}^2 - 3\tilde{h}}$$

soit $\tilde{r} = 3$ quand $\tilde{h}^2 = 3$.

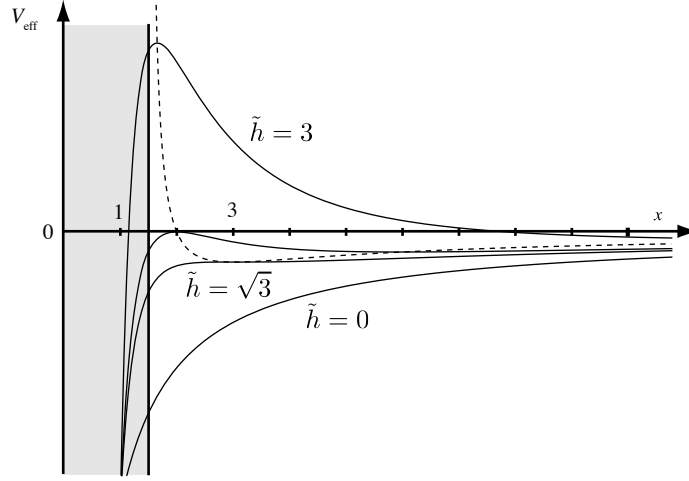


FIGURE 6.1: Potentiel effectif V_{eff} en fonction de $\tilde{r} = r/a$, pour plusieurs valeurs de $\tilde{h} \equiv h/ca$. La zone grisée, pour $r < 3a/2$, correspond aux rayons pour lesquels il n'existe pas de trajectoire circulaire. La courbe pointillée indique la position des extrema de V_{eff} , correspondant aux positions des orbites circulaires.

1.4 Trajectoires radiales de particules sans masse

On reprend le même type de calcul, en partant cette fois de

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} - k^2 c^2 = 0 \quad (6.10)$$

Pour une trajectoire radiale, on a $h = 0$ soit

$$\dot{r}^2 = k^2 c^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \dot{t}^2 \quad (6.11)$$

soit

$$\dot{r} = \pm c \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{t} \quad (6.12)$$

ou

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{a}{r}\right)} \quad (6.13)$$

On intègre en écrivant

$$c dt = \pm \frac{dr}{1 - a/r} = \pm \frac{r dr}{r - a} = \pm \left[1 + \frac{a}{r - a}\right] dr$$

et donc

$$\pm ct = r + a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

où le signe \pm détermine s'il s'agit d'un photon qui se rapproche ou qui s'éloigne de la source du champ gravitationnel.

1.5 Trajectoires circulaires de particules sans masse

On a vu que

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3a}{2} u^2$$

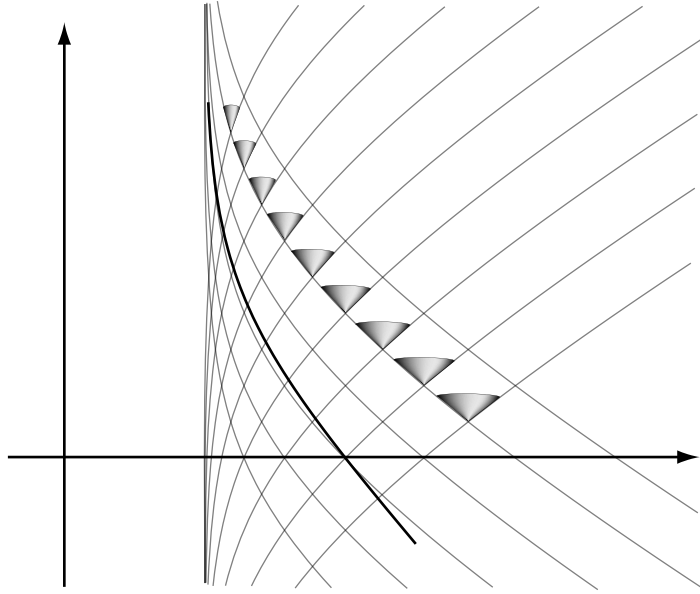


FIGURE 6.2: Discuter la fermeture des cônes de lumière.

soit pour une trajectoire circulaire

$$\boxed{r = \frac{3a}{2}} \quad (6.14)$$

Ce n'est pas étonnant du tout, nous avons vu que dans le cas des particules massives, c'est le rayon auquel la force centrifuge s'annule. Comme ce rayon ne dépend pas de la masse de la particule considérée, cette propriété reste vraie dans la limite $m \rightarrow 0$, c'est-à-dire pour les particules sans masse.

Pour étudier la stabilité de cette trajectoire circulaire, on reprend l'équation 5.4,

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} = k^2 c^2$$

ou encore

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{1}{r^2} = \frac{k^2 c^2}{h^2}$$

On peut éliminer la dépendance en h dans l'équation du mouvement, par une reparamétrisation de la trajectoire, $\sigma \rightarrow h\sigma$. On trouve alors

$$\boxed{\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{cte}} \quad \text{avec} \quad \boxed{V_{\text{eff}} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)} \quad (6.15)$$

Ce potentiel est maximal pour

$$r = \frac{3a}{2} = \frac{3GM}{c^2} \quad \text{où} \quad V_{\text{eff}} = \frac{4}{27a^2} \quad (6.16)$$

ce qui correspond bien au résultat déjà obtenu. La dérivée seconde du potentiel est négative en ce point, la trajectoire est donc instable.

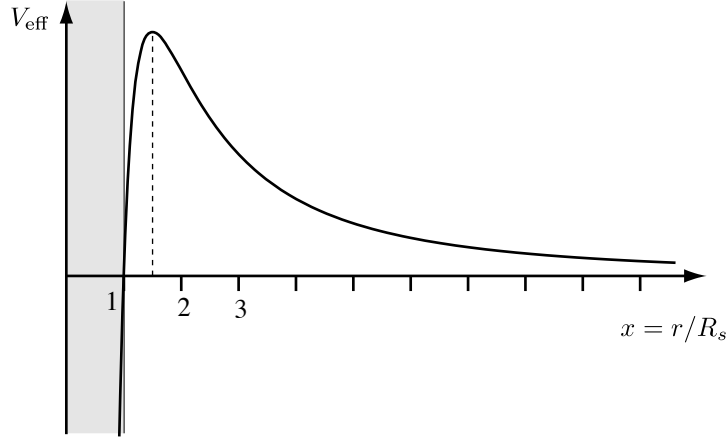


FIGURE 6.3: Potentiel effectif V_{eff} en fonction de $x = r/a$. La zone grisée, pour $r < a$, correspond à l'intérieur du trou noir. Le maximum de la courbe correspond à $r = 3a/2$.

2 L'horizon

2.1 Singularité et pseudo-singularité

Nous avons vu qu'au niveau de la surface définie par $r = a$, les coordonnées de Schwarzschild ont un comportement singulier, alors que pour un observateur inertiel, cette surface ne représente rien de particulier et sa traversée passe inaperçue. Il s'agit d'une pseudo-singularité, liée à un choix de coordonnées singulier. On peut y remédier en adoptant d'autres coordonnées.

2.2 Coordonnées d'Eddington-Finkelstein

Une première solution consiste à choisir une coordonnée qui est constante le long d'un rayon de lumière. Ainsi, on sait que c'est une coordonnée qui restera convenable partout où se propage ce rayon. Un rayon entrant est défini par

$$ct = -r - a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right| + p$$

où a désigne le rayon de Schwarzschild. La quantité p est notre nouvelle coordonnée,

$$p = ct + r + a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

soit

$$dp = c dt + \frac{r dr}{r - a}$$

On remplace le dt obtenu par cette expression dans la métrique de Schwarzschild, on trouve

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dp^2 - 2 dp dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Cette métrique convient en particulier pour calculer les géodésiques radiales des rayons lumineux,

$$0 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dp^2 - 2 dp dr$$

soit

$$2 \frac{dp}{dr} = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{dp}{dr}\right)^2$$

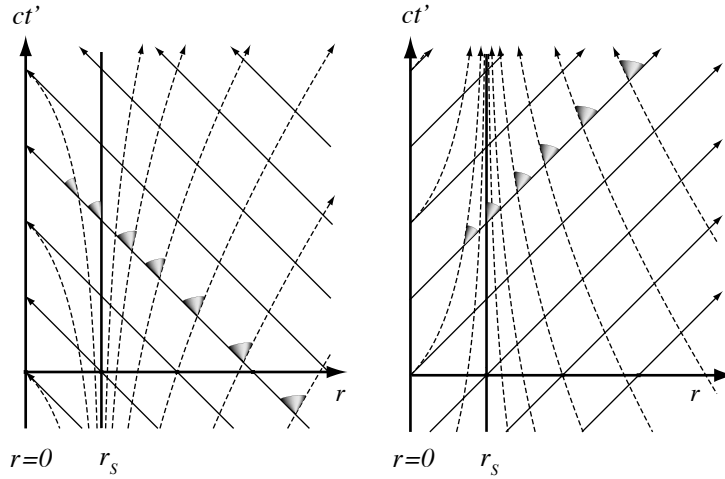


FIGURE 6.4: Coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes et sortantes.

ce qui donne

$$\frac{dp}{dr} = 0 \quad \text{soit} \quad p = \text{cte}$$

ou

$$2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{dp}{dr} \quad \text{soit} \quad p = 2r + 2a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right| + \text{cte}$$

On préfère généralement définir

$$ct' \equiv p - r = ct + a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

La métrique s'écrit alors

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt'^2 - \frac{2ac}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{a}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)^2$$

On peut faire la même manip avec les photons sortants

$$ct' = ct - a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

Ces coordonnées furent introduites en 1923 par Eddington (qui toute sa vie s'opposa farouchement à l'idée que l'instabilité des naines blanches puisse conduire à la formation d'un trou noir) puis redécouvertes en 1958 par Finkelstein.

2.3 Coordonnées de Kruskal

[Hobson]

En effectuant le changement de variable

$$\tilde{r} \equiv r + a \ln \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

dans la métrique de Schwarzschild, on obtient la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) (c^2 dt^2 - d\tilde{r}^2) - r^2(\tilde{r}) (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.17)$$

La métrique du sous espace (t, \tilde{r}) se met sous la forme

$$ds^2 = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

On dit que cette métrique est conformément plate. Les cônes de lumière sont alors délimités par des droites à 45°. Toutefois, ces coordonnées sont singulières, et Kruskal montra que ce problème peut être résolu en choisissant des coordonnées appropriées. Plutôt que de donner brutalement ces coordonnées, on peut décomposer le changement de variables qui y mène de la façon suivante,

$$\begin{cases} p = ct + r + a \ln |r/r_s - 1| \\ q = ct - r - a \ln |r/r_s - 1| \end{cases}$$

puis

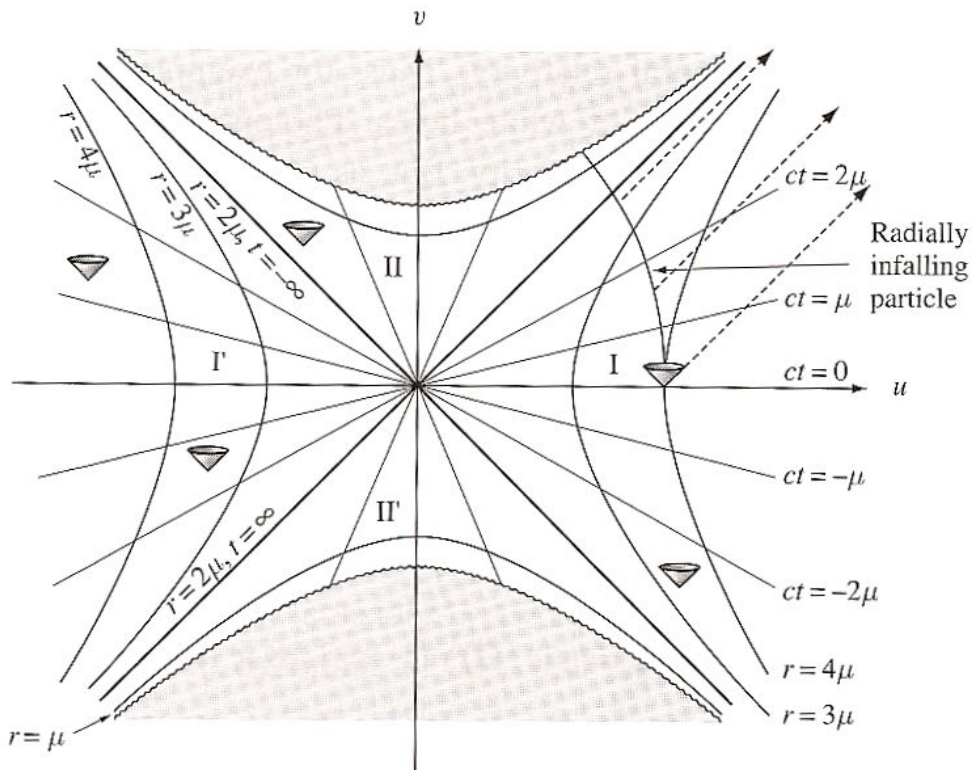
$$\begin{cases} \tilde{p} = \exp(pc^2/4GM) \\ \tilde{q} = -\exp(-qc^2/4GM) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} v = (\tilde{p} + \tilde{q})/2 \\ u = (\tilde{p} - \tilde{q})/2 \end{cases}$$

qui donne

$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{rc^6} \exp\left(-\frac{rc^2}{2GM}\right) (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2)$$



Extension maximale de la métrique de Schwarzschild.

2.4 Trous noirs en rotation

2.5 Trous noirs chargés

2.6 Le paradigme de la membrane

Lorsqu'un trou noir s'effondre, un observateur externe ne voit jamais la matière qui le constitue traverser l'horizon. Elle semble s'accumuler juste au-dessus de la surface de Schwarzschild. Dans les années 1980, Kip S. Thorne, R. H. Price et D. A. Macdonald décrivent plusieurs propriétés des trous noirs en affectant à cette surface (qu'ils appellent une membrane) plusieurs propriétés physiques, une élasticité mécanique, une résistivité de surface $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$, une température, etc. Cette approche permet de décrire plusieurs phénomènes (diffraction des ondes électromagnétiques, propriétés magnétiques) sans avoir à manipuler l'artillerie lourde de la relativité générale.

3 Équation d'Oppenheimer et Volkoff

4 Les trous noirs en astrophysique et en cosmologie

Trous noirs stellaires – Accrétion – Trous noirs supermassifs – Preuves observationnelles – Trous noirs primordiaux.

Pour commencer, signalons qu'il n'existe aucune contrainte a priori sur la masse M d'un trou noir. Le rayon de Schwarzschild est inversement proportionnel à M , et pourvu que la masse M puisse être concentrée à l'intérieur de ce rayon, c'est un trou noir. Toutefois, on ne connaît que quelques scénarios de formation des trous noirs, qui donnent des objets de trois types, les trous noirs stellaires, les trous noirs supermassifs et les trous noirs primordiaux.

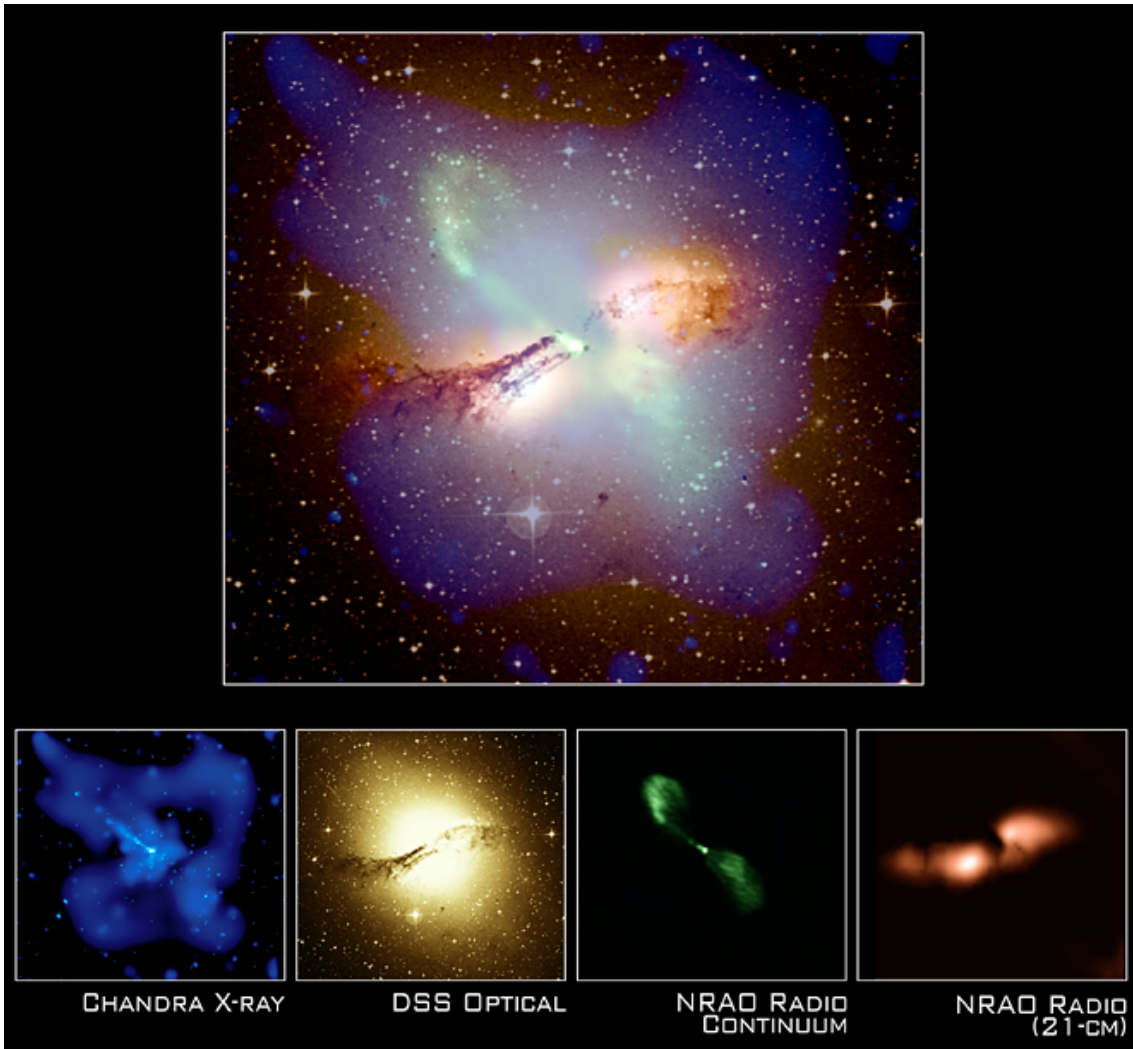
4.1 Formation des trous noirs stellaires

La structure des étoiles de la séquence principale est due à l'équilibre entre l'action attractive de la gravitation et l'action répulsive des forces de pression. Dans les étoiles telles que le Soleil, la pression est d'origine thermique. On peut calculer la pression qui règne au cœur du Soleil, connaissant sa masse et son rayon, et l'on trouve $p \approx 2 \times 10^{16}$ Pa. Vu les densités en jeu, le milieu solaire peut être décrit comme un gaz parfait, et la température se calcule aisément, elle est de l'ordre de 10^7 K. Cette température peut persister pendant plusieurs milliards d'années, malgré la perte radiative, grâce aux réactions de fusion nucléaire qui ont lieu en son cœur.

Ces réactions transforment l'hydrogène en hélium, ce qui produit des photons (qui en se thermalisant avec le milieu ambiant se comportent comme une source de chaleur) et des neutrinos. Une fois l'hydrogène épuisé, ces réactions cessent, le milieu tend à se refroidir, la pression diminue, l'étoile se contracte, la densité augmente, la température aussi, jusqu'à ce que la fusion de l'hélium puisse se produire. On a alors une géante rouge.

Selon la masse de l'étoile initiale, plusieurs scénarios peuvent se produire. Lorsque la masse est inférieure à $1,4 M_\odot$, la pression de dégénérescence des électrons peut suffire à contrebalancer l'attraction gravitationnelle, on obtient une naine blanche. Lorsqu'elle est plus grande, la pression de dégénérescence ne peut contenir l'effondrement de l'étoile une fois qu'elle a épuisé son combustible nucléaire. On peut alors obtenir une étoile à neutrons [expliquer].

Les équations de la structure stellaire permettent de déterminer la valeur du potentiel gravitationnel à la



surface des naines blanches, on trouve

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim \frac{1}{3} \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\rho(0)}{\rho_c} \right)^{2/3}$$

si la densité centrale est suffisamment faible pour que le cœur soit non relativiste ou

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim \frac{1}{3} \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\rho(0)}{\rho_c} \right)^{1/3}$$

pour une naine blanche ultrarelativiste. On trouve alors que dans tous les cas,

$$\boxed{\frac{GM}{Rc^2} < 4 \times 10^{-4}}$$

On en déduit deux choses. D'une part on peut s'affranchir de la relativité générale pour décrire ces objets, et d'autre part les corrections dues à la RG ne sont pas ridiculement faibles, elles devraient être observables. Elles le sont en effet, par exemple dans le spectre d'émission de ces objets.

Pour une étoile à neutrons la situation est différente. C'est cette fois l'interaction forte qui s'oppose à l'effondrement. À des densités élevées, l'interaction forte devient en effet répulsive. La pression de dégénérescence

des neutrons contribue à la pression, mais ce n'est pas la contribution principale. Pour ces objets,

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 0,1$$

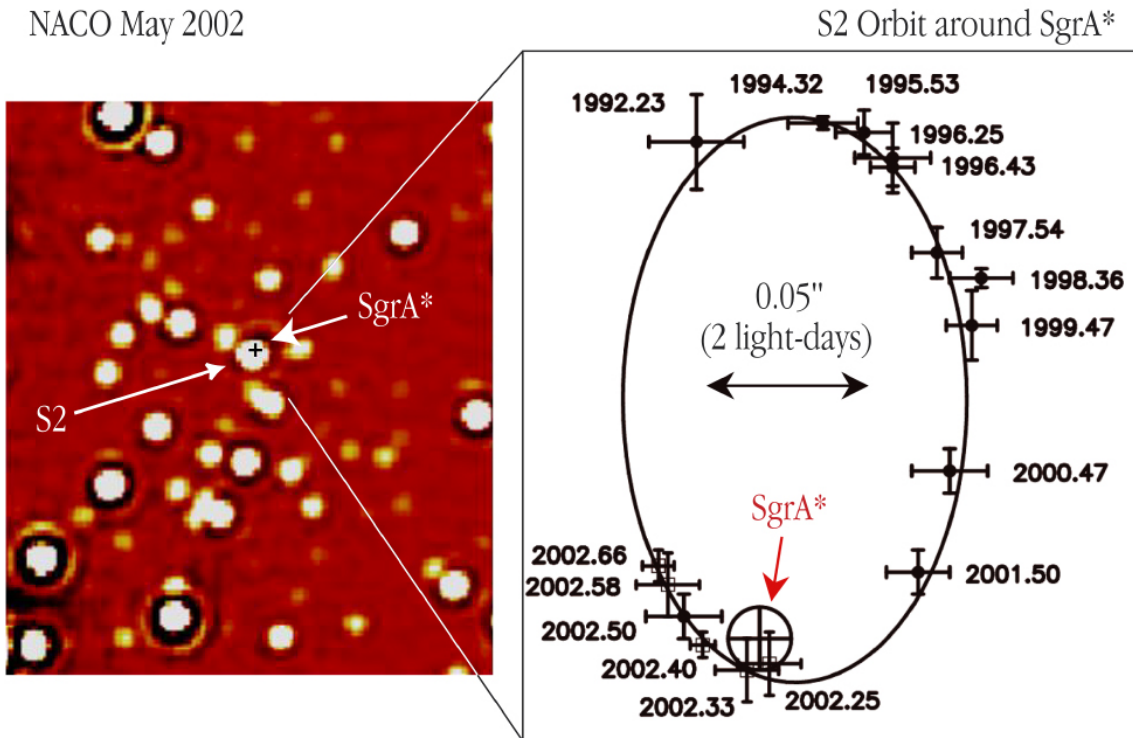
Il faut donc de placer dans le cadre de la relativité générale pour étudier les étoiles à neutrons. On trouve qu'il existe une masse limite au-delà de laquelle les étoiles à neutrons sont instables, c'est la limite de Oppenheimer-Volkoff, et elle est de l'ordre de 1,5 à 3 M_{\odot} .

Des objets plus massifs s'effondrent nécessairement en trous noirs.

4.2 Accrétion et émission électromagnétique

4.3 Trous noirs supermassifs

On observe directement, au centre de plusieurs galaxie, l'influence gravitationnelle de trous noirs supermassifs de quelques $10^6 M_{\odot}$. On observe aussi de nombreux quasars, dont la modélisation théorique fait intervenir de tels trous noirs. Ceux-ci se forment probablement en même temps que les galaxies elles-mêmes, mais on ne dispose pas de scénario précis pour cette formation.



The Motion of a Star around the Central Black Hole in the Milky Way

4.4 Preuves expérimentales

4.5 Trous noirs primordiaux

Transitions de phase dans l'Univers primordial. Leur existence est spéculative, et leurs propriétés (nombre, distribution de masse) dépendent fortement des détails de la physique microscopique dans l'Univers primordial, détails qu'à ce jour on connaît très mal.

5 Le trou noir quantique – Rayonnement de Hawking et évaporation des trous noirs

5.1 Entropie des trous noirs

[Susskind, Nature] Le trou noir ne peut absorber que des photons de longueur d'onde plus petite que a . On a donc, pour l'absorption d'un photon, au moins

$$\delta M \approx \frac{E_{\min}}{c^2} \approx \frac{h}{ac} = \frac{hc}{2GM}$$

Cette absorption correspond à l'augmentation de l'entropie d'une unité,

$$\frac{dM}{dS} = \frac{hc}{2GMk_B} \quad \text{soit} \quad S \sim \frac{2k_B GM^2}{hc} \sim \frac{2a^2 k_B c^3}{Gh}$$

L'entropie est proportionnelle à l'aire. Bekenstein a montré en 1973 qu'en effet,

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}$$

Cette proposition rencontre à l'époque un scepticisme certain : si le trou noir a une entropie, il doit aussi avoir une température, d'après les lois générales de la thermodynamique, et il doit nécessairement rayonner de l'énergie selon un spectre de Planck, ce qui semble interdit par la présence de l'horizon.

5.2 Rayonnement thermique des trous noirs

En 1974, Stephen Hawking montre par un calcul explicite de théorie des champs en espace courbe qu'un trou noir émet un rayonnement thermique, dont la température est donnée par

$$T_H = \frac{hc^3}{16\pi^2 GMk_B} \approx 5,84 \times 10^{-8} \text{ K} \times \frac{M_\odot}{M}$$

On peut le voir comme la matérialisation de paires de particules, qui passent d'un état virtuel à un état réel. En effet, les paires de particules virtuelles sont créées et détruites avec une quantité de mouvement totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ nulle. L'énergie E est reliée à \vec{p} par $E = \vec{u}^0 \cdot \vec{p}$. L'une des particules a donc $E > 0$ et l'autre $E < 0$. Or, le vecteur \vec{u}^0 change de nature à la traversée du rayon de Schwarzschild, car

$$\vec{u}^0 \cdot \vec{u}^0 = g_{00} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

On peut donc imaginer que la particule d'énergie négative de la paire créée hors de l'horizon vive suffisamment longtemps pour traverser l'horizon pour acquérir une énergie positive. De manière plus rigoureuse, il faudrait

envisager que la particule traverse la région d'énergie négative (la région classiquement interdite pour elle) par effet tunnel.

De manière plus quantitative, une paire créée avec une énergie E peut subsister pendant un temps $\tau \sim \hbar/E$. Si la paire est émise à la coordonnée $r = a + \epsilon$, une particule met un temps propre

$$\tau \approx \frac{2\sqrt{a\epsilon}}{c}$$

pour atteindre l'horizon. En effet,

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{a + \epsilon}$$

en posant $r = a + \rho$ avec $\rho \ll a$ et en développant l'expression précédente au premier ordre, on a

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2GM}{a^2} (\epsilon - \rho) = \frac{c^2}{a} (\epsilon - \rho)$$

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\epsilon - \rho}} = -\frac{c}{\sqrt{a}} d\tau$$

où le signe $-$ prend en compte que la trajectoire est entrante.

$$\left[-2\sqrt{\epsilon - \rho}\right]_{\epsilon}^0 = -\frac{\tau c}{\sqrt{a}}$$

soit comme annoncé

$$\tau = \frac{2\sqrt{a\epsilon}}{c}.$$

La particule pourra effectivement atteindre l'horizon si

$$E = \frac{\hbar}{\tau} \sim \frac{\hbar c}{2\sqrt{a\epsilon}}$$

L'autre particule de la paire est émise vers l'extérieur, et pour un observateur lointain son énergie est décalée vers le rouge d'un facteur

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{a}{a + \epsilon}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}$$

On la voit donc avec une énergie

$$E' = E\sqrt{g_{00}} \approx \frac{\hbar c}{2a} \approx \frac{\hbar c^3}{2GM}$$

Cette énergie E' est indépendante de ϵ , toutes les particules sont émises avec une énergie de cet ordre. Les calculs plus rigoureux indiquent que la distribution est thermique, avec la température $T \sim E'/k_B$ donnée plus haut.

Pour les trous noirs stellaires, cet effet est inobservable, et même largement compensé par l'absorption du rayonnement de fond cosmologique, bain de photons et de neutrinos de température 3 K.

5.3 Évaporation

Ce rayonnement est responsable d'une diminution de la masse du trou noir au cours du temps, on dit qu'il s'évapore. L'évolution de la masse est décrite par

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\sigma T^4}{c^2} \times 4\pi a^2 = -\frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}\right) \left(\frac{\hbar c^3}{16\pi^2 GM k_B}\right)^4 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2$$

où l'on a introduit la constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}$$

ce qui donne

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{c^4}{30\,720\pi^2 G^2} \frac{h}{M^2} \equiv -\frac{\alpha h}{M^2}$$

où $30\,720 = 15 \times 2^{11}$ et où $\alpha = 2,4 \times 10^{49}$ SI. On obtient alors

$$M(t) = \{3\alpha\hbar(t_0 - t)\}^{1/3}$$

Le temps de vie des trous noirs est donc donné par

$$\tau = \frac{M^3}{3\alpha\hbar} \approx (8,3 \times 10^{43} \text{ s}) \times \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$$

Pour les trous noirs primordiaux ou les mini-trous noirs, l'évaporation pourrait être spectaculaire. [parler des mini-trous noirs au LHC]

Les trous noirs primordiaux qui s'évaporeraient aujourd'hui auraient des masses de l'ordre de $10^{-19} M_\odot$, soit en viron, 10^{11} kg, soit la masse d'une grosse montagne.

L'évaporation fournit tout un tas de particules, pas que des photons, et ce pourrait être une aubaine pour créer des particules par des processus rares du modèle standard de la physique des particules, ou de ses extensions.

5.4 Effet Unruh

Un observateur subissant dans le vide une accélération g perçoit des particules formant un bain thermique à la température

$$T_u = \frac{\hbar}{ck_B} \frac{g}{2\pi},$$

Cet effet est extrêmement faible dans les conditions habituelles : l'accélération de la pesanteur g correspond à une température de l'ordre de 4×10^{-20} K. En revanche, il joue un rôle plus important au voisinage des objets astrophysiques compacts, et permet en particulier de comprendre le rayonnement des trous noirs. Il fut découvert de façon théorique en 1975 par Davies puis analysé en détail par Unruh en 1976 ; on l'appelle aussi **effet Davies-Unruh**.

5.5 Principe holographique

7. Ondes gravitationnelles

1 Linéarisation de la relativité générale

Comme on l'a déjà vu, on veut souvent se placer dans des situations où le champ gravitationnel est faible. Nous allons ici aborder cette question de manière un peu plus systématique. En particulier, nous allons montrer que le champ gravitationnel obéit à des équations très similaires aux équations de Maxwell, en introduisant la notion de gravitomagnétisme.

On va commencer par linéariser naïvement, puis on passera en revue les subtilités.

1.1 Linéarisation

Le point de départ est le suivant. On considère encore de petites perturbations de la métrique plate et on décompose la métrique sous la forme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1 \quad (7.1)$$

On cherche la forme des équations d'Einstein et des équations du mouvement au premier ordre en h . On ne considère plus que la situation est statique. On a besoin du tenseur de courbure, et donc des symboles de Christoffel, à l'ordre le plus bas en h . C'est parti.

On a vu, éq. 2.25, que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (7.2)$$

ce qui à l'ordre le plus bas en h donne, en remarquant que les dérivées de η sont toutes nulles,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \approx \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\alpha\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) = \frac{1}{2} (\partial_{\nu} h_{\mu}^{\beta} + \partial_{\mu} h_{\nu}^{\beta} - \partial^{\beta} h_{\mu\nu}) \quad (7.3)$$

où l'on a noté $\partial^{\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}$. A priori, η n'est pas le tenseur métrique et ne peut pas être utilisé pour monter les indices, mais ça induit une différence seulement à l'ordre 2 en h . On reporte cette expression dans celle du tenseur de courbure (éq. 3.11),

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \Gamma^{\eta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\eta} \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}$$

Les deux derniers termes sont d'ordre h^2 et on les néglige. Il reste

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} \approx \frac{1}{2} \partial_{\nu} (\partial_{\alpha} h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\mu} h_{\alpha}^{\lambda} - \partial^{\lambda} h_{\mu\alpha}) - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} (\partial_{\nu} h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} - \partial^{\lambda} h_{\mu\nu})$$

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\alpha} \approx \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\lambda - \partial^\lambda \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\lambda + \partial_\alpha \partial^\lambda h_{\mu\nu})$$

On obtient le tenseur de Ricci en contractant sur le premier et le dernier indice,

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\alpha - \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu})$$

En notant $\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha$ et $h \equiv h_\alpha^\alpha$, on arrive à

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h - \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \square h_{\mu\nu})$$

ce qui se réécrit

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha)$$

Enfin, le scalaire de Ricci défini par $R \equiv R^\beta{}_\beta$ s'écrit

$$R \approx \square h - \partial^\beta \partial_\alpha h_\beta^\alpha$$

On n'a plus qu'à mettre tout ça dans les équations d'Einstein (éq. 4.3)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

soit

$$\frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\square h - \partial^\beta \partial_\alpha h_\beta^\alpha) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

On peut simplifier un peu cette équation en définissant

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$$

qui vérifie $\bar{h} = -h$. En utilisant

$$h_\mu^\alpha = \bar{h}_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \eta_\mu^\alpha \bar{h}$$

on obtient

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu^\alpha = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (7.4)$$

Ce sont les équations de la RG linéarisée.

1.2 Transformations de jauge

La quantité $h_{\mu\nu}$ n'est pas un tenseur (voir la fin de cette section), mais elle jouit toutefois d'une propriété remarquable, elle se transforme comme un tenseur sous les transformations de Lorentz globales. De plus, par des transformations infinitésimales

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

où les $\xi^\mu(x)$ sont des fonctions arbitraires de la position, mais petites, on a

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \xi^\mu \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\mu - \partial_\nu \xi^\mu$$

on peut alors montrer que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$$

Ce changement de coordonnées peut alors être réinterprété comme une transformation de jauge sur un espace-temps plat.

Comme en électromagnétisme usuel, ceci signifie que l'on a une liberté dans la définition des $h_{\mu\nu}$, et l'on peut en profiter pour simplifier les équations. En EM, on avait

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi$$

Ici, une transformation de jauge se traduit sur les quantités $\bar{h}_{\mu\nu}$ par

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h - 2\partial_\alpha\xi^\alpha) \\ \bar{h}'_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\xi^\alpha\end{aligned}$$

et donc

$$\partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\mu \xi_\nu - \square \xi_\mu + \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\alpha = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu$$

On se place dans une jauge qui simplifie les calculs, en imposant la condition

$$\partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu = 0$$

Les équations linéarisées 7.4 s'écrivent alors

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad \text{avec la condition de jauge} \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

C'est exactement analogue à la jauge de Lorenz en EM qui conduit à l'équation de Poisson

$$\boxed{\square A^\mu = \mu_0 j^\mu} \quad \text{avec la condition de jauge} \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

1.3 Solution dans le vide

Dans le vide, on a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{avec} \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Les solutions générales peuvent s'écrire sous la forme de superpositions d'ondes planes progressives

$$\bar{h}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$$

où le quadrivecteur d'onde satisfait (on met cette solution dans les deux équations de départ)

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad k_\alpha H^{\alpha\mu} = 0$$

Cette solution décrit des ondes gravitationnelles. Elles se propagent à la vitesse de la lumière (car $k^2 = 0$) et sont polarisées transversalement (car $k_\alpha H^{\alpha\mu} = 0$).

1.4 Solution générale

On veut résoudre

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

On peut pour cela déterminer la fonction de Green, définie par

$$\square G(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)$$

On peut montrer que, avec $y = 0$,

$$G(x^\mu) = \frac{\delta(x^0 - |\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|} \Theta(x^0)$$

ce qui donne

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\mu) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

1.5 Application aux sources stationnaires

Pour une source stationnaire (une sphère en rotation uniforme, par exemple), la dépendance en t disparaît, et l'on a simplement

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\mu) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

Pour une source dont les mouvements sont non relativistes, le tenseur énergie-impulsion

$$T^{00} = \gamma^2 \rho c^2, \quad T^{0i} = \gamma^2 \rho c v^i \quad \text{et} \quad T^{ij} = \gamma^2 \rho v^i v^j$$

se met sous la forme

$$T^{00} = \rho c^2, \quad T^{0i} = \rho c v^i \quad \text{et} \quad T^{ij} = \rho v^i v^j$$

On a donc

$$\bar{h}^{00} = \frac{4\Phi}{c^2} \quad \text{avec} \quad \Phi \equiv -G \int \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

$$\bar{h}^{0i} = \frac{A^i}{c} \quad \text{avec} \quad A^i \equiv -\frac{4G}{c^2} \int \frac{\rho(\vec{y}) v^i(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

et on pourra considérer dans la suite que $\bar{h}^{ij} = 0$. On a donc $\bar{h} = \bar{h}^{00}$. On en déduit les valeurs de $h_{\mu\nu}$,

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2\Phi}{c^2} \quad \text{et} \quad h_{0i} = \frac{A_i}{c}$$

Pour des sources statiques, les h_{0i} sont nuls eux aussi.

1.6 Analogie avec l'électromagnétisme

On a donc $\Phi = \bar{h}^{00} c^2 / 4$ et on peut réécrire tout ça sous la forme

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad \text{et} \quad \Delta\vec{A} = \frac{16\pi G}{c^2} \vec{j}$$

en se souvenant que $\square = -\Delta$ dans la métrique considérée et pour des situations stationnaires. En définissant

$$\vec{E}_g \equiv -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{et} \quad \vec{B}_g \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi G\rho \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{16\pi G}{c^2} \vec{j}$$

C'est la même forme que les équations de Maxwell, et la champ \vec{B} est appelé **champ magnétogravitational** ou **gravimagnétique**.

L'analogie est plus forte encore. Écrivons l'équation du mouvement d'une masse soumise au champ gravitationnel précédent,

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

Dans la limite des faibles vitesses (attention, il s'agit cette fois de la vitesse de la masse considérée, pas la source du champ gravitationnel), on a

$$\dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \approx (c, \vec{v})$$

et

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -c^2 \Gamma^i_{00} - 2c \Gamma^i_{0j} v^j - \Gamma^i_{jk} v^j v^k \approx -c^2 \Gamma^i_{00} - 2c \Gamma^i_{0j} v^j \quad (7.5)$$

On insère les valeurs des Γ (éq. 7.3), en se rappelant que les dérivées par rapport au temps sont nulles,

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &\approx \frac{1}{2} (\partial_0 h_0^i + \partial_0 h_0^i - \partial^i h_{00}) = -\frac{\partial^i h_{00}}{2} = \frac{1}{c^2} \partial^i \Phi \\ \Gamma^i_{0j} &\approx \frac{1}{2} (\partial_0 h_j^i + \partial_j h_0^i - \partial^i h_{0j}) = \frac{\partial_j h_0^i}{2} - \frac{\partial^i h_{0j}}{2} = c \frac{\partial_j A^i}{2} - c \frac{\partial^i A_j}{2} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \partial^i \Phi - c^2 v^j (\partial_j A^i - \partial^i A_j)$$

Or, le développement de $\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ en composante donne pour la première composante

$$v^2 \nabla^1 A^2 - v^2 \nabla^2 A^1 - v^3 \nabla^3 A^1 + v^3 \nabla^1 A^3$$

et l'on reconnaît, en ajoutant $v^1 \nabla^1 A^1 - v^1 \nabla^1 A^1$, la forme

$$v^j \nabla^1 A^j - v^j \nabla^j A^1$$

La force s'écrit alors

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx -\vec{\nabla} \Phi + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx \vec{E}_g + \vec{v} \wedge \vec{B}_g}$$

1.7 Application aux corps sphériques en rotation

1.8 Subtilités

La décomposition 7.1 pose un premier problème, les deux termes de droite ne sont pas des tenseurs. Lors d'un changement de coordonnées, cette équation se transforme en

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} h_{\alpha\beta}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, la différence entre $g'_{\mu\nu}$ et $\eta_{\mu\nu}$ n'est pas donnée par la transformée de $h_{\mu\nu}$. D'autre part, la condition $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$ n'est pas non plus invariante par changement de coordonnées.

2 Les ondes gravitationnelles

2.1 Introduction

Vagues sur l'espace-temps – Une histoire mouvementée

2.2 Propriétés

2.3 Sources potentielles

2.4 Détection des ondes gravitationnelles

Les barres de Weber – Interféromètres LIGO et VIRGO – Projets spatiaux.