
Notes de cours de PHYS 101

Richard Taillet, 25 novembre 2010

Table des matières

1	Introduction	7
1	Généralités – unités	7
1.1	Cinématique et dynamique	7
1.2	Coordonnées	8
1.3	Dimension physique	8
1.4	Unités de mesure	8
1.5	Le système international d'unités	9
1.6	Analyse dimensionnelle	9
1.7	Un exemple pratique	9
1.8	Scalars et vecteurs	10
1.9	Coordonnées, vecteur	11
1.10	Résumé	11
2	cinématique	11
2.1	vitesse	11
2.2	accélération	12
2.3	composition des vitesses	12
2	Principes de la mécanique	15
1	Principe fondamental de la dynamique	15
1.1	Référentiel	15
1.2	énoncé	15
1.3	Principe de relativité galiléenne	15
1.4	Principe de l'action-réaction	16
1.5	Système composé de plusieurs sous-parties	16
2	Premières conséquences	17

2.1	Conservation de la quantité de mouvement	17
2.2	Théorème de l'énergie cinétique	17
2.3	Energie potentielle – énergie mécanique	18
2.4	Moments de forces, moment cinétique	18
3	Dynamique appliquée à des mouvements simples	19
1	Les forces	19
1.1	Inventaire à la Prévert	19
2	La force de gravitation	19
2.1	Introduction	19
2.2	Le poids	20
2.3	Variations de $\vec{g}$	20
2.4	La chute libre	21
2.5	Remarque importante sur l'énergie	21
2.6	Potentiel gravitationnel	22
2.7	Aparté sur le gradient	22
3	Les frottements fluides	22
3.1	Définitions	22
3.2	Exemple	23
4	Les frottements solides	23
4.1	Définition du glissement	23
4.2	Les lois de Newton relatives au frottement solide	24
4.3	Application : pousser une machine à laver	24
5	Force électrostatique	24
5.1	Remarque sur l'énergie	25
6	Force de rappel d'un ressort	25
6.1	Remarque sur l'énergie	25
7	Mouvement d'un point matériel guidé	25
7.1	Mouvement sur un plan incliné	25
7.2	Mouvement sur un cercle	25
7.3	Équilibres	25
8	Le gradient	25
8.1	Définition	25
8.2	Exemple	26
8.3	Propriétés	26
4	Oscillations	29

1	Oscillateurs mécaniques libres	29
1.1	Système masse-ressort sans frottement	29
1.2	Chute libre à travers la Terre	30
1.3	Système masse-ressort avec frottement fluide	30
1.4	Résolution de l'équation différentielle	30
1.5	Discussion	32
1.6	Pendule pesant	32
2	Oscillateurs mécaniques forcés – résonance	32
2.1	Système masse-ressort avec frottement fluide	32
2.2	Régime transitoire	33
2.3	Régime permanent – résolution de l'équation différentielle	33
2.4	Résonance	33
2.5	Déphasage	34
5	Statique des fluides	37
1	Propriétés des fluides	37
1.1	Hypothèse du milieu continu	37
1.2	masse volumique	37
1.3	pression	37
1.4	Autres grandeurs	38
2	Equation de la statique des fluides	38
2.1	Distribution volumique des forces de pression	38
2.2	équation fondamentale	39
2.3	Application aux fluides incompressibles	39
2.4	Calcul typique	39
2.5	Exemples	39
2.6	Force sur les parois d'un récipient	40
2.7	Cas d'un fluide compressible	40
3	Poussée d'Archimède	41
3.1	Énoncé	41
3.2	Premières conséquences	41
3.3	Applications	41

Le cours de PHYS 111 présente une introduction à la mécanique, avec une ambition un peu plus générale. Tout au long de ce cours, nous présenterons les différentes étapes d'un raisonnement en physique, la façon d'analyser un problème, de le formaliser sous une forme mathématique, de résoudre le problème mathématique, puis de traduire la solution mathématique dans un langage physique, pour la comprendre pleinement. Dans cette chaîne, la physique proprement dite se mêle souvent à des considérations purement mathématiques, et nous essaierons de différencier clairement ces difficultés. Du côté de la physique, il faudra connaître quelques lois générales (la relation fondamentale de la dynamique, l'expression de quelques forces). Du côté des mathématiques, il faudra connaître le programme de collège et lycée ainsi que quelques notions plus avancées (résoudre des équations ou des systèmes d'équations algébriques, dériver ou intégrer des fonctions simples, résoudre des équations différentielles du premier ou du second ordre, à coefficients constants). Nous ferons les rappels qui s'imposent au fur et à mesure que les notions feront leur apparition.

Cette partie du cours, intitulée « mécanique », s'intéresse aux forces. Nous allons revenir sur cette notion en détail, mais nous en avons tous une vision intuitive, la force c'est ce qui nous tient au sol ou ce qui retient la Terre autour du Soleil (la force gravitationnelle), c'est ce qui pousse sur la paroi d'un ballon de baudruche ou sur le bord d'un barrage (forces de pression), c'est ce qui attire les petits bouts de papier sur le stylo préalablement frotté dans les cheveux (force électrostatique), c'est ce qui repousse ou attire des aimants (force magnétique), etc. Les forces peuvent modifier le mouvement des corps, et une partie importante du cours sera consacrée à cette question.

1 Généralités – unités

1.1 Cinématique et dynamique

On distingue habituellement deux pans de la mécanique :

- la **cinématique** dont le but est de décrire le mouvement des corps, en définissant la position, la vitesse de translation ou de rotation, l'accélération, etc...
- la **dynamique** dont le but est d'expliquer le mouvement des corps, en reliant l'accélération aux forces subies.

Durant ce cours, nous aurons besoin de décrire le mouvement des objets. Le mouvement étant une variation de la position dans le temps, il faut donc savoir définir la position des objets.

1.2 Coordonnées

Petit jeu, placez deux objets différents, une pomme et un stylo, en deux endroits différents de la pièce. Repérez bien la position de ces deux objets, bandez les yeux à un cobaye et faites-le tourner sur lui-même pour perdre son sens de l'orientation, puis posez-lui la main sur le premier objet, pour qu'il sache où il se trouve. Le jeu commence : essayer de faire toucher le second objet au cobaye en ne lui donnant que des instructions verbales. Vous vous apercevrez qu'il vous faudra toujours donner trois indications au minimum pour que le cobaye trouve l'objet. On dit que notre espace a trois dimensions (ce qui n'a rien à voir avec la notion de dimension du paragraphe qui suit!).

Vous verrez aussi que vous serez obligé de spécifier des nombres, l'un d'entre eux au moins faisant référence à une longueur connue. Vous direz par exemple « une longueur de bras » ou « cinquante centimètres ». Ces nombres sont appelés des coordonnées.

Il existe différents ensembles de nombres permettant de repérer un même objet, on dira qu'on peut utiliser plusieurs **systèmes de coordonnées** (par exemple, dans le plan vous connaissez les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires).

1.3 Dimension physique

Les grandeurs physiques servent à représenter des quantités de différents types, par exemple des longueurs, des intervalles de temps, des températures, etc... On affecte à chaque grandeur une dimension qui indique de quel type il s'agit. Par exemple, toutes les distances, les tailles ont la dimension d'une longueur. Cette dimension est notée **L**. De même, on note **T** les temps, **M** les masses. On peut combiner plusieurs dimensions, par exemple la dimension d'une vitesse s'écrit **LT⁻¹**, ce que l'on écrit formellement

$$[v] = \mathbf{LT}^{-1}$$

où les crochets signifient « la dimension de ». Les dimensions de toutes les quantités physiques peuvent s'exprimer à partir d'un petit nombre d'entre elles, que l'on qualifie de dimensions fondamentales. En mécanique, toutes les dimensions d'expriment en combinant masse, longueur et temps.

1.4 Unités de mesure

La plupart des grandeurs physiques sont affectées d'unités, c'est-à-dire qu'elles se réfèrent à une grandeur du même type supposée connue. En ce qui concerne les longueurs, il y a de nombreuses unités en vigueur, citons par exemple

- le mètre et ses multiples et sous-multiples (centimètres, kilomètres, etc...);
- le pouce (2,54 cm), le pied (30,48 cm), la verge anglaise ou yard (0,9144 m), le mile, unités anglo-saxonnes;
- différentes unités maritimes comme le mile nautique;
- l'année-lumière, le parsec et l'unité astronomique, utilisées en astronomie;
- le fermi, le micron, l'ångström, unités microscopiques;
- le pica et le point, unités typographiques;
- la lieue, la perche, la toise, anciennes unités françaises;
- plus pour s'amuser un peu : <http://www.convert-me.com/en/convert/length>.

Le passage d'une unité à l'autre est appelé une **conversion**, il existe des tables permettant de convertir n'importe quelle unité en n'importe quelle autre. Vous l'avez peut-être déjà expérimenté si vous avez voyagé aux États-Unis, où les distances sont indiquées en miles sur les routes, et non en kilomètres.

Insistons sur le fait que la notion d'unité est différent de celle de dimension physique. Deux quantités physiques peuvent avoir la même dimension mais ne pas être exprimées dans la même unité. Par contre, on ne peut exprimer des quantités dans la même unité que si elles sont de même dimension.

Par convention, on a défini des unités simples, appelées **unités de base**, pour certains types de grandeurs physiques. Le système international d'unités, noté SI et adopté par la Conférence Générale des Poids et Mesures en 1960, définit comme dimension fondamentales et comme unités de base :

- des longueurs (exprimées en mètres) ;
- des temps (seconde) ;
- des masses (kilogramme) ;
- des courants électriques (ampère) ;
- des températures (kelvin) ;
- des quantités de matière (moles) ;
- l'intensité lumineuse (candela).

Il existe d'autres types de grandeurs physiques, qui s'expriment dans d'autres unités, appelées **unités dérivées** et construites à partir de ces unités de bases. Par exemple, une vitesse est le rapport d'une distance par le temps mis pour la parcourir, elle s'exprime en m/s, qu'on note aussi $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ou m s^{-1} .

1.5 Le système international d'unités

Voir la brochure disponible sur le portail. Parler du BIPM, CODATA, etc.

1.6 Analyse dimensionnelle

Les équations de la physique relient entre elles des grandeurs de types différents, mais seulement dans des combinaisons de même dimension physique. Si vous trouvez qu'une longueur est égale à un temps, vous vous êtes trompé quelque part ! On peut mettre à profit cette propriété pour deviner des résultats physiques sans calcul.

Par exemple, la période d'oscillation d'un pendule peut a priori dépendre de sa masse m , de sa longueur ℓ , et de la force d'attraction gravitationnelle, plus précisément de l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. En résolvant le problème, on va trouver une formule donnant la période T en fonction de m , ℓ et g . Il faut donc trouver une combinaison $m^\alpha \ell^\beta g^\delta$ de ces trois grandeurs qui ait la dimension d'un temps. On doit donc avoir

$$\mathbf{M}^\alpha \mathbf{L}^\beta \mathbf{T}^{-2\delta} = \mathbf{T} \quad (1.1)$$

On doit donc avoir $\alpha = 0$, $\delta = -1/2$ et $\beta = 1/2$. La période d'oscillation s'exprimera donc en fonction de $\sqrt{\ell/g}$. On voit déjà que la masse ne peut pas intervenir !

1.7 Un exemple pratique

En 1945, la première bombe nucléaire (Trinity) explose au Nouveau Mexique. Une série de photographies, comportant une échelle de taille et des indications de temps, sont publiées en 1950 dans le magazine Life. Le physicien britannique G.I. Taylor se sert de ces photos pour estimer l'énergie libérée par l'explosion, qui est alors une donnée ultrasecrète et classifiée ! Pour cela, il suppose qu'il existe une relation entre le rayon R de l'explosion, le temps t , l'énergie E et la densité ρ de l'air, de la forme

$$R \propto E^\alpha \rho^\beta t^\gamma \quad (1.2)$$

ce qui du point de vue des dimensions s'écrit

$$\mathbf{L} = (\mathbf{M}\mathbf{L}^2\mathbf{T}^{-2})^\alpha (\mathbf{M}\mathbf{L}^{-3})^\beta (\mathbf{L})^\gamma \quad (1.3)$$

ce qui se résout en $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$ et $\gamma = 2/5$ si bien que

$$R \propto \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{1/5} \quad \text{soit} \quad R^5 \propto \frac{Et^2}{\rho} \quad (1.4)$$

La courbe représentant R^5 en fonction de t^2/ρ est donc une droite, dont la pente donne E . Ou la courbe représentant $\log R$ en fonction de $\log t$ est aussi une droite, dont l'ordonnée à l'origine vaut $\log(E/\rho)$. Taylor put ainsi estimer l'énergie de la bombe à environ 25 kilotonnes de TNT.

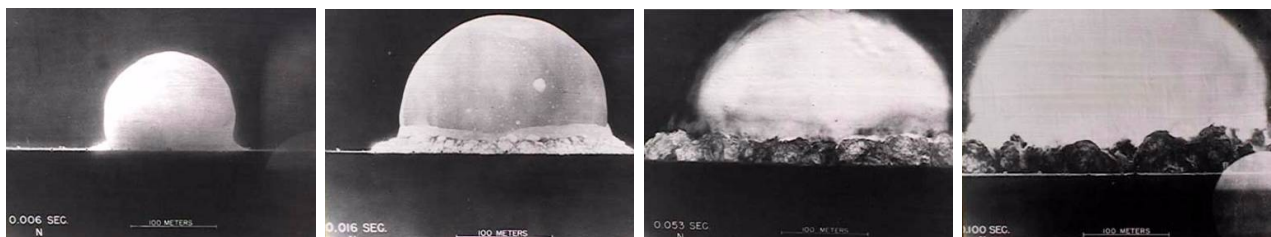
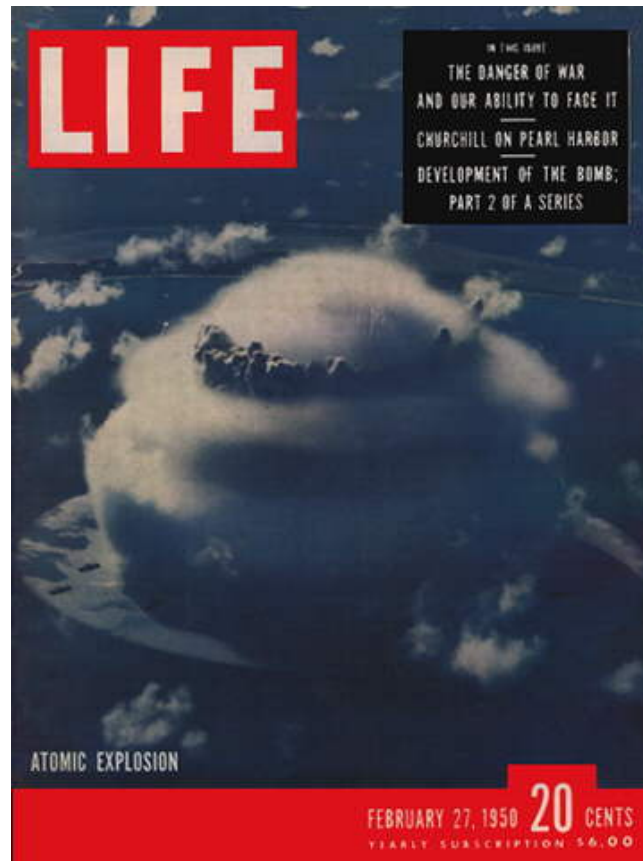


FIGURE 1.1: Les photographies publiées.

1.8 Scalaires et vecteurs

Les quantités physiques sont aussi caractérisées par une autre propriété. Certaines d'entre elles sont décrites par des **vecteurs**, par exemple les forces, la position (voir plus loin), le champ électrique, le champ magnétique. Celles qui ne sont décrites que par un nombre sont qualifiées de **scalaires**, par exemple la distance parcourue, le temps écoulé, la température, la densité.

Une équation physique ne peut relier entre elles que des quantités du même type : un scalaire ne peut pas être égal à un vecteur !

1.9 Coordonnées, vecteur

Commençons par la position d'un point M . Le moyen le plus simple pour cela est d'introduire un **repère**, défini par un point de référence O appelé l'**origine**, et le vecteur $\vec{OM}$ qui sera noté $\vec{r}$, on l'appelle le **vecteur position**. Il dépend du temps si le point M est en mouvement par rapport à l'origine.

Les coordonnées du vecteur $\vec{r}$ dépendent du système de coordonnées choisi. Par exemple, en coordonnées cartésiennes on dresse trois axes orthogonaux Ox , Oy et Oz , et la position de M est donnée par la projection de M sur chacun des axes. En appelant $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires sur ces axes, on a

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad (1.5)$$

On peut aussi, en coordonnées cylindriques, définir un axe Oz et se donner la projection de M sur cet axe, la distance de M à l'axe et un angle indiquant la position de M autour de l'axe.

On introduit un vecteur $\vec{u}_r$ radial et un vecteur $\vec{u}_\theta$ orthoradial, et l'on a

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \quad (1.6)$$

Attention, dans ce cas le vecteur $\vec{u}_r$ dépend du point M considéré !

Il existe beaucoup d'autres systèmes de coordonnées, nous n'utiliserons que ces deux-là pour commencer.

1.10 Résumé

Une grandeur physique est caractérisée par

- une dimension
- une unité
- un caractère scalaire ou vectoriel

2 cinématique

2.1 vitesse

La vitesse est une quantité vectorielle définie comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (1.7)$$

où l'on a introduit une notation utile, le point désignant la dérivée par rapport au temps. On peut facilement écrire les coordonnées de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{v} \equiv \frac{d}{dt} (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \quad (1.8)$$

ce que l'on écrit aussi

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{xyz} \quad (1.9)$$

Attention, l'expression en coordonnées cylindriques recèle un piège, car le vecteur $\vec{u}_r$ dépend de la position, et donc du temps si l'objet est en mouvement.

$$\vec{v} \equiv \frac{d}{dt} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r + \dot{z}\vec{u}_z \quad (1.10)$$

On peut montrer, par exemple en écrivant les coordonnées du vecteur $\vec{u}_r$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, que

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (1.11)$$

On a donc

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \quad (1.12)$$

soit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{r\theta z} \quad (1.13)$$

2.2 accélération

L'accélération est une quantité vectorielle définie comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{a} \equiv \frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z \quad (1.14)$$

ce que l'on écrit aussi

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{xyz} \quad (1.15)$$

où le double point indique une dérivée seconde par rapport au temps. En coordonnées cylindriques,

$$\vec{a} \equiv \frac{d}{dt} (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \quad (1.16)$$

On peut montrer, par exemple en écrivant les coordonnées du vecteur $\vec{u}_\theta$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, que

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r \quad (1.17)$$

ce qui, en utilisant aussi la propriété $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$, conduit à

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta \quad (1.18)$$

2.3 composition des vitesses

Quand on étudie des objets en mouvement, il est souvent utile de changer de point de vue, en suivant l'objet dans son mouvement par exemple, ou au contraire en se plaçant dans un référentiel que l'on considère comme « fixe », et dans lequel l'objet est en mouvement.

Nous n'allons considérer ici que le cas le plus simple, celui d'un changement référentiel par translation. Il s'agit de changer l'origine du repère. Le repère initial $\mathcal{R}$ a une origine O , et le nouveau repère $\mathcal{R}'$ a une origine O' . On a donc

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \quad \text{soit} \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r} \quad (1.19)$$

Ce qui se traduit pour la vitesse

$$\vec{v}' = \vec{v} + \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} \quad \text{soit} \quad \vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \quad (1.20)$$

et pour l'accélération

$$\vec{a}' = \vec{a} + \frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2} \quad \text{soit} \quad \vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} \quad (1.21)$$

Remarque : ces relations seront profondément remises en cause par la relativité restreinte.

Remarque : Si le second référentiel est en translation uniforme par rapport au premier ($\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$ est constante), alors l'accélération est la même dans les deux référentiel. Ce point est important pour ce qui suit, car l'accélération sera identifiée aux forces subies par le système.

1 Principe fondamental de la dynamique

1.1 Référentiel

On appelle **référentiel** l'ensemble formé par un repère d'espace (avec une origine et un système d'axes) et un repère de temps. Il est ainsi possible de spécifier où et quand quelque chose se produit sur le système étudié.

1.2 énoncé

La mécanique est basée sur un principe, qu'on appelle aussi **relation fondamentale de la dynamique**, et que nous noterons RFD. Elle fait intervenir la notion de force, que nous n'avons pas encore définie, et qui est intimement reliée au principe que nous allons énoncer.

*Dans certains référentiels, appelés **référentiels galiléens**, l'accélération des corps est déterminée par les forces qu'ils subissent, par la relation*

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.1)$$

On peut aussi l'écrire en introduisant la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.2)$$

1.3 Principe de relativité galiléenne

D'après la relation 1.21, la RFD s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}'$

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} \quad (2.3)$$

Elle a donc la même forme dans les deux référentiels quand $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$, c'est à dire quand la vitesse $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ est constante. Dit autrement, le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est galiléen que s'il se déduit du référentiel galiléen $\mathcal{R}$ par une translation rectiligne uniforme (à vitesse constante).

Le fait que les lois physiques soient les mêmes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et appelé le principe de relativité galiléenne.

Inversement, la RFD n'est a priori pas valable dans les référentiels non galiléens. Vous verrez dans les cours suivants que l'on peut quand même s'appuyer dessus, en introduisant des forces d'inertie, qui décrivent l'effet de l'accélération du référentiel dans lequel on se trouve par rapport aux référentiels non galiléens.

1.4 Principe de l'action-réaction

Pour passer de l'étude d'un système simple à celle d'un système constitué de plusieurs parties, nous aurons besoin d'utiliser un autre principe important, appelé principe de l'action-réaction ou principe des actions réciproques. Il s'énonce de la façon suivante :

La force exercée par un système 1 sur un système 2 est exactement opposée à la force exercée par le système 2 sur le système 1.

Nous déduirons de ce principe que la quantité de mouvement d'un système composé est conservé si ce système n'est soumis à aucune force. Conceptuellement, il serait plus satisfaisant de montrer ce principe à partir de la conservation de la quantité de mouvement, qui est beaucoup plus fondamentale. D'ailleurs, il existe des situations dans laquelle la quantité de mouvement totale est conservée, mais où les actions réciproques ne sont pas égales. C'est notamment le cas quand une partie de la quantité de mouvement se retrouve sous une forme non mécanique, par exemple en présence d'un champ électromagnétique. Nous n'allons pas considérer ces subtilités dans ce cours.

1.5 Système composé de plusieurs sous-parties

Considérons un système constitué de deux particules ponctuelles, qui peuvent exercer une force l'une sur l'autre, et subir des forces externes. La RFD s'écrit pour chacune d'entre elles

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \sum_i \vec{F}_{i1} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \sum_i \vec{F}_{i2} \quad (2.4)$$

Quand on fait la somme de ces équations, les forces réciproques s'annulent l'une l'autre, selon le principe d'action-réaction. On obtient alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (2.5)$$

où $\vec{p}$ désigne la quantité de mouvement totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ représente toutes les forces extérieures subies par l'ensemble du système.

On peut remarquer que la quantité de mouvement totale est égale à celle du **centre de masse** G , parfois appelé improprement centre de gravité, défini par

$$M_{\text{tot}} \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM}_i \quad (2.6)$$

En effet, en dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient

$$M_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad \text{soit} \quad \vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i \quad (2.7)$$

2 Premières conséquences

2.1 Conservation de la quantité de mouvement

On dit qu'un système est **isolé** quand il n'est soumis à aucune force extérieure. On dit qu'un système est **pseudo-isolé** quand la somme des forces extérieures auxquelles il est soumis est nulle, et quand ces forces ont le même point d'application.

Ces deux situations sont totalement équivalentes du point de vue de la dynamique, le mouvement qui en résulte est le même dans les deux cas, plus précisément

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (2.8)$$

et donc la quantité de mouvement totale est conservée.

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

En multipliant scalairement la RFD par la vitesse $\vec{v}$, on obtient

$$m\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (2.9)$$

où $\vec{F}$ désigne l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le système. Or, on montre facilement que

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \quad (2.10)$$

et donc

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (2.11)$$

En intégrant par rapport au temps, entre deux instants t_A et t_B , auxquels la vitesse vaut respectivement v_A et v_B , on a

$$\left(\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \right) = \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{F} dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.12)$$

La quantité dans le membre de droite est appelée le **travail** fourni par la force $\vec{F}$, on le note souvent $W_{A \rightarrow B}$. La quantité dans le membre de gauche s'écrit aussi plus simplement en introduisant l'**énergie cinétique** E_c définie par

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.13)$$

La relation précédente s'écrit alors

$$\Delta E_c \equiv E_c^B - E_c^A = W_{A \rightarrow B} \quad (2.14)$$

C'est le théorème de l'énergie cinétique, qui peut s'énoncer ainsi : *La variation d'énergie cinétique d'un système est égale à la somme des travaux des forces appliquées.*

Dans un sens, c'est ce théorème qui relie la définition abstraite du travail (une intégrale de la force sur le chemin parcouru) à la notion d'énergie. Si l'on suppose que l'énergie est une quantité qui se conserve, ce théorème indique que l'énergie cinétique gagnée ou perdue est échangée sous forme de travail.

2.3 Énergie potentielle – énergie mécanique

Dans plusieurs situations, les forces peuvent s'écrire sous la forme

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$$

On dit alors que la force est **conservative**. C'est le cas par exemple de la force gravitationnelle, de la force électrostatique. Ce n'est pas le cas des forces de frottement. On peut montrer que dans ce cas, le travail prend une forme simple,

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{\ell} = -d\Phi$$

et donc $W_{A \rightarrow B} = \Phi_A - \Phi_B$, soit

$$\Delta E_c = W_{A \rightarrow B} = -\Delta\Phi \quad (2.15)$$

La quantité Φ est appelée **énergie potentielle** et notée E_p . On a

$$\Delta(E_c + E_p) = 0 \quad (2.16)$$

La quantité $E_m \equiv E_c + E_p$ est appelée **énergie mécanique**. Elle est conservée au cours du mouvement lorsque le système n'est soumis qu'à des forces conservatives.

2.4 Moments de forces, moment cinétique

Dans la définition des systèmes pseudo-isolés que nous avons donnée plus haut, nous avons précisé que les forces devaient s'appliquer au même point. Si ce n'est pas le cas, le système peut se mettre à tourner sur lui-même (donner un exemple). Ceci s'étudie en introduisant la notion de couple de force. Pour cela, on multiplie vectoriellement la RFD par le vecteur position $\vec{r}$, ce qui donne

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i \quad (2.17)$$

Or, le premier terme peut s'écrire autrement en introduisant le **moment cinétique**

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (2.18)$$

et en remarquant que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.19)$$

Le premier terme du membre de droite est nul car $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires, et finalement

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i \quad (2.20)$$

Le second terme est appelée le **moment des forces**, on le note souvent $\vec{\mathcal{L}}$.

Vous étudierez plus en détail le moment cinétique dans d'autres cours, retenez simplement que c'est une mesure de la rotation du système. Pour qu'un système soit à l'équilibre, il faut donc que le moment des forces appliquées soit nul.

Dynamique appliquée à des mouvements simples

1 Les forces

1.1 Inventaire à la Prévert

Il existe apparemment une grande diversité de forces auxquelles peut être soumis un système, par exemple

- la force de gravitation ;
- les forces de cohésion des solides (responsables de la réaction des supports) ;
- la force électrostatique ;
- la force magnétique ;
- différents types de forces de frottement ;
- la force de pression des gaz ou des liquides ;

En fait, on peut toutes les ramener à deux types d'interactions élémentaires :

- l'interaction gravitationnelle ;
- l'interaction électromagnétique.

mais cette remarque n'est pas d'un grand secours en pratique, et il est plus simple d'étudier séparément les différents types de forces, pour mettre en avant leurs caractéristiques.

Nous allons introduire ces forces une par une, et discuter au fur et à mesure certaines de leurs combinaisons qui interviennent souvent en physique.

2 La force de gravitation

2.1 Introduction

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 s'attirent. Si elles sont séparées par une distance r , la force que subit m_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r \quad (3.1)$$

où le vecteur $\vec{u}_r$ est dirigé de m_1 vers m_2 , et où G désigne la **constante universelle de la gravitation**, ou **constante de Newton**, elle vaut $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Dans le cas où une masse m est entourée de plusieurs masses m_i , la force totale subie est la somme vectorielle des forces individuelles. En appliquant cette propriété à un corps sphérique que l'on découpe en une infinité de

masses élémentaires, on peut montrer la propriété suivante :

Un corps dont la masse totale M est distribuée de façon sphérique autour d'un point O exerce la même force d'attraction qu'une masse M ponctuelle placée en O .

Cette propriété n'est pas du tout évidente a priori, elle n'est d'ailleurs vraie que parce que la force varie en $1/r^2$ (elle découle directement du **théorème de Gauss** que vous verrez plus tard). On peut l'appliquer à un couple Terre/objet. À une altitude h de la surface de la Terre, cette force s'écrit

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_\oplus m}{(R_\oplus + h)^2} \vec{u}_r \quad (3.2)$$

où l'on a introduit le rayon de la Terre à $R_\oplus \approx 6378$ km et la masse de la Terre $M_\oplus = 5,976 \times 10^{24}$ kg, et où l'on a noté m la masse du corps. La force de gravité est alors donnée par

$$\vec{F}_p = m\vec{g}^* \quad \text{où} \quad \vec{g}^* \equiv -\frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} \vec{u}_r \quad (3.3)$$

où $\vec{g}^*$ est dirigé vers le centre de la Terre. Au niveau du sol ($h = 0$) on a $g^* \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2.2 Le poids

On introduit généralement la notion de poids, plus pertinente, qui fait aussi intervenir la force centrifuge $\vec{F}_c$ liée à la rotation de la Terre sur elle-même.

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \text{où} \quad \vec{g} \equiv \vec{g}^* + \frac{1}{m} \vec{F}_c \quad (3.4)$$

La force $\vec{F}_c$ n'est pas colinéaire à $\vec{g}^*$ si bien que $\vec{g}$ ne pointe pas dans la même direction que $\vec{g}^*$. Sa norme dépend de la latitude, elle est maximale à l'équateur où sa norme vaut

$$F_c = mR_\oplus \Omega_\oplus^2 \quad (3.5)$$

où la vitesse angulaire de rotation de la Terre vaut $\Omega_\oplus \approx 1/24 \text{ h}^{-1} = 1,16 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. On trouve alors qu'à l'équateur,

$$\frac{F_c}{m} \approx 8,6 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (3.6)$$

ce qui est petit devant g^* . En fait, les variations de densité et de relief de la Terre ont aussi une influence sur $\vec{g}$. La détermination de $\vec{g}$ constitue le domaine de la gravimétrie. On en déduit certaines caractéristiques des roches ou des sous-sols, par exemple pour rechercher des nappes de pétrole.

2.3 Variations de $\vec{g}$

Dans beaucoup de situations, on suppose que $\vec{g}$ est constant dans une région donnée de l'espace. Il s'agit d'une approximation, dans la mesure où $\vec{g}$ varie en direction et en norme d'un point à l'autre. Estimons cette variation, dans le cas d'un mouvement de chute sur une distance verticale $h = 10$ m. La variation de la norme de $\vec{g}$ est donnée par

$$\delta g \approx \left. \frac{dg}{dh} \right|_{h=0} \delta h = \frac{-2GM_\oplus m}{R_\oplus^3} \delta h$$

soit

$$\frac{\delta g}{g} \approx \frac{-2\delta h}{R_\oplus} \approx 3 \times 10^{-6}$$

La valeur de g varie de quelques millièmes sur une hauteur de 10 m. On peut généralement ne pas tenir compte de cette variation, en pratique.

2.4 La chute libre

Un corps soumis à la seule action de la gravité est dit en **chute libre**. L'équation du mouvement s'écrit, en négligeant les effets liés à la rotation de la Terre (force de Coriolis) et en supposant que $\vec{g}$ est constant,

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = \vec{g} \quad (3.7)$$

[subtilité : on a simplifié deux masses dont les significations physiques sont a priori différentes, mais en fait non... masse inertielle et masse gravitationnelle, principe d'équivalence] La masse m n'intervient pas dans l'équation du mouvement. En chute libre (sans frottement), tous les corps ont le même mouvement de chute. On raconte que Galilée a mis cet effet en évidence depuis le haut de la Tour de Pise, mais la réalité historique est douteuse, et les corps sont soumis à des frottements qui gênent l'expérience. Par contre, les astronautes de la mission lunaire Apollo XV ont réalisé (et filmé) cette expérience sur la Lune, avec une plume et un marteau.

En projetant sur un axe z vertical et orienté vers le haut, on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}gt^2 + v_z^0 t + z_0 \quad (3.8)$$

Selon un axe x horizontal, on aurait obtenu $\ddot{x} = 0$ soit $x = x_0 + v_x^0 t$. La particule décrit une parabole (ou une demi-droite).

La trajectoire ne dépend pas de la masse, et si l'on lance plusieurs corps de masses différentes avec la même vitesse initiale, ils vont suivre le même mouvement. Ils n'ont donc pas de mouvement relatif. C'est le principe des vols paraboliques en avion. L'avion suit la parabole de chute libre, si bien que vus depuis l'intérieur, les corps sont en apesanteur.

Vous traiterez plus tard le cas plus général dans lequel on prend en compte la variation de $\vec{g}$ avec la distance au centre de la Terre. C'est le problème de la trajectoire des satellites. Ces trajectoires sont des coniques (parabole, hyperbole, ellipse). La parabole que nous avons obtenue ici est en fait une approximation de l'ellipse réellement parcourue.

Remarque : on aurait pu intégrer directement l'équation vectorielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad (3.9)$$

en

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad (3.10)$$

puis

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (3.11)$$

2.5 Remarque importante sur l'énergie

En partant de l'équation 3.7, on remarque qu'en multipliant par $\vec{v}$ les deux membres,

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{g} \quad (3.12)$$

et en intégrant sur le temps, on obtient

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(z - z_0) \quad (3.13)$$

On introduit l'**énergie potentielle** (ici de pesanteur) définie par

$$E_p = -mgz \quad (3.14)$$

Elle est définie à une constante additive près. La variation d'énergie cinétique E_c est opposée à la variation d'énergie potentielle. La somme $E_c + E_p$ est appelée **énergie totale**. Elle est conservée lors de la chute. Nous retrouverons cette propriété pour de nombreux types de forces (les forces conservatives).

2.6 Potentiel gravitationnel

Cette propriété est très générale, elle est reliée au fait que la force gravitationnelle exercée sur une masse m_2 peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_g = -m_2 \overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{avec} \quad V(r) = gz \quad (3.15)$$

dans le cas où $\vec{g}$ est constant. Dans le cas général, on a pour la force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -m_2 \overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{avec} \quad V(r) = -\frac{Gm_1}{r} \quad (3.16)$$

La quantité $V(r)$ est appelée le **potentiel** gravitationnel. On montre en effet simplement que

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.17)$$

Nous verrons plus loin le lien entre ce potentiel et l'énergie potentielle.

2.7 Aparté sur le gradient

Voir le complément à la fin du chapitre.

3 Les frottements fluides

3.1 Définitions

Les vraies expériences de chute libre sur Terre sont soumises à des frottements. L'air est un fluide et exerce une action sur les corps qui le traversent. L'étude des frottements fluides est un problème complexe de mécanique des fluides, il faut comprendre comment le flux d'air se répartit autour du corps en mouvement. Il existe toutefois quelques comportements simples qui décrivent remarquablement les situations dans lesquelles les vitesses sont grandes ou petites (dans un sens à définir plus loin).

Un corps sphérique de rayon R se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide subit une force de traînée de même direction que $\vec{v}$ mais de sens opposé. Pour des vitesses faibles, cette force est donnée par la **formule de Stokes**

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} \quad (3.18)$$

où η désigne une quantité caractéristique du fluide appelée **viscosité dynamique** et qui vaut $\eta \approx 2 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'air et $\eta \approx 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'eau. Cette force de frottement est d'autant plus importante que l'objet est grand.

Pour des vitesses élevées, le régime change et la force devient proportionnelle à v^2 . On l'écrit alors

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$$

où S désigne l'aire de la section du corps en mouvement dans un plan perpendiculaire à la vitesse, ρ la masse volumique et C_x un coefficient qui dépend de la forme du corps et qu'on appelle **coefficient de traînée**.

Entre les deux, c'est compliqué... La dépendance en v est intermédiaire.

3.2 Exemple

Chute d'un parachutiste sans parachute.

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} = -g \quad (3.19)$$

o l'on a not

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{6\pi\eta R}{m} \quad (3.20)$$

L'équation du mouvement s'écrit aussi en fonction de la vitesse $v \equiv \dot{z}$,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (3.21)$$

Solution exponentielle décroissante,

$$v(t) = v_0 \frac{v}{\tau} = -g \quad (3.22)$$

vitesse limite obtenue quand $\vec{a}$ est nulle, soit

$$v_l = \frac{mg}{6\pi\eta R} \quad (3.23)$$

ce qui donne, pour un corps sphérique de masse volumique ρ ,

$$v_l = \frac{2\rho R^2 g}{9\eta} \quad (3.24)$$

[vérification des dimensions de cette équation] Pour un parachutiste de 70 kg et de 50 cm de rayon, on trouve $v_l \approx 73 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui dépasse largement le cadre de l'hypothèse des vitesses faibles ! Pour une goutte d'eau de 1 mm de rayon (une goutte de pluie), on trouve $v_l \approx 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour une goutte d'eau de 1 à 10 microns de diamètre (typique d'un nuage), on trouve des vitesses comprises entre $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Ces gouttes tombent très lentement, elles sont en suspension.



4 Les frottements solides

4.1 Définition du glissement

Il existe aussi des forces de frottement au contact entre deux solides. Vous étudierez ces forces plus en détail dans un cours de mécanique du solide, mais nous allons ici évoquer le glissement, un phénomène important dans

matériaux	f_0	f
acier sur acier	0,6	0,4
bois sur bois	0,5	0,3
téflon sur acier	0,04	0,04
pneu sur béton sec	1	0,7
acier sur glace	0,1	0,05

TABLE 3.1: Quelques valeurs typiques de coefficients de frottement statique et de coefficients de frottement dynamique.

la vie de tous les jours. On dit qu'un solide glisse sur un autre lorsqu'ils sont animés d'un mouvement relatif de translation.

4.2 Les lois de Newton relatives au frottement solide

Pour cette introduction, considérons un solide capable de glisser (ou non) sur une surface fixe. Séparons la force de réaction qu'exerce la surface (le support) sur le solide en une composante $\vec{N}$ normale à la surface et une composante tangentielle $\vec{T}$. Le frottement peut être décrit par deux lois empiriques (et approchées) appelées **lois de Newton** :

- si les corps glissent l'un sur l'autre, les deux composantes sont reliées par

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$$

où f désigne le **coefficient de frottement de glissement**, que l'on appelle aussi **coefficient de frottement dynamique** ou **coefficient de frottement cinétique**.

- les corps n'ont pas de mouvement relatif si la force tangentielle a une norme inférieure à une valeur de seuil $\|\vec{T}_0\|$ vérifiant

$$\|\vec{T}_0\| = f_0\|\vec{N}\|$$

où f_0 désigne le **coefficient de frottement statique**, que l'on appelle aussi **coefficient d'adhérence**.

Les deux coefficients f et f_0 dépendent de l'état des surfaces en contact, des matériaux, de la température. Dans beaucoup de cas, $f_0 > f$ si bien qu'il faut fournir un à-coup pour faire glisser un solide initialement au repos.

4.3 Application : pousser une machine à laver

Pour mettre en mouvement latéral un objet de masse m posé au sol, il faut fournir une force au moins égale au frottement solide. La force normale est alors égale à mg , si bien qu'il faut fournir une force

$$F > f_0 mg \quad (3.25)$$

Pour une machine à laver de 100 kg, avec $f_0 \sim 1$, on trouve une force minimale d'environ 1000 N.

5 Force électrostatique

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 s'attirent ou se repoussent. Si elles sont séparées par une distance r , la force que subit q_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (3.26)$$

où le vecteur $\vec{u}_r$ est dirigé de q_1 vers q_2 , et où ϵ_0 désigne la **permittivité diélectrique du vide**, elle vaut $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

5.1 Remarque sur l'énergie

6 Force de rappel d'un ressort

Longueur au repos ℓ_0 , Expression de la force en fonction de l'allongement,

$$\vec{F} = -k\vec{\ell}$$

où k désigne la constante de raideur, qui s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

6.1 Remarque sur l'énergie

$$E_p = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2$$

7 Mouvement d'un point matériel guidé

7.1 Mouvement sur un plan incliné

7.2 Mouvement sur un cercle

Point sur un cercle, coordonnées, vitesse et accélération,

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta & \dot{x} &= R \dot{\theta} \cos \theta & \ddot{x} &= R \ddot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ y &= R \cos \theta & \dot{y} &= -R \dot{\theta} \sin \theta & \ddot{y} &= -R \ddot{\theta} \sin \theta - R \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{aligned} \quad (3.27)$$

La RFD s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= R \ddot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -g &= -R \ddot{\theta} \sin \theta - R \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{aligned} \quad (3.28)$$

ce qui donne finalement

$$g \sin \theta = -R \ddot{\theta} \quad (3.29)$$

Pour un cercle orienté dans l'autre sens on aurait un signe différent.

7.3 Équilibres

équilibre quand la résultante des forces est nulle et quand il n'y a pas de mouvement initial. Dans l'exemple précédent, $\theta = 0$ est position d'équilibre.

équilibre stable, équilibre instable.

8 Le gradient

8.1 Définition

La notion de gradient est défini dans un espace de dimension n quelconque. Nous allons ici considérer un espace de dimension 2, pour simplifier les notations, et nous allons noter x et y les coordonnées cartésiennes

dans cet espace. Le gradient agit sur les fonctions $f(x, y)$, les applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, qui à chaque point de l'espace (ici du plan) associent un nombre.

Il définit en chaque point de l'espace un vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$, dont les coordonnées sont données par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \equiv \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

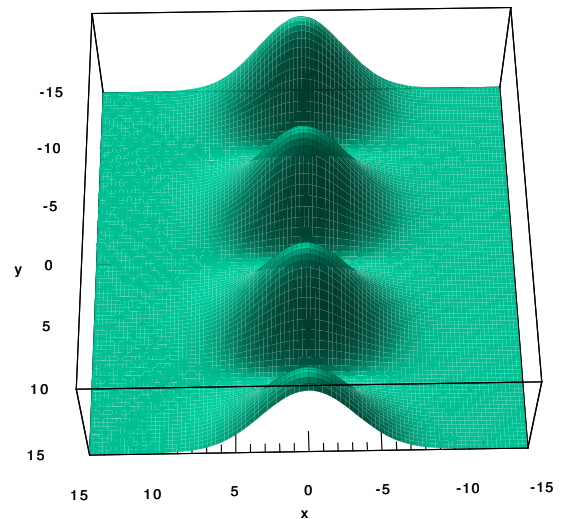
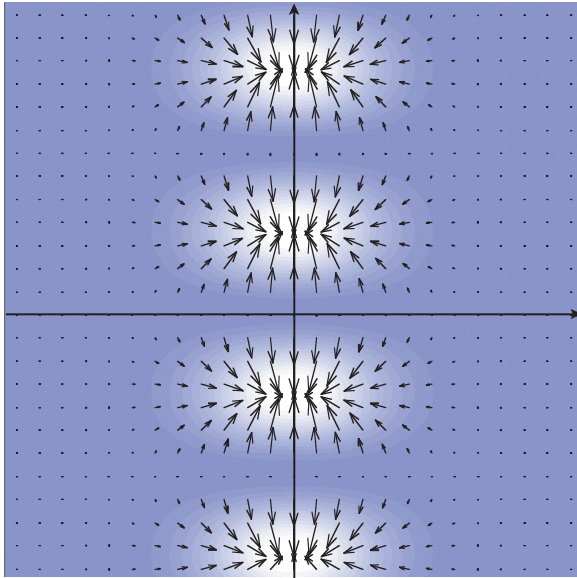
On le note aussi avec le symbole $\vec{\nabla}$ (« nabla »), un opérateur vectoriel de composantes

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Le gradient est un exemple simple d'**opérateur différentiel vectoriel**.

8.2 Exemple

Considérons la fonction $f(x, y) = \left[e^{-x^2/30} \cos(x/10) \cos(y/3) \right]^2$. On peut calculer les dérivées partielles $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$, et tracer les vecteurs correspondants. On obtient la figure suivante.



8.3 Propriétés

La direction du vecteur gradient indique, en chaque point, la direction dans laquelle la fonction f varie le plus rapidement. Si la fonction représente l'altitude z en fonction de la position sur une carte, le vecteur gradient indique la direction de plus grande pente. Ce vecteur pointe dans la direction des f croissants.

Quand on se déplace dans la direction de $\vec{\nabla} f$, la fonction f augmente. Plus précisément, on a la propriété

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} \quad (3.32)$$

où $d\vec{l}$ représente un déplacement élémentaire et df la variation de f à l'issue de ce déplacement. C'est la généralisation à une fonction de plusieurs variables de

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

On en déduit immédiatement que $df = 0$ quand le déplacement est orthogonal au gradient. En effet, le vecteur gradient est orthogonal aux lignes ou aux surfaces sur lesquelles f est constantes (pour une carte topographique, il s'agit des lignes de niveau).

Pour un déplacement AB petit, la relation précédente indique que

$$f(B) - f(A) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{AB} \quad (3.33)$$

Notons aussi que d'après la définition, le vecteur gradient est nul quand les dérivées de f sont nulles, c'est-à-dire en particulier quand f est extrémale (mais pas seulement, par exemple au niveau des cols entre les pics de la figure précédente, le gradient est nul mais la fonction n'est ni maximale, ni minimale. Cette propriété est déjà vraie pour les fonctions d'une seule variable, qui peuvent avoir une dérivée nulle sans être extrémales).

Important en soi, important aussi pour l'étude des ondes. On étudie généralement les oscillateurs uniques, puis les oscillateurs couplés, puis la propagation des ondes dans un milieu continu. Nous allons ici aborder la première étape.

1 Oscillateurs mécaniques libres

Certains systèmes peuvent se mettre à osciller quand on les déplace depuis une position d'équilibre. Ce sont des oscillateurs. Quand le système est perturbé à un instant donné puis relâché, livré à lui-même, on parle d'**oscillateur libre**. Quand il est soumis à une perturbation de façon continue, on parle d'**oscillateur forcé**.

1.1 Système masse-ressort sans frottement

Equation du mouvement

$$m\ddot{x} + k(x - x_0) = 0 \quad (4.1)$$

en choisissant l'origine des x en x_0 , cette équation se réécrit

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.2)$$

On la réécrit sous la forme

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.3)$$

où $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ est appelé la **pulsation propre**. Le mouvement est alors décrit par

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (4.4)$$

On détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$, on a

$$0 = A \quad \text{et} \quad v_0 = \omega_0 B \quad (4.5)$$

On trouve donc que

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (4.6)$$

1.2 Chute libre à travers la Terre

D'après le théorème de Gauss, un corps de masse m en train de chuter dans un tunnel qui traverserait la Terre de part en part ressent une force gravitationnelle donnée par

$$F = \frac{GmM(r)}{r^2} \quad \text{où} \quad M(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3} \quad (4.7)$$

et donc l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi\rho^3 G}{3} \times r \quad (4.8)$$

soit

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{4\pi\rho^3 G}{3}} \quad (4.9)$$

1.3 Système masse-ressort avec frottement fluide

Equation du mouvement, en choisissant l'origine des x en x_0 , cette équation se réécrit

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (4.10)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.11)$$

où l'on a défini le taux d'amortissement

$$\tau \equiv \frac{\alpha}{m}$$

1.4 Résolution de l'équation différentielle

Équation générale

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad \text{avec} \quad a = 1/\tau \quad \text{et} \quad b = \omega_0^2 \quad (4.12)$$

On cherche une solution de la forme

$$x = Ae^{\beta t} \quad (4.13)$$

ce qui donne

$$\beta^2 x + a\beta x + bx = 0 \quad \text{soit} \quad \beta^2 + a\beta + b = 0 \quad (4.14)$$

C'est une équation sur l'inconnue β . On calcule le discriminant

$$\Delta = a^2 - 4b \quad (4.15)$$

Il existe trois types de solutions, selon que $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$. On définit le **facteur de qualité** $Q \equiv \omega_0\tau$.

Régime aperiodique (très amorti) Quand $\Delta > 0$ (frottements forts, $2\omega_0\tau < 1$ soit $Q < 1/2$), la solution s'écrit

$$\beta = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad \text{soit} \quad x = e^{-at/2} \left\{ Ae^{\sqrt{a^2 - 4b}t/2} + Be^{-\sqrt{a^2 - 4b}t/2} \right\} \quad (4.16)$$

On pose

$$\omega \equiv \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad (4.17)$$

ce qui permet de réécrire la solution générale sous la forme

$$x = e^{-at/2} \{Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\} \quad (4.18)$$

On détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$, on a

$$0 = A + B \quad \text{et} \quad v_0 = \omega \times (A - B) - \frac{1}{2\tau}(A + B) \quad (4.19)$$

On trouve donc que

$$A = -B = -\frac{v_0}{\omega} \quad \text{et donc} \quad \boxed{x = \frac{v_0}{\omega} \times e^{-t/2\tau} \times \sinh(\omega t)} \quad (4.20)$$

Régime pseudo-périodique (oscillant) Quand $\Delta < 0$ (frottements faibles, $2\omega_0\tau > 1$ soit $Q > 1/2$), la solution s'écrit

$$\alpha = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} \quad \text{soit} \quad x = e^{-at/2} \left\{ Ae^{i\sqrt{4b-a^2}t/2} + Be^{-i\sqrt{4b-a^2}t/2} \right\} \quad (4.21)$$

On peut réécrire cette expression en introduisant de nouveau une pulsation

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{soit} \quad x = e^{-at/2} \{Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\} \quad (4.22)$$

La pulsation ω est appelée **pseudo-pulsation**. On a alors

$$x = e^{-t/2\tau} \{A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)\} \quad (4.23)$$

De nouveau, on détermine les constantes A' et B' en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$, on a

$$0 = A' \quad \text{et} \quad v_0 = \omega \times B' - \frac{1}{2\tau}A' \quad (4.24)$$

On trouve donc que

$$A' = 0 \quad \text{et} \quad B' = \frac{v_0}{\omega} \quad (4.25)$$

soit

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega} \times e^{-t/2\tau} \times \sin \omega t} \quad (4.26)$$

Régime critique Quand $\Delta = 0$ ($2\omega_0\tau = 1$ soit $Q = 1/2$), la racine de l'équation caractéristique est double

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad (4.27)$$

Dans ce cas, la solution s'écrit

$$x = e^{-at/2}(At + B) \quad (4.28)$$

De nouveau, on détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$, on a

$$0 = B \quad \text{et} \quad v_0 = A - \frac{a}{2}B \quad (4.29)$$

On trouve donc que

$$\boxed{x = v_0 t \times e^{-t/2\tau}} \quad (4.30)$$

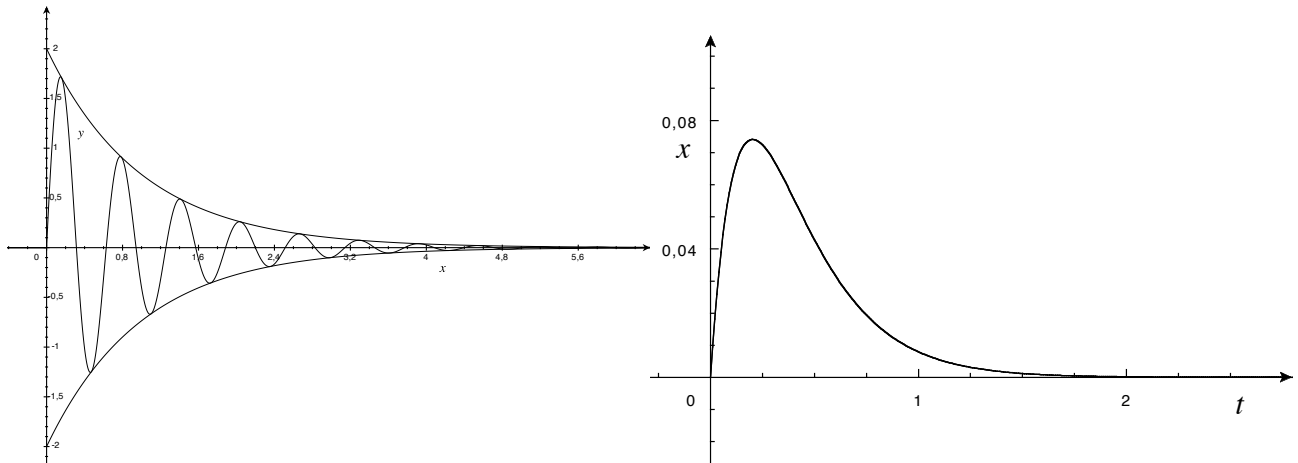


FIGURE 4.1: A gauche, régime oscillant ; à droite, régime fortement amorti.

1.5 Discussion

On voit le rôle de ω_0 et τ . Plus τ est faible, plus le système peut osciller longtemps. Ceci est souhaitable dans certaines applications (balancier d'horloge), mais pas dans d'autres (amortisseurs, instrument de mesure). Plus τ est important, plus le mouvement est contrarié, et plus les oscillations s'amortissent vite, et plus le déplacement maximal est faible. Là encore, c'est souhaitable dans certaines applications mais pas dans d'autres.

1.6 Pendule pesant

On a trouvé l'équation dans une section précédente, et pour les petites oscillations, l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ conduit à l'équation des oscillateurs que nous venons d'étudier.

2 Oscillateurs mécaniques forcés – résonance

Considérons un oscillateur du type précédent, que l'on soumet à une excitation périodique. Il peut s'agir, par exemple, d'un ressort qui subit une force $F(t)$. On s'intéresse à une force sinusoïdale,

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (4.31)$$

Attention, la pulsation Ω n'a rien à voir avec la pulsation propre ω_0 ni la pseudo-pulsation ω .

2.1 Système masse-ressort avec frottement fluide

L'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad (4.32)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t \quad (4.33)$$

2.2 Régime transitoire

Quelle que soit la solution que nous allons trouver, on pourra lui ajouter les solutions de l'oscillateur libre sont aussi solution de cette équation, puisque si on les y injecte, le terme de gauche donne zéro. Ce terme supplémentaire décrit le régime transitoire, il décroît au cours du temps sur une échelle τ . Nous allons maintenant nous intéresser au régime permanent.

2.3 Régime permanent – résolution de l'équation différentielle

On cherche des solutions de la forme

$$x = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \quad (4.34)$$

Il est plus simple d'utiliser les nombres complexes. L'équation à résoudre est la partie réelle de l'équation complexe

$$\ddot{x} + \frac{x}{\tau} + \omega_0^2 x = f e^{i\Omega t} \quad (4.35)$$

On va plutôt résoudre celle-ci puis prendre la partie réelle à la fin. C'est parti. On cherche des solutions de la forme

$$x = x_0 e^{i\Omega t} \quad (4.36)$$

En remplaçant dans l'équation 4.35, on obtient

$$-\Omega^2 x_0 + i \frac{\Omega}{\tau} x_0 + \omega_0^2 x_0 = f \quad (4.37)$$

soit

$$x_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega/\tau} \quad (4.38)$$

La réponse est un mouvement sinusoïdal d'amplitude $|x_0|$, qui peut être déphasé par rapport à la force excitatrice.

2.4 Résonance

L'amplitude est donnée par

$$|x_0| = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2}} \quad (4.39)$$

On peut réécrire cette expression en introduisant $\zeta = \Omega/\omega_0$ et Q ,

$$|x_0| = \frac{f}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + \zeta^2/Q^2}} \quad (4.40)$$

La vitesse s'écrit

$$\dot{x} = i\Omega x_0 e^{i\Omega t} \equiv v_0 e^{i\Omega t} \quad (4.41)$$

où

$$|v_0| = \frac{f\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2}} \quad (4.42)$$

soit en introduisant ζ et Q

$$|v_0| = \frac{f\zeta}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + \zeta^2/Q^2}} \quad (4.43)$$

On peut calculer la condition sur Q pour que ces courbes passent par un maximum. Pour la courbe d'amplitude,

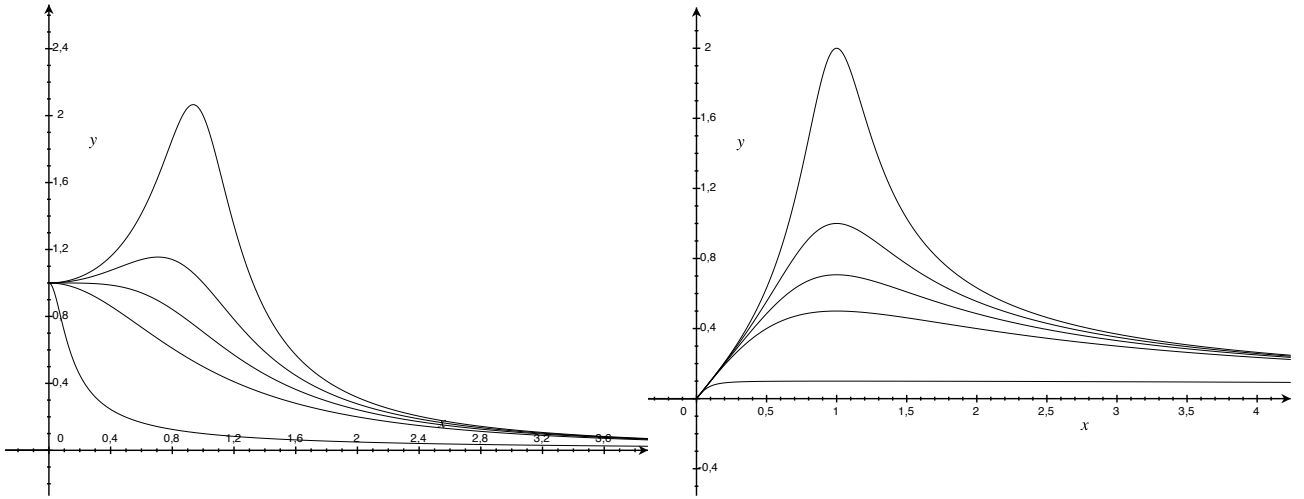


FIGURE 4.2: A gauche, résonance en amplitude ; à droite, résonance en vitesse.

il y a un maximum quand

$$\frac{d|x_0|}{d\zeta} = 0 \quad \text{soit} \quad -2\zeta(1 - \zeta^2) + \frac{2\zeta}{Q^2} = 0 \quad (4.44)$$

ce qui revient à

$$\zeta^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} = 0 \quad (4.45)$$

Ceci n'est possible que si $Q > 1/\sqrt{2}$. La résonance en amplitude a lieu pour une pulsation inférieure à la pulsation propre ω_0 .

Pour la vitesse, on montre qu'il y a toujours un maximum.

2.5 Déphasage

La réponse est déphasée par rapport à l'excitation. En effet, la partie réelle de

$$x = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega/\tau} \times e^{i\Omega t} \quad (4.46)$$

s'écrit

$$\mathcal{Re}(x) = |x_0| \cos(\Omega t + \phi) \quad (4.47)$$

avec

$$\tan(\phi) = \frac{\Omega/\tau}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (4.48)$$

où ϕ est l'avance de la réponse par rapport à l'excitation (quand $\phi > 0$, la réponse a une phase nulle pour $t = -\phi/\Omega$, alors que l'excitation a une phase nulle pour $t = 0$, la réponse est donc bien en avance sur l'excitation).

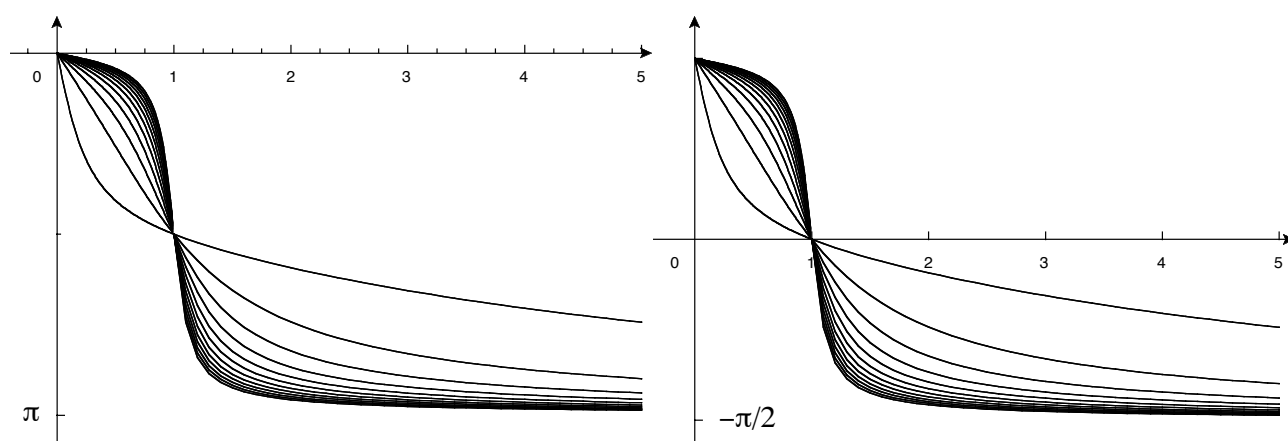


FIGURE 4.3: A gauche, résonance en amplitude ; à droite, résonance en vitesse.

Statique des fluides

Nous allons commencer à nous intéresser à des systèmes un peu plus compliqués, les fluides. Ce sont des milieux déformables, par exemple des liquides ou des gaz, et leurs propriétés peuvent varier d'un point à l'autre du milieu. Nous n'allons ici considérer que des fluides au repos et soumis à la gravité. Cette étude constitue le domaine de la **statique des fluides**.

1 Propriétés des fluides

1.1 Hypothèse du milieu continu

Les fluides sont constitués d'atomes et de molécules. Toutefois, quand on s'intéresse à un échantillon assez étendu pour contenir un grand nombre de particules, on peut décrire les fluides comme des milieux continus. Cette limite est assez facilement atteinte en pratique, un cube d'un micron de côté rempli d'eau contient environ 10^{11} molécules.

1.2 masse volumique

En chaque point du fluide, on définit la **masse volumique** comme la masse d'un petit élément de fluide centré sur le point par le volume de cet élément,

$$\rho \equiv \frac{\delta m}{\delta V} \quad (5.1)$$

Dans les unités du système SI, elle s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. L'eau a une masse volumique de l'ordre de $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et l'air dans les conditions usuelles de $1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On définit aussi la **densité**, comme le rapport entre la masse volumique du milieu et celle d'un milieu de référence, par exemple l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz.

1.3 pression

Lorsque l'on place une surface dS dans un fluide, elle subit une force. Dans le cas général cette force peut être dirigée dans n'importe quelle direction, mais dans beaucoup de situations, elle est dirigée suivant la normale à la surface, avec un sens allant du fluide vers la surface (le fluide pousse sur la surface). On montre que dans

beaucoup de fluides, la norme de la force ne dépend pas de la direction selon laquelle est orientée la surface dS . On définit alors la **pression** p par la relation

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS \quad (5.2)$$

C'est une force par unité de surface. Dans le système d'unités SI, on l'exprime en pascal, $1 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. La pression atmosphérique est de l'ordre de $10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa}$.

1.4 Autres grandeurs

On peut définir plusieurs autres grandeurs relatives au fluide, sa température, son degré d'humidité, etc. Nous ne nous intéressons ici qu'aux quantités directement reliées aux forces exercées par le fluide. Vous verrez en thermodynamique que la masse volumique et la pression d'un gaz dépendent de la température, ces trois quantités étant reliées par une équation d'état.

2 Equation de la statique des fluides

2.1 Distribution volumique des forces de pression

Nous nous intéressons maintenant aux forces subies par un corps plongé dans un fluide. Ce corps subit une force de pression sur l'ensemble de sa surface. Découpons-le en surfaces planes. Considérons pour commencer deux surfaces parallèles aux plans xOy , séparées d'une petite distance δz . Ce système est soumis à deux forces,

$$d\vec{F}_p = p(z)\vec{u}_z dS - p(z + \delta z)\vec{u}_z dS \quad (5.3)$$

ce qui peut se développer en

$$d\vec{F}_p = p(z)\vec{u}_z dS - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right] \vec{u}_z dS = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta z \vec{u}_z dS = -\frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z dV \quad (5.4)$$

Pour un cube constitué de 6 surfaces dS , le même raisonnement montre que la force $d\vec{F}$ a pour composantes

$$d\vec{F}_p = - \begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} \times dV \quad (5.5)$$

On est donc en présence d'une distribution volumique de force. On peut écrire cette relation en faisant intervenir le vecteur gradient, introduit au chapitre précédent.

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

et donc finalement

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} p \times dV = -\vec{\nabla} p dV \quad (5.7)$$

La force subie par un système de taille finie s'en déduit alors,

$$\vec{F}_p = - \iiint \overrightarrow{\text{grad}} p \times dV \quad (5.8)$$

Le vecteur $-\overrightarrow{\text{grad}} p$ représente donc une densité volumique de force. On remarque que cette force est nulle si la pression est homogène. Ce sont les différences de pression qui peuvent mettre en mouvement un corps.

2.2 équation fondamentale

Si l'on considère un fluide au repos et soumis à la gravité, cette dernière se traduit par une force. Plus précisément, si l'on s'intéresse à un élément de fluide de masse dm , que l'on isole par la pensée, la force subie s'écrit

$$d\vec{F}_g = dm \times \vec{g} \quad (5.9)$$

où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur. En écrivant que $dm = \rho dV$ et qu'au repos, la somme des forces subies par chaque élément de fluide est nulle, on a

$$d\vec{F}_g + d\vec{F}_p = 0 = \rho dV \times \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p \times dV \quad (5.10)$$

et l'on arrive finalement à

$$\boxed{\rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} p} \quad (5.11)$$

Le gradient de la pression est toujours dirigé selon $\vec{g}$. Les courbes d'égale pression, appelées les **isobares** sont donc horizontales. (remarquons que dans un référentiel non galiléen ce ne serait pas nécessairement le cas). On peut alors projeter cette relation sur l'axe vertical, ce qui donne, en orientant positivement cet axe vers le haut,

$$-\rho g = \frac{dp}{dz} \quad (5.12)$$

2.3 Application aux fluides incompressibles

On dit que le fluide est **incompressible** si sa densité est constante. C'est le cas, en bonne approximation, des liquides. On peut alors intégrer l'équation fondamentale entre deux altitudes z_1 et z_2 , ce qui donne

$$p(z_2) = p(z_1) - \rho g \times (z_2 - z_1) \quad (5.13)$$

La pression diminue avec l'altitude, ou augmente quand l'on descend, et ce d'autant plus fortement que la masse volumique du milieu est importante. Ainsi, l'augmentation de pression est environ 1000 fois plus élevée à un mètre de profondeur dans l'eau que dans l'air.

2.4 Calcul typique

Tube en U, contenant un liquide de masse volumique ρ_1 , et dans une des branches un liquide de masse volumique $\rho_2 < \rho_1$ qui flotte sur le premier. Calculer les propriétés de l'équilibre ($\rho_1 \ell_1 = \rho_2 \ell_2$).

2.5 Exemples

Pression dans une colonne d'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) et de mercure ($\rho = 13,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) dans le cas où le haut est soumis au vide.

Conséquence : a priori il est impossible de pomper de l'eau à plus de 10 mètres de hauteur en aspirant. On y arrive toutefois en utilisant plusieurs pompes successives, en remplaçant l'eau pompée sous la pression atmosphérique au niveau de chacune d'entre elles, ou en poussant l'eau par le bas.

On peut aussi se placer dans des conditions dynamiques, le béliet hydraulique permet ainsi d'atteindre des hauteurs de pompage de 100 mètres.

Expérience du tonneau de pascal.

2.6 Force sur les parois d'un récipient

La force de pression sur une surface étant indépendante de son orientation, et ne dépendant que de l'altitude z , on en déduit que la force subie par les parois d'un récipient contenant un fluide ne dépend pas de la forme du récipient. En particulier, la force subie par le fond est donnée par $F = \rho ghS$. Chaque unité de surface est donc soumise à une force égale au poids du liquide contenu dans une colonne de hauteur h , qui peut être supérieur au poids du liquide qui le surplombe directement.

Considérons la paroi d'un barrage, soumise à l'action d'une hauteur h de fluide. La résultante des forces auxquelles est soumis le barrage à la hauteur z s'écrit

$$dF(z) = \rho g z dS = \rho g z dz L \quad (5.14)$$

en choisissant l'origine $z = 0$ à la surface de l'eau et où L est la largeur de l'élément de surface considéré. En intégrant sur la hauteur du barrage, on trouve

$$F = \frac{1}{2} \rho g h^2 L \quad (5.15)$$

Cette force a la même norme que le poids d'une colonne d'eau de hauteur $h/2$ pesant sur la surface hL du barrage. Pour déterminer le point d'application de cette force, calculons son moment par rapport au point O ,

$$d\mathcal{M}_o(z) = \rho g z^2 dz L \quad (5.16)$$

et donc en intégrant

$$\mathcal{M}_o(z) = \frac{1}{3} \rho g h^3 L \quad (5.17)$$

Pour que le moment de la force F soit donnée par cette expression, elle doit s'appliquer à une profondeur $z = 2h/3$. Ce point est appelé **centre de poussée**.

2.7 Cas d'un fluide compressible

Pour un gaz, l'hypothèse du fluide incompressible est en général manifestement violée. L'équation fondamentale s'écrit toujours sous la forme 5.11, mais la masse volumique ρ peut dépendre de l'altitude. Pour un gaz, la masse volumique dépend de deux autres caractéristiques, la température T et la pression p . Vous verrez en thermodynamique que la relation entre ρ , p et T est appelée **équation d'état**, il en existe plusieurs selon les gaz, mais dans un très grand nombre de situations on peut utiliser la **loi des gaz parfaits**. On la connaît mieux en faisant intervenir le volume V ,

$$pV = nRT \quad (5.18)$$

où n est le nombre de moles de gaz et R est la constante des gaz parfaits, valant $R = 8,314472 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. En divisant la relation précédente par le volume et en multipliant par la masse molaire M , on arrive à

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad (5.19)$$

En écrivant la relation 5.11, on obtient la **loi barométrique**. [Aparté sur la résolution de ce type d'équation différentielle]. Elle s'écrit

$$p = p_0 e^{-z/z_0} \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{RT}{Mg} \quad (5.20)$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température, M la masse molaire et p_0 la pression à l'altitude $z = 0$.

On peut remarquer que cette expression s'écrit aussi, en utilisant le fait que $R = \mathcal{N}_A k_B$,

$$p = p_0 \times e^{-mgz/k_B T} \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{RT}{Mg} \quad (5.21)$$

où m est la masse de chaque constituant du gaz. Vous verrez plus tard que cette expression est une forme de la **distribution de Maxwell-Boltzmann**, qui indique comment les constituants d'un système à l'équilibre à la température T se distribuent en énergie (ici, mgz est l'énergie potentielle de pesanteur).

3 Poussée d'Archimède

3.1 Énoncé

Considérons un fluide au repos, soumis à la pesanteur $\vec{g}$ que l'on suppose constante. Si l'on isole par la pensée un volume de fluide, celui-ci est soumis à des forces dont la résultante et le moment sont nuls. Il s'agit des forces de pression et de la pesanteur. La résultante des forces de pression est donc égale à l'opposé de la force de pesanteur. Comme les forces de pression sont des forces de surface, si l'on remplace ce volume par un corps de même forme et de même taille, il est soumis aux *mêmes* forces que le fluide qu'il remplace. Ceci constitue le théorème d'Archimède.

Un corps plongé dans un fluide est soumis à une force égale en norme au poids du liquide dont il occupe le volume, appliquée au centre de gravité de ce volume

Cette force est appelée **poussée d'Archimède**, elle s'écrit

$$\vec{F}_A = -m_{\text{fluide}}\vec{g} \quad (5.22)$$

3.2 Premières conséquences

La densité moyenne du corps détermine le sens de la force totale (pression plus pesanteur) à laquelle il est soumis. La résultante de forces subies s'écrit

$$\vec{F}_A + \vec{F}_g = (m_{\text{corps}} - m_{\text{fluide}})\vec{g} = (\rho_{\text{corps}} - \rho_{\text{fluide}})V\vec{g} \quad (5.23)$$

Un corps moins dense que le fluide dans lequel il est plongé subit une force dirigée vers le haut. On se sent léger dans l'eau, et plus léger dans l'eau salée. Le corps peut éventuellement finir par atteindre la surface et flotter.

3.3 Applications

Corps flottant, exemple de la boîte rectangulaire. Remarque sur la stabilité dans le cas d'un fond lourd, puis dans le cas d'un couvercle lourd.



FIGURE 5.1: thermomètre de Galilée. La densité du liquide, et donc la flottaison d'un corps de densité donnée, dépend la température. En calibrant correctement les corps, on obtient un thermomètre.