Électromagnétisme

PHYS 301

Complément de cours 1

Ce complément présente le calcul de la force électromotrice (f.é.m dans la suite) d'induction, due au mouvement d'une spire indéformable dans un champ magnétique $\vec{B}$ constant (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps, mais il peut ne pas être uniforme, c'est-à-dire varier d'un point à l'autre).

Calcul de la f.é.m. induite

Lorsqu'on déplace la spire à la vitesse $\vec{v}$, les électrons contenus dans la spire subissent une force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

qui les met en mouvement, ce qui est responsable de l'apparition d'un courant électrique dans la spire, qu'on appelle courant induit. Tout se passe comme si on avait placé dans la spire un générateur de force électromotrice e. On rappelle (voir le cours d'électrocinétique) que dans un véritable générateur (une pile), c'est un champ électrique $\vec{E}$ qui met les électrons en mouvement en leur appliquant une force

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

et la f.é.m est alors donnée par

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

où l'intégrale porte sur la spire entière, formant une courbe fermée, d'où le symbole $\oint$. Le vecteur $d\vec{\ell}$ est orienté selon le sens positif qu'on a choisi d'adopter. Ici, dans le cas de l'induction, tout se passe comme si on avait un champ électrique

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

qu'on appelle **champ électromoteur**. La f.é.m induite vaut donc

$$\boxed{e = \oint \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell}}$$

Nous allons exprimer cette quantité d'une manière différente. Intéressons-nous à la spire à un temps t, puis à un instant ultérieur $t + \delta t$. La spire s'est déplacée en bloc de $\delta\vec{x} = \vec{v}\,\delta t$. Calculons (nous verrons pourquoi c'était intéressant de le faire une fois le calcul terminé) le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers la surface latérale balayée par la spire, c'est-à-dire la surface qui va de la spire au temps t à la spire au temps $t + \delta t$. On l'appelle surface **coupée** par la spire. Calculons d'abord le flux à travers un élément de surface de côtés $d\vec{\ell}$ et $\delta\vec{x}$. L'élément de surface vaut

$$d\vec{S} = d\vec{\ell} \wedge \delta\vec{x}$$

et le flux élémentaire vaut $\vec{B} \cdot d\vec{S}$. Le flux coupé pendant le temps δt vaut donc

$$\delta\varphi_c = \oint \left(d\vec{\ell} \wedge \delta\vec{x}\right) \cdot \vec{B}$$

Comme $\delta\vec{x} = \vec{v}\,\delta t$, cela s'écrit aussi

$$\delta\varphi_c = \delta t \times \oint \left(d\vec{\ell} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{B}$$

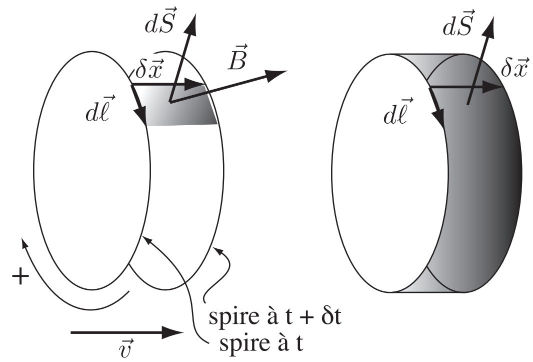

FIGURE 1 – Schéma représentant la spire aux temps t et $t + \delta t$, ainsi que les notations utilisées dans le texte.

Finalement, en utilisant la propriété du produit mixte selon laquelle $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$, on a

$$\boxed{\delta\varphi_c = \delta t \times \oint \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell}}$$

En regroupant les deux expressions encadrées, on a donc

$$e = \frac{\delta\varphi_c}{\delta t}$$

Remarque sur les signes

Pour calculer un flux à travers une surface, il faut commencer par déterminer le sens de la normale, c'est-à-dire du vecteur surface $d\vec{S}$ qui intervient dans le produit scalaire $\vec{B} \cdot d\vec{S}$. Pour éviter les ambiguïtés, on décide d'orienter les normales de façon sortante : les vecteurs $d\vec{S}$ pointent vers l'extérieur de la surface (cette notion peut parfois poser problème, j'y reviendrai à la fin). Dans le calcul qui précède, c'est le cas de $d\vec{S} = d\vec{\ell} \wedge \delta\vec{x}$, dans la situation représentée sur le dessin. Toutefois, si on refait tout le raisonnement et tout le calcul avec une vitesse $\vec{v}$ dirigée dans l'autre sens, le vecteur $\delta\vec{x}$ aurait été dirigé dans l'autre sens et la normale sortante aurait été dirigée selon $d\vec{S} = \delta\vec{x} \wedge d\vec{\ell}$ au lien de $d\vec{\ell} \wedge \delta\vec{x}$. On aurait alors trouvé

$$\delta\varphi_c = -\delta t \times \oint \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell} \quad \text{et} \quad e = -\frac{\delta\varphi_c}{\delta t}$$

Nous allons écrire la loi de l'induction sous une autre forme, dans laquelle cette ambiguïté de signe n'est pas présente.

Loi de Faraday

Plaçons nous tout d'abord dans le premier cas, où la spire se déplace vers la droite, et calculons le flux de $\vec{B}$ à travers la surface délimitée par la spire elle-même, cette fois (voir la figure 2). Notons ce flux $\varphi(t)$ et $\varphi(t + \delta t)$, selon la position occupée par la spire. On voit sur le schéma que

$$\varphi(t) = \varphi(t + \delta t) + \delta\varphi_c$$

Or,

$$\varphi(t + \delta t) = \varphi(t) + \delta t \times \frac{d\varphi}{dt}$$

et donc

$$\delta t \times \frac{d\varphi}{dt} = -\delta\varphi_c$$

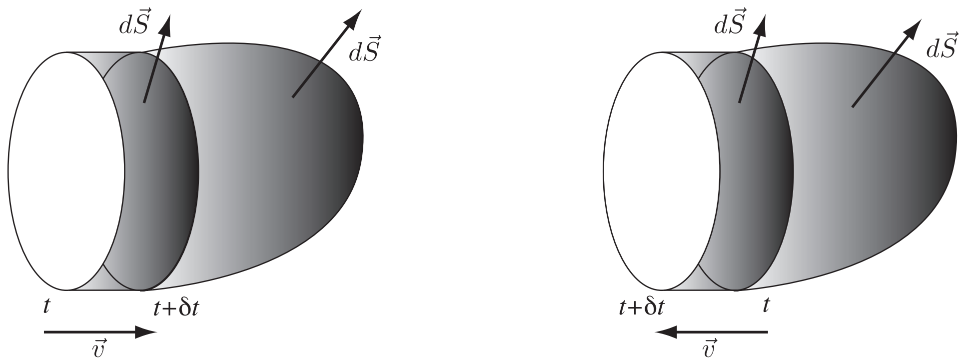

FIGURE 2 – Surfaces sur lesquelles on calcule le flux de $\vec{B}$.

Comme $\delta\varphi_c = e\,\delta t$ dans cette situation, on arrive à

$$\boxed{e = -\frac{d\varphi}{dt}}$$

Si on fait le même raisonnement dans la seconde situation, avec la vitesse dirigée dans l'autre sens, on a

$$\varphi(t+\delta t) = \varphi(t) + \delta\phi_c$$

soit

$$\delta t \times \frac{d\varphi}{dt} = +\delta\varphi_c$$

Or cette fois $\delta\varphi_c = -e\,\delta t$ et on obtient de nouveau

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

C'est la **loi de Faraday**.

Notion de normale sortante

Si on considère les schémas de la figure 2, la notion de normale sortante semble naturelle, on n'hésite pas trop sur leur orientation. Toutefois, cette notion de normale sortante n'est pas toujours dénuée d'ambiguïté pour des surfaces ouvertes. Considérons par exemple le disque plat délimité par un cercle. Dans quel sens « sort » la normale ? Les deux choix se valent a priori. On adopte alors une convention pour orienter les normales : étant donné le sens positif choisi sur la spire (voir la figure 1), la règle du tire-bouchon donne le sens des normales sur la surfaces.

> La règle du tire-bouchon (parfois du tire-bouchon de Maxwell, mais vous avez le droit d'utiliser le vôtre) intervient à plusieurs reprises en électromagnétisme. On imagine un tire-bouchon dont l'axe est perpendiculaire au plan de la spire, que l'on enfonce dans un bouchon en le faisant tourner dans le sens posiif choisi. Le sens dans lequel il se déplace dans le bouchon (en s'enfonçant ou en sortant) indique celui des normales sortantes.

Conclusion

Le mouvement de la spire dans le champ magnétique $\vec{B}$ se traduit par une f.é.m. d'induction

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

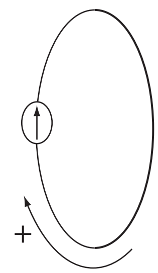

FIGURE 3 – Générateur équivalent dans la spire

où φ désigne le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface s'appuyant par la spire. Tout se passe comme si on mettait un pile dans la spire, comme indiqué sur la figure 3. Le sens de cette pile doit être orienté selon le sens positif choisi au début, indépendamment du sens dans lequel se déplace la spire ! Si on trouve $e > 0$, alors le courant circule dans le sens de la flèche du générateur, c'est-à-dire dans le sens positif choisi. Si on trouve $e < 0$, alors le courant circule dans le sens opposé, c'est-à-dire dans le sens négatif choisi.