

Introduction aux ondes

Pierre Salati^{1,2}

¹ Laboratoire d'Annecy–le–Vieux de Physique Théorique LAPTh,
9 Chemin de Bellevue, B.P. 110, 74941 Annecy-le-Vieux Cedex

² Université Savoie Mont Blanc, B.P. 1104, 73011 Chambéry Cedex

salati@lapth.cnrs.fr & pierre.salati@univ-smb.fr

téléphone 04.50.09.16.69

site web <http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/salati/>



Au menu cette année

- Chapitre I – Nous commencerons par des rappels sur l'oscillateur harmonique et amorti, en distinguant bien les différents régimes en fonction du coefficient de friction. Oscillateur entrevenu et notion de facteur de qualité. Oscillations couplées. Oscillations de relaxation.
- Chapitre II – L'étude des cordes vibrantes sera l'occasion d'établir l'équation de **d'Alembert** et de la résoudre de manière générale. Nous découvrirons ce qu'est un paquet d'onde et définirons les vitesses de phase et de groupe. Notion sur la décomposition d'un son en harmoniques. Relation avec la musique.
- Chapitre III – Le son est une onde de pression qui s'exerce le long de la direction de propagation. Nous définirons la notion d'impédance acoustique et détaillerons la manière dont les ondes sonores sont transmises/réfléchies lors du passage d'un tuyau sonore à un autre. Condition de résonance dans une cavité et relation avec les instruments à vent. Ondes sphériques ou coniques.

● Chapitre IV – Nous établirons tout d’abord les équations de **Maxwell** et montrerons qu’elles sont associées à la propagation des ondes électromagnétiques. Nous nous intéresserons ensuite à l’énergie électromagnétique et introduirons le vecteur de **Poynting** qui décrit sa propagation. Si nous avons le temps, nous passerons à une partie plus formelle avec les notions de potentiel vecteur et d’invariance de jauge.

Les prérequis pour suivre le cours

- Bien connaître les nombres complexes et savoir les utiliser pour décrire des phénomènes périodiques. Les complexes sont utiles par exemple pour résoudre des problèmes d’électrocinétique en courant alternatif.
 - Savoir résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants d’ordre 1 et 2 comme par exemple celle décrivant un oscillateur harmonique.
 - Connaître la notion d’espace vectoriel et savoir manipuler une matrice 2×2 .
-

Chapitre I

Rappels sur les oscillateurs

1) Oscillateur harmonique.

1.1) Description du problème et mise en équation.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 . \quad (\text{I.1})$$

1.2) Equation du mouvement.

1.3) Aspect énergétique.

1.4) Les oscillateurs harmoniques dans la nature. Généralisation aux mouvements de faible amplitude dans un creux de potentiel $V(y)$ avec

$$V(y) = V(y_0) + \left. \frac{dV}{dy} \right|_{y_0} (y - y_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dy^2} \right|_{y_0} (y - y_0)^2 + \text{etc...} \quad (\text{I.2})$$

Si $V(y)$ a un minimum en $y = y_0$, on retrouve bien le potentiel d'un oscillateur harmonique

$$U(x) \equiv V(y) - V(y_0) = \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{d^2V}{dy^2} \right|_{y_0} \right\} (y - y_0)^2 \equiv \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{où } x = y - y_0. \quad (\text{I.3})$$

2) Oscillations amorties.

Dans le cas de frottements visqueux, la force de friction s'exerçant sur l'oscillateur est proportionnelle à sa vitesse

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}} = -f \mathbf{v} . \quad (\text{I.4})$$

2.1) Mise en équation du problème.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0 . \quad (\text{I.5})$$

2.2) Le régime **pseudo-périodique** correspond à des oscillations décroissant lentement au cours du temps.

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où } \lambda = \frac{f}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} . \quad (\text{I.6})$$

On définit le décrétement logarithmique par

$$\delta = \log \left\{ \frac{x(t)}{x(t+T)} \right\} = \lambda T, \quad (\text{I.7})$$

où $T \equiv 2\pi/\omega$ désigne la pseudo-période.

2.3) Le régime **apériodique** correspond à des frottements forts et un amortissement rapide.

$$x(t) = a e^{-\beta t} + b e^{-\gamma t} \text{ où } \begin{cases} \beta \\ \gamma \end{cases} = \lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{I.8})$$

On remarquera que le produit des exposants vaut $\beta \times \gamma = \omega_0^2$ de sorte que $\beta < \omega_0 < \gamma$.

2.4) Le régime **critique** correspond à l'amortissement maximal et donc le plus rapide. L'équation du mouvement est donnée par

$$x(t) = (a + bt) e^{-\omega_0 t}. \quad (\text{I.9})$$

2.5) En régime pseudo-périodique, le facteur de qualité de l'oscillateur est défini par

$$Q \equiv 2\pi \left(\frac{E}{\Delta E_{\text{cycle}}} \right) = \frac{\pi}{\lambda T} = \frac{\omega}{2\lambda} \simeq \frac{\omega_0}{2\lambda} = \tau \omega_0, \quad (\text{I.10})$$

où τ est la durée typique qui caractérise la perte d'énergie de l'oscillateur excité et son retour à l'état de repos. Ce temps est en quelque sorte la durée de vie de l'état excité de l'oscillateur. Cette notion s'applique à de très nombreux systèmes oscillants – amortisseurs de voiture, niveaux atomiques et même particules élémentaires.

3) Oscillations forcées ou entretenues.

L'oscillateur amorti précédent est soumis à une excitation extérieure périodique de forme $F \cos(\Omega t)$. Nous aimerions déterminer comment il réagit en fonction de la pulsation Ω qui lui est imposée.

3.1) Mise en équation du problème

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + k x = F \cos(\Omega t). \quad (\text{I.11})$$

3.2) Résolution par les complexes. Régime transitoire et régime permanent. Ce dernier est décrit par le nombre complexe

$$\bar{x}(t) = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega} e^{i\Omega t}, \quad (\text{I.12})$$

dont la partie réelle $x \equiv \mathcal{R}(\bar{x})$ est la fonction cherchée.

3.3) Etude de la résonance en $X(\Omega)$ et en $V(\Omega)$.

3.4) Bande passante pour les faibles amortissements.

$$\Omega_{\pm} = \omega_0 \pm \lambda . \quad (I.13)$$

4) Discussion physique.

Le facteur de qualité Q permet d'établir une relation entre la rapidité avec laquelle un oscillateur se désexcite librement et la sélectivité de sa réponse à une excitation externe entretenue. L'étude de la réponse d'un oscillateur à une excitation extérieure permet de déterminer la durée de vie de l'état dans lequel on a excité le système. Nous passerons en revue quelques systèmes où le facteur de qualité peut être déterminé comme le diapason, les tremblements de terre, les niveaux atomiques ou encore les transitions nucléaires.

5) Analogies électro-mécaniques.

Quantités mécaniques	Quantités électriques
Elongation x	Charge électrique q
Ressort de raideur k	Inverse de la capacité C^{-1}
Force du ressort $F = -kx$	Différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B = \frac{q}{C}$
Energie potentielle $U = \frac{1}{2} k x^2$	Energie électrostatique $U_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
Masse m	Inductance L
Vitesse v	Intensité du courant électrique i
Energie cinétique $E_C = \frac{1}{2} m v^2$	Energie magnétique $U_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} L i^2$
Force de frottement $F = -fv$	Loi d' Ohm $U_{AB} = Ri$
Un oscillateur mécanique est constitué d'une masse suspendue à un ressort.	L'analogie électrique est un circuit LC .
$\omega = \sqrt{k/m}$	$\omega = 1/\sqrt{LC}$

6) Oscillations couplées.

Nous nous intéressons ici au comportement de plusieurs oscillateurs que l'on couple entre eux de manière à ce qu'ils interagissent. Nous verrons que les oscillations se répartissent entre les différents oscillateurs et que les fréquences de vibration en sont modifiées.

6.1) Etude d'un exemple simple mais instructif.

6.2) Notion de battements.

6.3) Résolution matricielle de l'exemple précédent. Elle nous paraîtra lourde mais elle conduit à une méthode robuste permettant de dériver les modes propres de vibration du système couplé. D'une manière générale, l'équation du mouvement des oscillateurs se met sous la forme

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -\mathbf{A} \times \mathbf{X} \text{ où la matrice } \mathbf{X} \text{ est définie par } \mathbf{X} \equiv \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (\text{I.14})$$

et où \mathbf{A} est une matrice 2×2 dont les éléments sont constants. La pulsation ω des modes propres vérifie l'équation de degré 2 en la variable ω^2

$$\det\{\mathbf{A} - \omega^2 \mathbb{I}_2\} = 0. \quad (\text{I.15})$$

Le problème se généralise à n oscillateurs couplés mais n'est pas facile à résoudre d'un point de vue purement technique. Un exemple avec $n = 2$ est proposé en TD.

7) Oscillations de relaxation.

7.1) Le vase de **Tantale** et la lampe à néon seront présentés en exemple.

7.2) Propriétés des oscillations de relaxation et comparaison avec les oscillations harmoniques. Les deux types d'oscillations diffèrent à plusieurs titres.

- La fréquence des oscillations de relaxation dépend des conditions extérieures.
- L'amplitude des oscillations de relaxation est par contre fixée par construction.
- On peut synchroniser une oscillation de relaxation sur une sous-harmonique d'une excitation sinusoïdale. Nous avons étudié plus haut comment un oscillateur harmonique se synchronise avec l'excitation à laquelle il est soumis. Des multiples de la fréquence d'excitation peuvent de surcroît apparaître en présence d'un terme quadratique dans l'excitation.

TD I

Rappels sur les oscillateurs

1) Période du pendule simple : cas général des fortes amplitudes.

On considère un pendule simple constitué d'une masse m suspendue à un fil sans masse de longueur l . Le pendule oscille dans un plan vertical avec la période T .

1.1) Etablir l'équation du mouvement et montrer que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (\text{TD I.1})$$

où θ désigne l'angle que fait le pendule avec la verticale. Calculer alors la période T_0 des petites oscillations pour lesquelles l'angle θ est très petit devant l'unité.

1.2) L'amplitude θ_{\max} du mouvement pendulaire est maintenant quelconque. Montrer alors que la période est donnée par

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\pi} T_0 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}}. \quad (\text{TD I.2})$$

Effectuer le changement de variable $\sin(\theta/2) \equiv \sin(\theta_{\max}/2) \times \sin \varphi$ et montrer que la période T peut se mettre sous la forme

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{où } a = \sin(\theta_{\max}/2). \quad (\text{TD I.3})$$

1.3) Montrer alors, en développant l'expression précédente, que la période est donnée par

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right\}, \quad (\text{TD I.4})$$

dans le cas d'oscillations dont l'amplitude n'est plus négligeable.

2) Le sismographe.

Un point M , de masse m , est suspendu à l'extrémité d'un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en un point A . Un amortisseur situé entre les points A et M exerce sur la masse m une force proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à A . Le coefficient de frottement visqueux sera noté f . Lors d'une secousse sismique, le point A est soumis à un mouvement oscillatoire vertical et son altitude est donnée par

$$z_A = a \cos(\Omega t) . \quad (\text{TD I.5})$$

2.1) A tout instant, la longueur du ressort est donnée par $l = z_A - z_M$. Lorsque le système est au repos, le ressort a une longueur l_S . L'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre statique est dénoté par $x = l - l_S$. Ecrire l'équation différentielle régissant l'allongement x .

2.2) Donner en régime permanent la valeur de x en fonction du temps t . On pourra utiliser les notations complexes.

2.3) Montrer que pour de faibles fréquences propres du ressort, l'appareil est un sismographe, c'est-à-dire qu'il permet de mesurer l'amplitude a de l'onde sismique.

3) Oscillations couplées avec deux pendules simples.

Soit un fil de masse négligeable, de longueur totale $2l = 2$ mètres. Il est fixé à une de ses extrémités à un point fixe O . Les deux masses m_1 et m_2 sont respectivement fixées à mi-longueur en M_1 et à son extrémité libre en M_2 . Ces masses sont supposées ponctuelles. On n'étudiera que les déplacements dans le plan vertical Oxy . On désigne par θ_1 et θ_2 les angles que font les segments de droite OM_1 et M_1M_2 avec la verticale Oy que l'on orientera positivement vers le haut. On se bornera au cas où les angles θ_i sont petits de sorte que l'on pourra écrire

$$\sin \theta_i \simeq \theta_i \text{ et } \cos \theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2} . \quad (\text{TD I.6})$$

3.1) Faire un schéma. On orientera l'axe horizontal Ox positivement vers la droite.

3.2) Déterminer les forces en jeu. Appliquer ensuite la relation fondamentale de la dynamique à chacune des deux masses et la projeter sur les axes Ox et Oy . On ne gardera que les termes en θ_i et leurs dérivées temporelles en éliminant tout terme d'ordre supérieur ou égal à 2. En déduire les tensions T_1 et T_2 s'exerçant entre O et M_1 d'une part et entre M_1 et M_2 d'autre part. On établira que

$$T_1 = (m_1 + m_2) g \text{ et } T_2 = m_2 g , \quad (\text{TD I.7})$$

où g désigne le champ de pesanteur. En déduire les équations que les abscisses x_1 et x_2 des deux masses m_1 et m_2 vérifient. On pourra noter $\omega_0^2 = g/l$.

3.3) Nous aimerions dériver les équations précédemment établies à partir de considérations énergétiques. Ecrire l'énergie potentielle V du système en fonction de g , des masses m_i et de leurs ordonnées y_i selon l'axe vertical Oy . On exprimera ensuite l'énergie potentielle V en fonction des deux angles θ_i . Finalement, on écrira $V(x_1, x_2)$ en fonction des abscisses x_i des masses selon l'axe horizontal Ox . On prendra V nulle lorsque les masses m_1 et m_2 sont sur la verticale Oy .

Attention ! Il faut pousser les calculs jusqu'au second ordre **inclus** en θ_i , puis en x_i , car l'énergie potentielle est une fonction quadratique des positions.

3.4) Ecrire les équations du mouvement des deux masses selon l'axe Ox à partir du potentiel précédent et retrouver les résultats de la question **3.2**.

3.5) Montrer à partir des équations précédentes que les angles vérifient les relations

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -\omega_0^2 \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\theta_1 - \frac{m_2}{m_1}\theta_2 \right\} \\ \ddot{\theta}_2 &= -\omega_0^2 \left\{ -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\theta_1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\theta_2 \right\}\end{aligned}\quad (\text{TD I.8})$$

3.6) Approche lagrangienne pour plus tard.

Le lagrangien du système est défini par $L = T - V$, où T et V sont respectivement les énergies cinétique et potentielles des deux masses m_1 et m_2 . Ecrire T en fonction des vitesses \dot{x}_1 et \dot{x}_2 des masses le long de l'axe Ox . Puis établir l'expression de T en fonction des dérivées angulaires $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$. Le potentiel V a d'ores et déjà été exprimé en fonction des angles θ_1 et θ_2 . Les deux équations d'**Euler-Lagrange** s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right\} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right\} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}, \quad (\text{TD I.9})$$

où le lagrangien L doit être exprimé en fonction des θ_i et de leurs dérivées $\dot{\theta}_i$. Retrouver les équations du mouvement (TD I.8).

3.7) A partir de maintenant, on prendra $m_1 = 300$ g et $m_2 = 100$ g. Trouver l'équation caractéristique donnant les fréquences propres ω du système en posant

$$\omega^2 = \lambda \omega_0^2. \quad (\text{TD I.10})$$

On donnera les deux fréquences propres du pendule double, c'est-à-dire les deux valeurs de λ qui vérifient l'équation caractéristique.

3.8) Pour chaque mode propre d'oscillation, on trouvera le rapport des coordonnées x_1 et x_2 entre elles et l'on fera un dessin de la corde à un instant quelconque.

4) Tube au néon : étude des oscillations de relaxation.

On charge un condensateur de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ grâce à un générateur de force électromotrice $E = 100 \text{ V}$, à travers une résistance $R = 9 \times 10^5 \Omega$. On a placé aux bornes du condensateur une dérivation comprenant une lampe au néon. Cette lampe au néon fonctionne dans les conditions suivantes.

- i) Eteinte, elle ne laisse passer aucun courant car sa résistance est alors infinie.
- ii) Elle s'allume pour une tension supérieure à une valeur critique appelée tension d'allumage $V_A = 80 \text{ V}$. Sa résistance vaut alors $r = 10^5 \Omega$.
- iii) En opérant par tension décroissante, la lampe s'éteint lorsqu'on descend en dessous d'une tension dite tension d'extinction $V_E = 70 \text{ V}$.

4.1) Calculer le générateur de Thevenin équivalent aux bornes de la capacité C .

4.2) Trouver l'équation de charge du condensateur, celui-ci étant initialement déchargé. On donnera l'expression de l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur en fonction du temps.

4.3) Que se passe-t-il lorsque $u = V_A$ aux bornes du condensateur ? Calculer alors l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur.

4.4) Que se passe-t-il lorsque $u = V_E$ aux bornes du condensateur ?

4.5) Calculer la période des oscillations de relaxation et tracer l'allure de la fonction $u(t)$.

4.6) Comment se comporte le système si maintenant la résistance R vaut $1/3 \times 10^5 \Omega$?

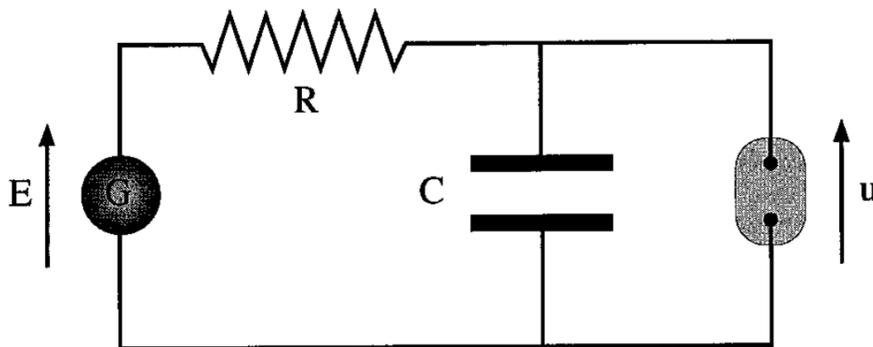


FIGURE I.1 – Principe de fonctionnement du tube au néon.

Chapitre II

Les cordes vibrantes

Ce chapitre nous permettra d'étudier un exemple d'ondes transversales se propageant le long d'une droite. On considère une corde de masse linéique μ , soumise à la tension T , et parcourue par des vibrations transverses à l'instar d'une corde de guitare ou de piano.

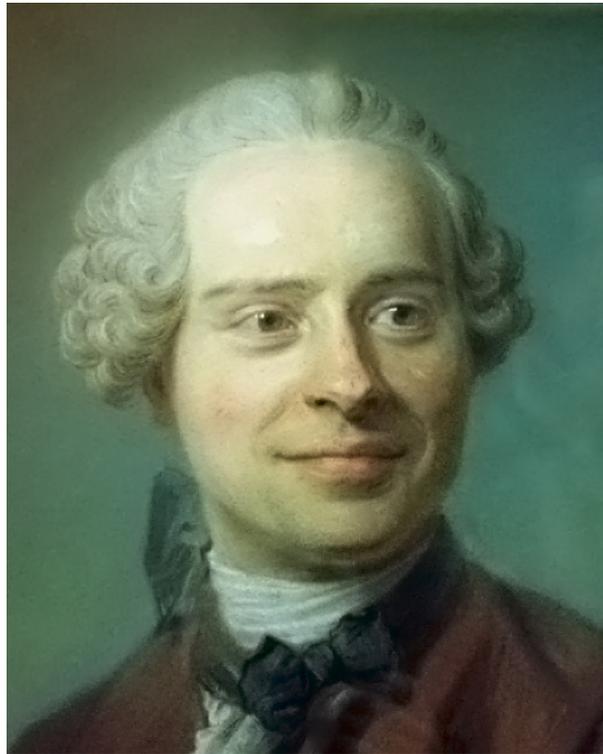


FIGURE II.1 – Jean Le Rond D'Alembert, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles (remerciements à Wikimedia Commons).

1) Equation de propagation.

La position le long de la corde est repérée par la variable x . L'élongation transversale est décrite par y . La tangente à la corde en tout point M fait un angle α avec l'axe horizontal Ox . Cet angle est un infiniment petit du premier ordre par rapport à $\pi/2$. L'état de la corde est donné à tout instant par la fonction $y(x, t)$ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec la vitesse } V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} . \quad (\text{II.1})$$

Cette équation décrit un phénomène de propagation le long de l'axe Ox . Elle est également appelée équation de **d'Alembert** du nom du philosophe du XVIII^{ème} siècle qui l'a découverte.

2) Solution générale de l'équation de propagation.

On pose $\pi = x - Vt$ et $\sigma = x + Vt$. L'équation de propagation peut se réécrire en fonction des nouvelles variables π et σ . Nous montrerons alors que la fonction $y(x, t) \equiv y(\pi, \sigma)$ vérifie la relation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \pi \partial \sigma} = 0 , \quad (\text{II.2})$$

de sorte que l'élongation transversale de la corde est donnée par la somme de deux fonctions

$$y(x, t) = \mathcal{Y}_D(x - Vt) + \mathcal{Y}_G(x + Vt) . \quad (\text{II.3})$$

3) Le vecteur d'onde.

Considérons un ébranlement transverse sinusoïdal se propageant vers les x croissants et prenons le à l'instant $t = 0$. Nous sommes en présence d'une ondulation de la corde décrite par

$$y(x, 0) = \mathcal{Y}_D(x) = a \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) . \quad (\text{II.4})$$

Le **vecteur d'onde** est défini par

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} , \quad (\text{II.5})$$

où λ représente la période spatiale de l'ondulation appelée **longueur d'onde**. Celle-ci se déplace avec la vitesse V et l'état de la corde est donné à tout moment par

$$y(x, t) = \mathcal{Y}_D(x - Vt) = a \cos \{k(x - Vt)\} = a \cos(kx - \omega t) . \quad (\text{II.6})$$

Chaque point x de la corde oscille suivant l'axe Oy avec la pulsation ω et la période T telles que $\lambda = VT$ et

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{VT} . \quad (\text{II.7})$$

4) Réflexion des ondes à une extrémité de la corde.

Nous prendrons une corde s'étendant de $x=0$ à $x=+\infty$. Une onde sinusoïdale se propageant vers la gauche se réfléchit à l'extrémité en $x=0$ et repart vers la droite. Nous montrerons qu'elle subit un changement de signe de manière à ce que y soit nul en $x=0$ à tout instant t . Nous commencerons par résoudre le problème en décrivant les ondes par

$$\mathcal{Y}_G = a \cos(kx + \omega t) \text{ et } \mathcal{Y}_D = b \cos(kx - \omega t - \psi), \quad (\text{II.8})$$

puis nous passerons aux notations complexes où

$$\mathcal{Y}_G = A e^{i\omega(t+x/V)} + \text{complexe conjugué}, \quad (\text{II.9})$$

et

$$\mathcal{Y}_D = B e^{i\omega(t-x/V)} + \text{complexe conjugué}. \quad (\text{II.10})$$

Les termes A et B sont reliés aux amplitudes a et b et peuvent, en toute généralité, contenir une phase. Nous montrerons que $B = -A$ et que l'élongation transverse totale résultant du passage des deux ondes se met sous la forme

$$y(x, t) = \mathcal{A} \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi). \quad (\text{II.11})$$

5) Ondes stationnaires.

La corde n'est plus infinie. Elle s'étend de $x=0$ à $x=L$. Aux deux extrémités de la corde, l'élongation est nulle à tout instant. Cette condition est très restrictive car les fréquences auxquelles une vibration est alors susceptible de se déplacer doivent maintenant vérifier la condition d'onde stationnaire

$$\omega = n\omega_0 \text{ où } n \text{ est un entier et } \frac{\omega_0}{V} = k_0 = \frac{\pi}{L}. \quad (\text{II.12})$$

Les longueurs des ondes qui se propagent le long de la corde sont des sous-multiples de $2L$. Les vibrations de la corde se développent suivant des modes propres de vibration, chacun caractérisé par l'entier n , la pulsation $\omega = n\omega_0$, le vecteur d'onde $k = nk_0$ et la longueur d'onde $\lambda = 2L/n$. L'élongation de la corde est alors donnée par la superposition des modes n en sorte que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \{A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)\} \sin(nk_0 x). \quad (\text{II.13})$$

Incidemment, nous venons de montrer que l'évolution de l'élongation $y(x, t)$ en un point x donné en fonction du temps t résulte de la superposition des harmoniques d'ordre n entier de la pulsation de base ω_0 . Nous sommes en présence d'une **série de Fourier**.

Nous verrons en travaux dirigés une application de cette analyse à l'étude de la richesse harmonique de quelques instruments de musique comme le piano et la guitare.

6) Vitesse de groupe et vitesse de phase. Milieu dispersif.

Considérons une superposition d'ondes harmoniques se propageant vers les x croissants et dont les pulsations sont comprises entre $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ et $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Ce **paquet d'ondes** est modélisé par la somme

$$y(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} S(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega + \text{c.c.} \quad (\text{II.14})$$

Dans le cas de la corde vibrante, la pulsation ω et le vecteur d'onde k sont proportionnels avec une vitesse de propagation des ondes égale à $V = \omega/k$. Il existe cependant des milieux, dont nous verrons des exemples plus tard, où la relation liant ω à k est plus compliquée. La fonction $\omega(k)$ permettant d'obtenir la pulsation ω à partir du vecteur d'onde k est appelée **relation de dispersion**

$$\omega = \omega(k) . \quad (\text{II.15})$$

En développant la relation de dispersion autour de k_0 et de ω_0 , nous montrerons que le paquet d'ondes (II.14) se met dans le cas général sous la forme

$$y(x, t) = \mathcal{A}(t - x/U) e^{i\omega_0(t - x/V)} + \text{c.c.} , \quad (\text{II.16})$$

où le terme \mathcal{A} est égal à

$$\mathcal{A} = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S(\omega_0 + \eta) e^{i\eta(t - x/U)} d\eta . \quad (\text{II.17})$$

Nous examinerons en TD un exemple simple de paquet d'ondes où le terme \mathcal{A} est réel et s'interprète alors comme une amplitude se propageant à la vitesse U et modulant l'onde harmonique $\cos\{\omega_0(t - x/V)\} \equiv \cos(\omega_0 t - k_0 x)$ qui elle se propage à la vitesse V . Nous voyons apparaître vitesse de phase V et vitesse de groupe U définies par

$$V = \frac{\omega_0}{k_0} \text{ et } U = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} . \quad (\text{II.18})$$

La vitesse de groupe U est associée à la propagation de l'amplitude globale de l'onde et donc à son énergie.

TD II

Les cordes vibrantes

1) Analyse harmonique de quelques instruments à corde.

Nous avons montré en cours qu'une corde de longueur L tendue entre les points O et A est le siège d'ondes stationnaires et que les vibrations transverses la parcourant se mettent sous la forme

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \{A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)\} \sin(nk_0 x) . \quad (\text{TD II.1})$$

Chaque mode de vibration est décrit par l'entier n , la pulsation $\omega = n\omega_0$, le vecteur d'onde $k = nk_0$ et la longueur d'onde $\lambda = 2L/n$. Le mode fondamental correspond à $n = 1$ avec $k_0 = \pi/L = \omega_0/V$ où $V = \sqrt{T/\mu}$ est la vitesse de propagation des ondes. La tension de la corde est notée T et sa masse linéique μ .

1.1) Nous aimerions déterminer les coefficients A_n et B_n à partir de l'état de la corde à un instant initial $t = 0$. Pour ce faire, établir tout d'abord la relation d'orthonormalité entre les fonctions $\sin(nk_0 x)$ et $\sin(pk_0 x)$ où n et p sont des entiers

$$\frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(nk_0 x) \sin(pk_0 x) = \delta_{np} , \quad (\text{TD II.2})$$

où δ_{np} est le symbole de Kronecker valant 1 si $n = p$ et 0 sinon.

1.2) En déduire que

$$\left. \begin{matrix} A_n \\ n\omega_0 B_n \end{matrix} \right\} = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(nk_0 x) \begin{cases} y(x, 0) \\ \dot{y}(x, 0) \end{cases} , \quad (\text{TD II.3})$$

où $\dot{y}(x, t) \equiv \partial y / \partial t (x, t)$ désigne la dérivée partielle de l'élongation $y(x, t)$ par rapport au temps.

1.3) Corde pincée

Dans le cas de la guitare, de la harpe ou du clavecin, la corde est pincée. Sa position initiale à $t=0$ forme le triangle OAB où B est le point d'abscisse $x=a < L$ et d'ordonnée $y=h$. La corde pincée est lâchée sans vitesse initiale de sorte que $\dot{y}(x, 0) = 0$. En déduire que

$$A_n = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \frac{2hL^2}{a(L-a)} \sin(nk_0a) \text{ et } B_n = 0 . \quad (\text{TD II.4})$$

1.4) Corde frappée

Dans le cas du piano, la corde est frappée et l'élongation transversale est initialement nulle avec une vitesse donnée par

$$y(x, 0) = 0 \text{ et } \dot{y}(x, 0) = \begin{cases} V_0 \text{ pour } a < x < a + e \\ 0 \text{ partout ailleurs} \end{cases} . \quad (\text{TD II.5})$$

Dans la mesure où $e \ll L$, montrer que cette fois

$$A_n = 0 \text{ et } B_n = \frac{2V_0e}{n\omega_0L} \sin(nk_0a) . \quad (\text{TD II.6})$$

1.5) D'un point de vue auditif, l'énergie acoustique associée au mode de vibration n est proportionnelle à l'énergie mécanique E_n de la corde. Nous allons déterminer dans cette question difficile l'expression de celle-ci. Considérons la portion de corde comprise entre les points M et P dont les abscisses respectives sont x et $x + dx$. Les mouvements de la corde s'effectuent suivant la direction orthogonale Oy .

Les seules forces externes qui s'exercent sur le tronçon MP sont la tension en M qui tire vers la gauche et la tension en P qui tire vers la droite. Montrer que le travail élémentaire de ces forces entre les instants t et $t + dt$ est égal à

$$\delta W = \{(T y'(x + dx, t)) \times (\dot{y}(x + dx, t) dt)\} - \{(T y'(x, t)) \times (\dot{y}(x, t) dt)\} , \quad (\text{TD II.7})$$

où y' et \dot{y} dénotent respectivement les dérivées partielles de $y(x, t)$ par rapport à x et à t . En déduire alors que

$$\delta W = T dt dx \frac{\partial}{\partial x} (y' \dot{y}) . \quad (\text{TD II.8})$$

En utilisant l'équation de propagation, démontrer alors que

$$\delta W = T dt dx \left\{ \frac{1}{V^2} \dot{y} \ddot{y} + y' \frac{\partial y'}{\partial t} \right\} . \quad (\text{TD II.9})$$

En déduire que

$$\delta W = dx dt \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 + \frac{1}{2} T y'^2 \right\} \quad (\text{TD II.10})$$

Etablir finalement que l'énergie mécanique totale du tronçon MP s'écrit

$$dE = dx \times \left\{ \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 + \frac{1}{2} T y'^2 \right\} \quad (\text{TD II.11})$$

Quelle est l'énergie cinétique ? Que vaut l'énergie potentielle ?

1.6) On s'intéresse au mode de vibration n . Montrer que l'énergie mécanique totale correspondante est donnée par l'intégrale

$$E_n = \frac{1}{2} T n^2 k_0^2 \int_0^L dx \left\{ \sin^2(nk_0x) \left\{ -A_n \sin(n\omega_0t) + B_n \cos(n\omega_0t) \right\}^2 + \cos^2(nk_0x) \left\{ A_n \cos(n\omega_0t) + B_n \sin(n\omega_0t) \right\}^2 \right\} . \quad (\text{TD II.12})$$

Calculer cette intégrale et établir que

$$E_n = \frac{\pi^2 T}{4 L} n^2 (A_n^2 + B_n^2) . \quad (\text{TD II.13})$$

Comparer alors la richesse harmonique du clavecin et du piano.

2) Un exemple de paquet d'ondes.

On reprend la superposition étudiée en cours

$$y(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} S(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega + \text{c.c.} \quad (\text{TD II.14})$$

Calculer explicitement $y(x, t)$ dans le cas où $S(\omega)$ est égal à 1 sur l'intervalle de pulsation allant de $\omega_0 - \Delta\omega$ à $\omega_0 + \Delta\omega$. Montrer que

$$y(x, t) = 4 \Delta\omega \text{sinc}\{\Delta\omega(t - x/U)\} \cos\{\omega_0(t - x/V)\} . \quad (\text{TD II.15})$$

La fonction sinus cardinal est définie par $\text{sinc}(x) \equiv \sin x/x$. Interpréter le résultat obtenu.

Chapitre III

Propagation du son

Ce chapitre est consacré aux ondes acoustiques. Le son est la manifestation d'ondes longitudinales de surpression qui se propagent dans un fluide. Nous simplifierons le problème en considérant qu'elles se propagent le long d'un tuyau de section constante et établirons les équations que vérifient la surpression P' et la vitesse u du fluide. Nous nous intéresserons ensuite à la densité moyenne d'énergie acoustique ϵ_{son} . Puis nous définirons l'impédance acoustique Z et utiliserons ce concept afin de comprendre comment une onde sonore se réfléchit sur une discontinuité d'impédance Z_1 – par exemple lorsque le tuyau n'est pas infini mais se termine en étant soit fermé, soit ouvert sur l'atmosphère. Nous appliquerons nos résultats à l'étude des cavités résonantes à l'instar des instruments de musique à vent. Nous étudierons ensuite le passage d'un tuyau sonore à un autre avec changement de section du tuyau ou bien du milieu acoustique. Finalement, nous généraliserons notre étude aux ondes sphériques se propageant dans un tuyau conique.

1) Equation de propagation.

Nous considérons pour l'instant un tuyau sonore rectiligne et infini. La propagation du son s'effectue ainsi le long de son axe en sorte que le problème se réduit à une seule dimension. Nous négligerons les frottements du fluide sur les parois du tuyau ainsi que les forces de gravité.

1.1) Equation hydrodynamique.

$$\rho \left\{ \frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (\text{III.1})$$

où P , ρ et u désignent respectivement la pression, la masse volumique et la vitesse de la tranche de fluide située en x à l'instant t .

1.2) Equation de continuité : conservation de la masse.

$$\frac{\partial}{\partial x} \{j \equiv \rho u\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{III.2})$$

1.3) Equation d'état et transformations adiabatiques.

Les ondes sonores produisent sur le fluide des compressions et des détentes très rapides

pendant lesquelles la chaleur n'a pas le temps d'être échangée. Le fluide subit dès lors des transformations *adiabatiques*. Les variations de pression P et de masse volumique ρ sont reliées par le coefficient de compression adiabatique

$$\chi = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S . \quad (\text{III.3})$$

1.4) L'approximation acoustique.

Les variations de pression et de densité par rapport à l'état d'équilibre ($P_0, \rho_0, u_0 = 0$) du fluide sont très faibles de sorte que

$$P = P_0 + P' \text{ et } \rho = \rho_0 + \rho' \text{ avec } P' \ll P_0 \text{ et } \rho' \ll \rho_0 . \quad (\text{III.4})$$

La vitesse macroscopique u du fluide est également très petite devant la vitesse du son V . En développant les relations (III.1) et (III.2) au premier ordre en P', ρ' et u , puis en les combinant tout en notant que $\rho' = \chi \rho_0 P'$ d'après l'équation (III.3), on établit l'équation de propagation du son

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = 0 \text{ où } V = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}} \text{ est la vitesse du son .} \quad (\text{III.5})$$

La vitesse u vérifie la même équation de propagation. De plus, P' et u sont reliées par

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial x} \text{ et } \rho_0 V \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{V} \frac{\partial P'}{\partial t} . \quad (\text{III.6})$$

1.5) La solution générale de l'équation de propagation est la somme d'une onde se déplaçant vers la droite et d'une onde se propageant en sens inverse. Toutes deux évoluent à la vitesse du son V .

$$P'(x, t) = P'_+ + P'_- \equiv f(x - Vt) + \varphi(x + Vt) \text{ et} \quad (\text{III.7})$$

$$u(x, t) = u_+ + u_- \equiv \frac{f(x - Vt)}{\rho_0 V} - \frac{\varphi(x + Vt)}{\rho_0 V} . \quad (\text{III.8})$$

2) Energie acoustique.

Considérons un tuyau dans lequel on engendre une onde acoustique à l'aide d'un piston. Le mouvement de celui-ci est périodique de période T . L'onde se propage librement vers la droite, le tuyau étant infiniment long dans cette direction. Nous calculerons l'énergie transmise par le piston au fluide pendant un cycle et en dériverons l'énergie acoustique moyenne ϵ_{son} par unité de volume. Nous montrerons ensuite que

$$\epsilon_{\text{son}} = \rho_0 \overline{u^2} \equiv \left(\overline{\epsilon_K} = \frac{1}{2} \rho_0 \overline{u^2} \right) + \left(\overline{\epsilon_P} = \frac{1}{2} \rho_0 \overline{u^2} \right) . \quad (\text{III.9})$$

3) Impédance acoustique.

Par analogie avec la loi d'Ohm en électricité, nous définirons l'impédance acoustique d'une onde sonore se propageant dans un tuyau de section S comme la quantité reliant la surpression P' à la vitesse u du fluide

$$Z \equiv \frac{P'}{Su} . \quad (\text{III.10})$$

3.1) Tuyau infini.

L'impédance caractéristique ou **itérative** du tuyau infini de section S est égale à

$$\frac{P'_+}{Su_+} = Z_0 = \frac{\rho_0 V}{S} . \quad (\text{III.11})$$

A partir de maintenant, nous considérons un tuyau fermé en $x = L$ sur une impédance Z_1 . Le cas que nous allons étudier est très général. Le tuyau peut en effet s'ouvrir sur l'atmosphère ou être fermé. Il peut se prolonger en changeant de section ou bien le milieu acoustique subit une transition en L .

3.2) Coefficient de réflexion.

L'onde sonore incidente P'_+ subit une réflexion en $x = L$ et donne naissance à l'onde réfléchie P'_- ainsi qu'à une onde transmise. Le coefficient de réflexion est égal à

$$\Gamma_P = -\Gamma_u = \frac{\varphi(L + Vt)}{f(L - Vt)} \equiv \frac{\varphi(L, t)}{f(L, t)} = \frac{Z'_1 - 1}{Z'_1 + 1} \quad \text{où} \quad Z'_1 = \frac{Z_1}{Z_0} . \quad (\text{III.12})$$

3.3) Onde sinusoïdale incidente.

Considérons une onde sinusoïdale incidente de pulsation ω , décrite par la fonction

$$f(x, t) \equiv f(x - Vt) = e^{i\omega(t - x/V)} . \quad (\text{III.13})$$

Cette onde se réfléchit en $x = L$ et donne lieu à une onde réfléchie $\varphi(x, t)$. En tout point $x \leq L$, ondes incidente et réfléchie **interfèrent** de sorte que $P'(x, t) = P'_+(x, t) + P'_-(x, t)$ et $u(x, t) = u_+(x, t) + u_-(x, t)$. L'impédance sonore résultante en x est donnée par

$$Z'(x) = \frac{Z(x)}{Z_0} = \frac{Z'_1 + i \tan \theta}{1 + i Z'_1 \tan \theta} \quad \text{où} \quad \theta = \frac{\omega}{V} (L - x) . \quad (\text{III.14})$$

3.4) Analyse de quelques cas particuliers.

Dans le cas du tuyau fermé sur son impédance itérative $Z_1 \equiv Z_0$, il n'y a pas d'onde réfléchie. L'impédance itérative terminale absorbe complètement l'onde incidente. Les coefficients de réflexion sont alors nuls.

Si le tuyau est ouvert sur l'atmosphère, la réflexion est complète avec

$$\Gamma_P = -\Gamma_u = -1 \quad \text{et} \quad Z'(x) = i \tan \left\{ \frac{\omega}{V} (L - x) \right\} \quad \text{puisque} \quad Z'_1 = 0. \quad (\text{III.15})$$

On montrera que le tuyau est le siège d'un système d'ondes stationnaires que l'on décorquera en TD. Les noeuds de pression coïncident avec les ventres de vitesse et vice-versa. Au niveau où le tuyau s'ouvre sur l'extérieur siège un noeud de pression et un ventre de vitesse. Les noeuds et les ventres sont séparés d'une demi-longueur d'onde. En chaque point x , l'évolution temporelle de la pression est en déphasage de $\pm\pi/2$ par rapport à celle de la vitesse. La pression est maximale lorsque la vitesse est nulle et vice-versa.

Si le tuyau est cette fois fermé, la réflexion est encore totale. Cependant, le bout du tuyau est maintenant un noeud de vitesse avec

$$\Gamma_P = -\Gamma_u = +1 \quad \text{et} \quad Z'(x) = -i \cotan \left\{ \frac{\omega}{V} (L - x) \right\} \quad \text{puisque} \quad Z'_1 = \infty. \quad (\text{III.16})$$

Nous remarquerons avec profit que l'impédance réduite $Z'(x)$ du tuyau fermé en L est égale à celle du tuyau ouvert en $L + \lambda/4$.

Finalement, si le tuyau est fermé sur une impédance imaginaire pure $Z_1 = iY_1$ où Y_1 est un nombre réel positif ou négatif, nous pouvons définir une distance d telle que

$$\tan \left\{ \frac{\omega}{V} d \right\} = Y'_1 \equiv \frac{Y_1}{Z_0}, \quad (\text{III.17})$$

de sorte que le système d'ondes stationnaires est identique à celui d'un tuyau ouvert en $L + d$.

4) Cavité résonante.

Un tuyau de longueur L est fermé à ses deux extrémités par les impédances imaginaires

$$Z_1 = -iY_1 \equiv -iZ_0 \tan \left\{ \frac{\omega}{V} d_1 \right\} \quad \text{et} \quad Z_2 = iY_2 \equiv iZ_0 \tan \left\{ \frac{\omega}{V} d_2 \right\}. \quad (\text{III.18})$$

4.1) Conditions de résonance.

L'onde doit être en phase avec elle-même après un aller et retour dans la cavité. Cette condition est nécessaire pour que l'interférence entre l'onde et ses réflexions multiples soit complètement constructive. Elle se traduit par la condition sur la longueur d'onde λ

$$L + d_1 + d_2 = n \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{III.19})$$

où n est un entier. On peut également dériver cette condition en remarquant que tout se passe comme si un système d'ondes stationnaire s'établissait dans un tuyau fictif de longueur $L' = L + d_1 + d_2$ ouvert aux deux bouts.

4.2) Ondes stationnaires dans des tuyaux ouverts ou fermés. Instruments de musique à vent.

5) Passage d'un tuyau sonore à un autre.

5.1) Changement de section du tuyau.

$$\Gamma_P = -\Gamma_u = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} . \quad (\text{III.20})$$

5.2) Changement de milieu acoustique.

$$\Gamma_P = -\Gamma_u = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} , \quad (\text{III.21})$$

où les indices acoustiques $n_1 = \rho_1 V_1$ et $n_2 = \rho_2 V_2$. Une onde sonore se propageant dans l'atmosphère se réfléchit presque totalement sur une surface d'eau.

6) Onde sphérique se propageant dans un tuyau conique.

Une onde sonore sphérique se propage dans un tuyau conique de sommet O . Les tranches de fluide se déplacent radialement avec la vitesse u qui, à l'instar de la pression P et de la masse volumique ρ , ne dépend que de la distance r au point O .

6.1) Equation de propagation.

En reprenant l'analyse menée au début de ce chapitre tout en tenant compte de la nouvelle géométrie, on montrera que dans l'approximation acoustique, l'équation de propagation des ondes sonores s'écrit

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right\} \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial r} . \quad (\text{III.22})$$

6.2) Potentiel des vitesses et résolution.

La configuration à symétrie sphérique implique un champ de vitesse radial qui diverge ou converge vers O . Un tel champ est **irrotationnel** car $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Comme en électrostatique pour le champ électrique, le champ de vitesse peut se mettre sous la forme

$$\vec{u} = -\vec{\nabla} \Phi , \quad (\text{III.23})$$

et dérive donc du **potentiel des vitesses** Φ . Ce dernier vérifie l'équation

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{où} \quad u = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} . \quad (\text{III.24})$$

Le potentiel Φ est alors donné par la somme d'une onde divergente et d'une onde convergente

$$\Phi(r, t) = \frac{f(r - Vt)}{r} + \frac{\varphi(r + Vt)}{r} . \quad (\text{III.25})$$

Vitesse et pression peuvent alors s'exprimer comme

$$u(r, t) = u_{\text{out}} + u_{\text{in}} = \left\{ \frac{f}{r^2} - \frac{f'}{r} \right\} + \left\{ \frac{\varphi}{r^2} - \frac{\varphi'}{r} \right\} \quad \text{et} \quad (\text{III.26})$$

$$P'(r, t) = P'_{\text{out}} + P'_{\text{in}} = \left\{ -\rho_0 V \frac{f'}{r} \right\} + \left\{ \rho_0 V \frac{\varphi'}{r} \right\} . \quad (\text{III.27})$$

Le prime dans les expressions précédentes désigne la dérivation partielle par rapport à la distance radiale r .

6.3) Comportement à grande distance.

TD III

Propagation du son

1) Puissance maximale dissipée par un sonar.

Pour les sondages de fonds marins et le repérage de sous-marins, on utilise de puissants émetteurs d'ondes ultrasonores, fixés à la coque des navires, en dessous de la ligne de flottaison. A leur niveau, la pression P_0 de l'eau est encore voisine de la pression atmosphérique. L'amplitude des variations de la pression ultrasonore P' ne peut donc pas dépasser P_0 sinon la pression absolue serait négative à certains moments de l'oscillation. Cela conduirait à l'évaporation locale de l'eau et à la formation de cavitations très nuisibles à la propagation du son. On a donc

$$P' \leq P_0 = 10^5 \text{ Pa} . \quad (\text{TD III.1})$$

En supposant que le sonar engendre une onde sinusoïdale, montrer que la puissance émise ne peut dépasser 1/3 de Watt par cm^2 . La vitesse du son dans l'eau vaut 1.5 km s^{-1} avec une densité $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Commentaires ?

2) Seuil d'audition de l'oreille.

L'étude d'une oreille standard montre que la sensibilité auditive est maximale pour une fréquence d'environ 2000 Hz et vaut $P' = 3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$. Estimer la vitesse correspondante du tympan. Montrer que l'amplitude de ses oscillations est d'environ 1/20 d'angstroem, soit $5 \times 10^{-12} \text{ m}$. Comparer avec le diamètre de l'atome d'hydrogène. Commentaire ? Calculer également l'énergie acoustique correspondante. Le conduit auditif a une surface d'environ $1/2 \text{ cm}^2$. Comparer la puissance absorbée par l'oreille à celle d'un ampli de discothèque.

3) Ondes stationnaires dans un tuyau ouvert.

On reprend l'analyse menée en 3.4 du tuyau ouvert en $x = L$ sur l'atmosphère et l'on considère une onde sinusoïdale incidente de pulsation ω , décrite par la fonction

$$P'_+(x, t) = f(x - Vt) = e^{i\omega(t - x/V)} . \quad (\text{TD III.2})$$

3.1) Etablir l'expression de la pression $P'_-(x, t)$ de l'onde réfléchie.

3.2) Montrer que la pression totale P' est égale à

$$P'(x, t) = 2i e^{i(\omega t - kL)} \sin \{k(L - x)\} , \quad (\text{TD III.3})$$

où k désigne le vecteur d'onde.

3.3) Etablir alors que la vitesse totale du fluide se met sous la forme

$$u(x, t) = \frac{2}{\rho_0 V} e^{i(\omega t - kL)} \cos \{k(L - x)\} . \quad (\text{TD III.4})$$

3.4) Que vaut l'impédance acoustique réduite $Z'(x)$?

3.5) Montrer que pression et vitesse sont déphasées de $\pm\pi/2$. Conclusion ?

3.6) Reprendre toute l'analyse pour un tuyau fermé en $x=L$ et montrer que l'on retrouve les expressions précédentes à condition de lui substituer un tuyau ouvert en $L + \lambda/4$.

4) Inductance acoustique.

On considère un tuyau de section S_0 auquel est raccordé un segment de tuyau ayant même axe, de section s et de longueur l . Les deux tuyaux sont raccordés au point A. Le petit tuyau débouche dans l'atmosphère au point B. On suppose que la distance l est très petite devant la longueur typique de variation de la pression P' et de la vitesse u . Pour une vibration sinusoïdale, cette condition équivaut à considérer que l est petit devant la longueur d'onde λ . Le fluide contenu dans le petit tuyau vibre donc en phase. Il se déplace en bloc.

4.1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au fluide contenu dans le tuyau AB, montrer que les variations de pression en A sont données par

$$P'(A) = \frac{\rho_0 l}{s} \frac{d(su)}{dt} . \quad (\text{TD III.5})$$

En déduire que le tuyau AB se comporte comme l'équivalent acoustique d'une inductance électrique. Que vaut cette inductance acoustique ?

4.2) Dans le cas d'une onde harmonique sinusoïdale de pulsation ω , en déduire que l'impédance acoustique complexe en A vaut

$$Z(A) = i \frac{\rho_0 l}{s} \omega . \quad (\text{TD III.6})$$

4.3) Retrouver directement ce résultat à partir du cours.

5) une approche plus formelle.

5.1) On considère un fluide de pression P et de masse volumique ρ . Montrer tout d'abord que la résultante des forces de pression s'exerçant sur une unité de volume du fluide se met sous la forme

$$\vec{F}_P = -\text{grad} P = -\vec{\nabla} P. \quad (\text{TD III.7})$$

On pourra raisonner sur un cube élémentaire dont les dimensions Δx , Δy et Δz sont petites devant la distance typique de variation de P .

5.2) Montrer que l'équation de la dynamique appliquée à un élément de fluide de volume unité s'écrit

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g}. \quad (\text{TD III.8})$$

A partir de maintenant, on négligera la pesanteur et l'on prendra \vec{g} nul dans la suite du problème.

5.3) La masse du fluide se conservant, en déduire l'équation de continuité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{où le courant } \vec{J} \equiv \rho \vec{u}. \quad (\text{TD III.9})$$

5.4) Dans l'approximation acoustique qui sert de cadre à l'étude du son, les variations de pression et de densité sont très faibles de sorte que

$$P = P_0 + P' \text{ et } \rho = \rho_0 + \rho' \quad \text{avec } P' \ll P_0 \text{ et } \rho' \ll \rho_0. \quad (\text{TD III.10})$$

La vitesse macroscopique \vec{u} du fluide est également très petite devant la vitesse du son V . En utilisant le développement (TD III.10) dans les relations (TD III.8) et (TD III.9), montrer que les variations de pression obéissent à l'équation de propagation

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) P' - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} \equiv \Delta P' - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{TD III.11})$$

5.5) Montrer finalement que l'équation régissant le comportement du champ des vitesses $\vec{u}(M, t)$ se met sous la forme

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{TD III.12})$$

Lorsque l'écoulement est irrotationnel, montrer que cette relation se ramène à l'équation habituelle de propagation. On rappelle que

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}. \quad (\text{TD III.13})$$

Chapitre IV

Ondes électromagnétiques

Ce chapitre de révision traite des équations que **Maxwell** a introduites pour unifier électricité et magnétisme. Nous insisterons sur le courant de déplacement qui constitue une avancée majeure, analyserons la structure des ondes électromagnétiques et définirons le vecteur de **Poynting**.



FIGURE IV.1 – James Clerk Maxwell (13 juin 1831 à Édimbourg en Écosse – 5 novembre 1879 à Cambridge en Angleterre) est un physicien et mathématicien écossais. Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, les équations de Maxwell, l'électricité, le magnétisme et l'induction, en incluant une importante modification du théorème d'Ampère. Ce fut à l'époque le modèle le plus unifié de l'électromagnétisme. Il est également célèbre pour avoir interprété, dans un article en quatre parties publié dans *Philosophical Magazine* intitulé *On Physical Lines of Force*, la lumière comme étant un phénomène électromagnétique en s'appuyant sur les travaux de Michael Faraday. Il a notamment démontré que les champs électriques et magnétiques se propagent dans l'espace sous la forme d'une onde et à la vitesse de la lumière (remerciements à Wikimedia Commons).

1) Les équations de Maxwell.

Deux équations décrivent la structure du champ électromagnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{IV.1})$$

Deux autres équations relient le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} aux sources, c'est-à-dire aux distributions de charge ρ et de courant \vec{j} électriques

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{IV.2})$$

Le terme en rouge dans l'expression précédente est le courant de déplacement que Maxwell a introduit de manière géniale et qui permet de calculer le champ magnétique en appliquant le théorème d'**Ampère** en toute généralité, même en présence d'un condensateur. Nous montrerons d'ailleurs qu'en prenant la divergence de la dernière équation, dite de Maxwell-Ampère, nous retrouvons une expression de la conservation de la charge électrique sous la forme

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (\text{IV.3})$$

2) Propagation du champ électromagnétique.

2.1) Dans le vide, donc en l'absence de charge et de courant, les équations de Maxwell se simplifient et prennent la forme d'une équation de d'Alembert pour les champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B}

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Les ondes électromagnétiques se propagent ainsi dans le vide avec une vitesse constante indépendante de la fréquence et reliée à la permittivité diélectrique ϵ_0 et perméabilité magnétique μ_0 du vide

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}. \quad (\text{IV.5})$$

2.2) Polarisation transverses du champ électromagnétique.

Une onde plane est caractérisée par sa pulsation $\omega = 2\pi\nu$, sa fréquence ν , sa direction repérée par le vecteur unitaire \vec{u} et son vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$. Les deux derniers éléments permettent de construire le véritable vecteur d'onde $\vec{k} \equiv k\vec{u}$ et d'exprimer le champ électromagnétique sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (\text{IV.6})$$

Faire agir le vecteur **nabla** $\vec{\nabla}$ revient alors à introduire le vecteur $-i\vec{k}$ et dériver par rapport au temps se résume à multiplier par $i\omega$. La structure d'une onde plane polarisée de manière transverse se traduit par la relation

$$\vec{u} \wedge \vec{E} = c\vec{B} \quad \text{et} \quad c\vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}. \quad (\text{IV.7})$$

Les vecteurs $c\vec{B}$, \vec{u} et \vec{E} forment un trièdre trirectangle. Si $\vec{u} \equiv \vec{e}_z$ est aligné sur l'axe des z , le champ électrique est le vecteur $\vec{E}_0 = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ et possède donc deux états de polarisation transverse caractérisés par E_x et E_y .

2.3) Polarisation circulaire du champ électromagnétique.

On peut également imaginer que le champ électrique s'enroule autour de la direction de propagation \vec{u} . Nous obtenons alors les deux états droite (D) et gauche (G) de polarisation circulaire

$$\vec{E}_{D/G} = \vec{E}_0 \{ \vec{e}_x \pm i \vec{e}_y \} e^{i(\omega t - k z)}. \quad (\text{IV.8})$$

3) Energie électromagnétique.

3.1) Energie électrostatique.

On considère une distribution de charge électrique dont la densité est $\rho(P)$ en tout point P du volume \mathcal{D} . L'énergie associée à cette distribution est égale au travail fourni par un opérateur imaginaire qui la construirait en amenant les charges depuis l'infini. Nous montrerons que

$$U_{\text{ele}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) V(P) d\tau_P \equiv \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau. \quad (\text{IV.9})$$

3.2) Energie magnétique.

On considère cette fois une distribution de courant dans un milieu neutre par ailleurs. La distribution \mathcal{D} englobe cette fois des tubes de courant dont le vecteur densité de courant est noté $\vec{j}(P)$. L'énergie magnétique est égale à

$$U_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(P) \cdot \vec{A}(P) d\tau_P \equiv \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\tau. \quad (\text{IV.10})$$

3.3) Vecteur de Poynting.

Il est défini en tout point par

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (\text{IV.11})$$

Cette définition provient de l'évaluation du flux entrant du vecteur de Poynting à travers la surface fermée \mathcal{S} englobant le volume \mathcal{D} . Un calcul délicat permet de montrer qu'en

toute généralité

$$\Phi_{\text{in}} \equiv - \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\} d\tau_P \right\} + \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau_P . \quad (\text{IV.12})$$

Ce flux est égal tout d'abord à la variation par unité de temps de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{D} . Le second terme correspond à la puissance transmise aux charges électriques situées dans \mathcal{D} et que le champ électrique accélère.

4) Potentiel vecteur et invariance de jauge.

Cette partie assez ésotérique est plutôt réservée aux étudiants de physique et fera l'objet d'une étude en master.

4.1) Définition du potentiel vecteur.

A partir du potentiel électrique V et du potentiel vecteur \vec{A} du magnétisme, on construit un objet à 4 composantes qui a la structure d'un quadri-vecteur de la relativité restreinte

$$A^\mu = \left(A^0 \equiv \frac{V}{c}, \vec{A} \right) . \quad (\text{IV.13})$$

Le champ électromagnétique s'obtient à partir du potentiel vecteur

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} . \quad (\text{IV.14})$$

4.2) L'invariance de jauge.

Le même champ électromagnétique s'obtient à partir de tout un ensemble de potentiels vecteurs différents qui se déduisent cependant les uns des autres par **transformation de jauge**

$$V \rightarrow V' = V + \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \theta , \quad (\text{IV.15})$$

où $\theta(\vec{r}, t)$ est une fonction scalaire dépendant de la position \vec{r} et du temps t .

4.3) La jauge de Lorentz.

Un choix particulier de potentiels vecteurs correspond à la condition de **jauge de Lorentz** pour laquelle

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 . \quad (\text{IV.16})$$

En formalisme de la relativité restreinte, cela correspond à imposer que la quadri-divergence du potentiel vecteur est nulle et donc que $\partial_\mu A^\mu = 0$. On trouve alors que les équations de Maxwell se transforment en équations que vérifie le potentiel vecteur avec

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = 0 . \quad (\text{IV.17})$$

TD IV

Le vecteur de Poynting

1) Diffusion du champ magnétique.

1.1) On considère un milieu conducteur dont la conductivité électrique est σ . Le courant de déplacement étant négligeable par rapport au courant de conduction, montrer que le champ magnétique satisfait l'équation de diffusion

$$D \Delta \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{TD IV.1})$$

Montrer que $D = 1/\mu_0 \sigma$. On rappelle que dans un milieu conducteur de conductivité électrique σ , un courant de conduction $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ se développe en présence du champ électrique \vec{E} .

1.2) Montrer que le champ magnétique à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz

$$\vec{B}(M, t) \equiv B(r, t) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad B(r, t) = \frac{1}{4\pi D t} e^{-r^2/4Dt} \quad (\text{TD IV.2})$$

est bien solution de l'équation de diffusion. La distance du point M à l'axe Oz est notée r .

1.3) Discuter qualitativement la limite où la conductivité électrique σ tend vers l'infini. Nous avons ici un modèle de champ magnétique emprisonné dans un milieu conducteur à l'instar d'un plasma stellaire ou constitué de rayonnement cosmique chargé.

Les trois exercices suivants sont consacrés au vecteur de Poynting.

2) Vecteur de Poynting et condensateur plan.

Un condensateur électrostatique est constitué de deux disques de rayon R se faisant vis-à-vis et séparés par la distance e . Les disques sont horizontaux et parallèles au plan Oxy . Un fil métallique infini placé le long de l'axe Oz est susceptible d'être parcouru par un courant d'intensité i quand on veut faire varier la charge q de l'armature inférieure. Le condensateur circulaire est symétrique de révolution autour de l'axe Oz .

2.1) Quel est le champ électrique entre les deux armatures du condensateur ?

2.2) Lorsque l'intensité i est non-nulle, calculer le champ magnétique en tout point situé entre les deux armatures. On utilisera les propriétés de symétrie du champ magnétique qui se comporte comme un pseudo-vecteur. Il réagit donc comme un vecteur vis-à-vis des rotations mais se comporte à l'opposé d'un vecteur en ce qui concerne les réflexions par rapport à un plan. Montrer que \vec{B} est orthoradial autour de l'axe Oz .

2.3) Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le champ électrique du condensateur. On négligera les effets de bord, considérant alors que le champ électrique est le même que si le condensateur était un plan horizontal infini.

2.4) Comparer ce flux à la variation d'énergie électrostatique du condensateur. Conclusion ?

3) Vecteur de Poynting et solénoïde.

Un solénoïde infini d'axe Oz est parcouru par un courant d'intensité i et contient un champ magnétique uniforme \vec{B} . Ce champ est confiné à l'intérieur du solénoïde dont le rayon est R . Le solénoïde est symétrique de révolution autour de son axe Oz .

3.1) Quelle est la structure du potentiel vecteur \vec{A} autour de l'axe Oz ?

3.2) Lorsque le courant varie, la modification du champ magnétique engendre un champ électromoteur que l'on calculera en fonction de la distance r à l'axe Oz . On décrira la structure de ce champ électromoteur \vec{E} .

3.3) Que vaut le vecteur de Poynting à la surface du solénoïde ? Calculer son flux.

3.4) Evaluer la variation correspondante d'énergie magnétique. Conclusion ?

4) Vecteur de Poynting et résistance électrique.

Une résistance électrique est constituée d'un barreau cylindrique de longueur L et de section S parcouru par un courant électrique d'intensité I . On suppose que le vecteur densité de courant électrique \vec{j} est uniforme à l'intérieur du barreau, avec une conductivité électrique égale à σ . La différence de potentiel aux bornes de cette résistance est notée V .

4.1) Evaluer le champ électrique à l'intérieur de la résistance.

4.2) Que vaut le champ magnétique ?

4.3) Calculer le flux du vecteur de Poynting à la surface du barreau.

4.4) Le comparer à l'énergie électrique transformée en chaleur par effet Joule. Conclusions ?