

Master 2ème année de Physique
ENS de Lyon et Universités de Lyon & de Savoie
Novembre 2006 – Janvier 2007

TD de théorie quantique des champs

Pierre Salati^{1,2}

¹ Laboratoire Ancilévien de Physique Théorique LAPTH, 9 Chemin de Bellevue
B.P. 110, 74941 Annecy-le-Vieux Cedex

² Université de Savoie, B.P. 1104, 73011 Chambéry Cedex
salati@lapp.in2p3.fr & pierre.salati@univ-savoie.fr
téléphone 04.50.09.16.90

Programme

- Vendredi 1 Décembre 2006 – Quantification canonique du champ de Dirac – Quantification à la Gupta–Bleuler de $A_\mu(x)$.
- Vendredi 8 Décembre 2006 – Algèbres et variables de Grassmann – Algèbres de Clifford – Intégration Grassmannienne – Gaussienne Grassmannienne – Solfège de Diracologie.
- Vendredi 15 Décembre 2006 – Calcul du processus

$$e^+(k) + e^-(p) \rightarrow \mu^+(k') + \mu^-(p') .$$

- Vendredi 22 Décembre 2006 – Calcul de la self-énergie de l'électron à une boucle et introduction à la régularisation dimensionnelle.
- Vendredi 12 Janvier 2007 – Calcul du processus de diffusion Compton

$$\gamma(k) + e^-(p) \rightarrow \gamma(k') + e^-(p') .$$

Travaux dirigés I

Quantification canonique

1) Quantification canonique du champ de Dirac $\psi(x)$.

1.1) Exercice I : Anticommutation de ψ et de ψ^\dagger .

• En utilisant la décomposition du champ de Dirac quantique $\psi(x)$ en ondes planes – modes de Fourier – et les relations d’anticommutation des opérateurs de création b^\dagger et d^\dagger et d’annihilation b et d , calculer $\{\psi_\xi(x^0, \vec{x}), \psi_{\xi'}^\dagger(x^0, \vec{y})\}$ puis $\{\psi_\xi(x), \psi_{\xi'}^\dagger(y)\}$ lorsque $x^0 \neq y^0$.

• On définit dans le cas fermionique

$$T \{ \psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y) \} = \theta(x^0 - y^0) \psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\xi(y) \psi_\eta(x) . \quad (\text{TDI.1})$$

Calculer le propagateur de Feynman

$$\overbrace{\psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y)} \equiv \langle 0 | T \{ \psi_\eta(x) \bar{\psi}_\xi(y) \} | 0 \rangle = i \{ S_F(x - y) \}_{\eta\xi} , \quad (\text{TDI.2})$$

et l’exprimer en fonction du propagateur d’un champ scalaire libre.

On rappelle les propriétés de fermeture des bi-spinneurs d’onde plane qui sont solutions de l’équation de Dirac libre

$$\sum_{\alpha=\pm} u(k, \alpha) \otimes \bar{u}(k, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{I} + \frac{\not{k}}{m} \right\} \equiv \frac{\not{k} + m\mathbb{I}}{2m} , \quad (\text{TDI.3})$$

et

$$- \sum_{\alpha=\pm} v(k, \alpha) \otimes \bar{v}(k, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{I} - \frac{\not{k}}{m} \right\} \equiv \frac{-\not{k} + m\mathbb{I}}{2m} . \quad (\text{TDI.4})$$

Remarque : η et ξ sont des indices étiquetant les 4 composantes de $\psi(x)$ en tant que bi-spinneur de Dirac. Chacune de ces 4 composantes est un opérateur.

1.2) Exercice II :

En utilisant la décomposition de $\psi(x)$ en ondes planes – modes de Fourier – calculer

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(x) (i \partial_0 \psi(x)) \quad \text{et} \quad N = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) , \quad (\text{TDI.5})$$

en fonction des créateurs b^\dagger et d^\dagger et des annihilateurs b et d . Indication : en utilisant les équations de Dirac des bi-spinneurs u et v , montrer tout d’abord que

$$u^\dagger(\tilde{k}, \beta) \cdot v(k, \alpha) = 0 , \quad (\text{TDI.6})$$

où $k = (k^0, \vec{k})$ et $\tilde{k} = (k^0, -\vec{k})$

1.3) Exercice III :

- Calculer explicitement

$$\int d^3x e^{ip \cdot x} u^\dagger(p, \beta) \psi(x) , \quad (\text{TDI.7})$$

en fonction des créateurs b^\dagger et d^\dagger et des annihilateurs b et d . Le résultat ne doit pas dépendre de x^0 . Idem pour

$$\int d^3x e^{-ip \cdot x} v^\dagger(p, \beta) \psi(x) . \quad (\text{TDI.8})$$

- En déduire que si

$$\left\{ \psi_\eta(x), \psi_\xi^\dagger(y) \right\}_{x^0=y^0} = \delta_{\eta\xi} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (\text{TDI.9})$$

et

$$\left\{ \psi_\eta(x), \psi_\xi(y) \right\}_{x^0=y^0} = 0 , \quad (\text{TDI.10})$$

alors les créateurs b^\dagger et d^\dagger et les annihilateurs b et d satisfont des relations d'anticommutation que l'on dérivera.

2) Quantification à la Gupta–Bleuler de $A_\mu(x)$.

On considère le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{(\lambda=1)}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 . \quad (\text{TDI.11})$$

2.1) Exercice IV :

- Calculer le moment conjugué

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\alpha)} . \quad (\text{TDI.12})$$

- Calculer le Hamiltonien

$$H = \int d^3x \{ \Pi_\alpha (\partial_0 A^\alpha) - \mathcal{L} \} , \quad (\text{TDI.13})$$

en fonction de $\partial_0 A_0 = \dot{A}_0$, $\partial_0 \vec{A} = \dot{\vec{A}}$, A_0 et \vec{A} .

2.2) Exercice V :

- A partir des relations de quantification canonique à temps égaux

$$\begin{aligned} [A^\mu(x^0, \vec{x}), \Pi^\nu(x^0, \vec{y})] &= i g^{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [A^\mu(x^0, \vec{x}), A^\nu(x^0, \vec{y})] &= 0 \\ [\Pi^\mu(x^0, \vec{x}), \Pi^\nu(x^0, \vec{y})] &= 0 \end{aligned}$$

calculer les commutateurs à temps égaux

$$\left[A^\mu(x^0, \vec{x}), \dot{A}^\nu(x^0, \vec{y}) \right] \text{ et } \left[\dot{A}^\mu(x^0, \vec{x}), \dot{A}^\nu(x^0, \vec{y}) \right] . \quad (\text{TDI.14})$$

En rapprochant le résultat du cas du champ scalaire et en décomposant le potentiel vecteur $A^\mu(x)$ en ondes planes avec

$$A^\mu(x) = \int \tilde{d}k \sum_{\lambda=0}^3 \left\{ a(k, \lambda) \epsilon^\mu(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k, \lambda) \epsilon^\mu(k, \lambda)^* e^{ik \cdot x} \right\} , \quad (\text{TDI.15})$$

calculer les relations de commutation entre créateurs $a^\dagger(k, \alpha)$ et annihilateurs $a(p, \beta)$.

2.3) Exercice VI :

En utilisant l'ordre normal

$$: a(k, \alpha), a^\dagger(p, \beta) : \equiv a^\dagger(p, \beta) a(k, \alpha) \equiv : a^\dagger(p, \beta) a(k, \alpha) : , \quad (\text{TDI.16})$$

Exprimer H : en fonction des créateurs et des annihilateurs.

2.4) Exercice VII :

• A partir de la décomposition (TDI.15) de $A^\mu(x)$ en ondes planes, calculer $\{\partial_\mu A^\mu\} |0\rangle$ où le vide est l'état quantique annulé par tous les opérateurs $a(k, \lambda)$.

• Expliquer alors pourquoi la relation

$$\{\partial_\mu A^\mu\} |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad (\text{TDI.17})$$

ne peut être une "bonne" condition pour sélectionner les états physiques.

• Expliquer pourquoi la condition

$$\langle \Psi_{\text{phys}} | \{\partial_\mu A^\mu\} | \Psi_{\text{phys}} \rangle = 0 \quad (\text{TDI.18})$$

ne peut être également retenue. Indication : en dépit de son attrait, la condition (TDI.18) ne possède pas une propriété essentielle en théorie quantique – laquelle ?

• La partie de $A^\mu(x)$ qui contient des ondes planes à énergie positive est définie par

$$A_{(+)}^\mu(x) = \int \tilde{d}k \sum_{\lambda=0}^3 a(k, \lambda) \epsilon^\mu(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} . \quad (\text{TDI.19})$$

Exprimer $A^\mu(x)$ en fonction de $A_{(+)}^\mu(x)$ et définir $A_{(-)}^\mu(x)$. Proposer alors une condition

- (i) du genre (TDI.17) mais en moins exigeant,
- (ii) qui possède la propriété essentielle identifiée plus haut,
- (iii) et de laquelle on peut dériver la condition (TDI.18).

2.5) Exercice VIII :

En explicitant la condition trouvée précédemment, montrer que

$$\{a(k, 0) - a(k, 3)\} |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad \forall k^\mu = (|k|, \vec{k}) . \quad (\text{TDI.20})$$

Indication : on rappelle que $k \cdot \epsilon(k, \lambda = 1, 2) = 0$ et on prendra $\epsilon(k, 0)$ égal au vecteur unitaire temporel $e^{(0)}$ et $\epsilon(k, 3)$ égal au vecteur unitaire spatial $e^{(3)}$ parallèle à l'impulsion \vec{k} .

2.6) Exercice IX :

- Montrer que

$$N = \int \tilde{d}\vec{k} \left\{ a^\dagger(k, 3)a(k, 3) - a^\dagger(k, 0)a(k, 0) \right\} \quad (\text{TDI.21})$$

est un opérateur de comptage des polarisations non-physiques. Indication : on pourra étudier l'action de N sur des états de la forme

$$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle \otimes |\Phi\rangle \equiv \prod_{j=1}^p a^\dagger(k_j, \alpha_j) \cdot \prod_{i=1}^n a^\dagger(q_i, \beta_i) |0\rangle , \quad (\text{TDI.22})$$

où $\alpha_j \in \{1, 2\}$ et $\beta_i \in \{0, 3\}$.

- En écrivant $|\Psi_{\text{phys}}\rangle = |\Psi_T\rangle \otimes |\Phi\rangle$, on montrera que la condition (TDI.20) équivaut à la relation

$$\{a(k, 0) - a(k, 3)\} |\Phi_n\rangle = 0 \quad \forall k^\mu = (|k|, \vec{k}) . \quad (\text{TDI.23})$$

Donner alors la forme générale des vecteurs $|\Phi_n\rangle$ en fonction des créateurs $a^\dagger(k, 0)$ et $a^\dagger(k, 3)$. Calculer $\langle \Phi_n | N | \Phi_n \rangle$. En déduire $\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle$ ainsi que $\langle \Phi | \Phi \rangle$ et finalement $\langle \Psi_{\text{phys}} | \Psi_{\text{phys}} \rangle$.

2.7) Exercice X :

A l'aide du résultat de l'exercice VI, calculer

$$\frac{\langle \Psi_{\text{phys}} | : H : | \Psi_{\text{phys}} \rangle}{\langle \Psi_{\text{phys}} | \Psi_{\text{phys}} \rangle} . \quad (\text{TDI.24})$$

Votre résultat dépend-il de $|\Phi\rangle$?

2.8) Exercice XI :

- En utilisant la décomposition de $A^\mu(x)$ en ondes planes, calculer la valeur moyenne

$$\langle \Psi_{\text{phys}} | A^\mu(x) | \Psi_{\text{phys}} \rangle , \quad (\text{TDI.25})$$

où l'état $|\Psi_{\text{phys}}\rangle = |0\rangle_T \otimes |\Phi\rangle$ ne possède que des excitations associées à des polarisations non physiques. Interpréter et commenter votre résultat.

- Comparer les valeurs moyennes $\langle \Psi_{\text{phys}}^{(1)} | A^\mu(x) | \Psi_{\text{phys}}^{(1)} \rangle$ et $\langle \Psi_{\text{phys}}^{(2)} | A^\mu(x) | \Psi_{\text{phys}}^{(2)} \rangle$ où les vecteurs en jeu sont définis par

$$| \Psi_{\text{phys}}^{(1)} \rangle = | \Psi_T \rangle \otimes | \Phi^{(1)} \rangle , \quad (\text{TDI.26})$$

et

$$| \Psi_{\text{phys}}^{(2)} \rangle = | \Psi_T \rangle \otimes | \Phi^{(2)} \rangle . \quad (\text{TDI.27})$$

Le vecteur $| \Psi_T \rangle$ est le même dans les deux cas. Commenter.

Travaux dirigés II

Algèbres de Grassmann et solfège de Diracologie

1) Algèbres et variables de Grassmann.

1.1) Exercice I : Construction concrète de variables de Grassmann.

- A l'aide des matrices γ^μ de Dirac et en choisissant judicieusement un vecteur dans l'espace de Minkowski, fabriquer une variable de Grassmann η telle que $\eta^2 = 0$.
- Modifier astucieusement la métrique $g^{\mu\nu}$ de Minkowski et la propriété caractéristique correspondante de l'algèbre des matrices γ^μ – algèbre de Clifford – et choisir judicieusement deux vecteurs dans cet espace de Minkowski modifié afin de construire **deux** grassmanniens indépendants et anticommuteurs

$$\{\eta_i, \eta_j\} = 0 \quad \text{avec} \quad i, j = 1, 2 \quad . \quad (\text{TDII.1})$$

L'exercice suivant présente les outils permettant d'étendre cette construction à un nombre N quelconque de grassmanniens indépendants et anticommuteurs.

1.2) Exercice II : Algèbre de Clifford.

Dans un espace-temps de dimension $2N$, les matrices de Dirac $\gamma_{(2N)}^\mu$ obéissent aux relations d'anticommutation

$$\left\{ \gamma_{(2N)}^\mu, \gamma_{(2N)}^\nu \right\} = 2 g_{(2N)}^{\mu\nu} \mathbb{I}_{2N} \quad , \quad (\text{TDII.2})$$

où les indices μ et ν varient de 1 à $2N$.

- Pour $N = 1$, construire une réalisation de l'algèbre précédente à partir des matrices de Pauli. Indication : on pourra prendre $\gamma_{(2)}^1 \equiv \sigma_z$ et $\gamma_{(2)}^2 \equiv \sigma_y$. Donner alors la valeur de la métrique $g_{(2)}^{\mu\nu}$ que l'on obtient dans ce cas.

- Dans l'espace-temps usuel, le paramètre N vaut 2. Montrer que les matrices

$$\gamma_{(4)}^1 \propto \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_2 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{I}_2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \gamma_{(4)}^{\mu+1} \propto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\gamma_{(2)}^\mu \\ \hline \gamma_{(2)}^\mu & 0 \end{array} \right) \quad (\text{TDII.3})$$

ainsi que

$$\gamma_{(4)}^4 \propto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\gamma_{(2)}^1 \gamma_{(2)}^2 \\ \hline \gamma_{(2)}^1 \gamma_{(2)}^2 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{TDII.4})$$

permettent de construire une réalisation de l'algèbre de Clifford (TDII.2). On ajustera les constantes de proportionnalité afin de retrouver l'algèbre des matrices 4×4 de Dirac dans l'espace-temps usuel dont la métrique $g_{(4)}^{\mu\nu}$ possède la signature $(+, -, -, -)$.

- Etendre par récurrence l'analyse précédente à une dimension paire $2N+2$ quelconque en considérant les matrices

$$\gamma_{(2N+2)}^1 \propto \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{2N} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{I}_{2N} \end{array} \right) \text{ puis } \gamma_{(2N+2)}^{\mu+1} \propto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\gamma_{(2N)}^\mu \\ \hline \gamma_{(2N)}^\mu & 0 \end{array} \right) \quad (\text{TDII.5})$$

et finalement

$$\gamma_{(2N+2)}^{2N+2} \propto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -X \\ \hline X & 0 \end{array} \right), \quad (\text{TDII.6})$$

où la matrice X est égale au produit $\gamma_{(2N)}^1 \gamma_{(2N)}^2 \cdots \gamma_{(2N)}^{2N}$.

- Comment trouver maintenant l'algèbre de Clifford dans un espace-temps de dimension impaire $2N+1$. On montrera par exemple que la matrice X anticommute avec toutes les matrices $\gamma_{(2N)}^\mu$.

2) Exercice III : Propriétés de l'intégration Grassmannienne.

Démontrer les propriétés suivantes:

2.1) Invariance par translation:

Montrer que

$$\int d\eta (\eta + c) = 1, \quad (\text{TDII.7})$$

et en déduire que cette intégrale ne dépend pas de c .

2.2) Intégration par parties:

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions analytiques, établir que

$$\int d\eta \left[\frac{d}{d\eta} f(\eta) \right] g(\eta) = + \int d\eta f(\eta) \left[\frac{d}{d\eta} g(\eta) \right] \quad (\text{TDII.8})$$

2.3) Changement de variables:

Montrer que

$$\int d\eta f(\eta) = a^{-1} \int d\xi f(a\xi + b). \quad (\text{TDII.9})$$

Commenter les différences de (TDII.8) et (TDII.9) avec leurs contreparties du cas "numérique ordinaire".

2.4) Généralisation de (TDII.9) au cas de plusieurs variables:

On se limite ici au cas linéaire entre Grassmanniens anticommutants:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n J_{ij} \xi_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{TDII.10})$$

où J est une matrice carrée $n \times n$ inversible. Etablir que

$$d\eta_1 \cdots d\eta_n = (\det J)^{-1} d\xi_1 \cdots d\xi_n \quad (\text{TDII.11})$$

Commentaire: on peut généraliser à des changements de variables non linéaires

$$\eta_i = \eta_i(\{\xi_j\}) \quad , \quad (\text{TDII.12})$$

où la jacobienne du changement de variables

$$J_{ij}(\{\xi\}) = \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \right] \quad (\text{TDII.13})$$

est une matrice $n \times n$ à coefficients Grassmanniens, mais comportant une partie “scalaire” – de nombres ordinaires – inversible de sorte que J soit elle-même inversible. Le jacobien – le déterminant de J – est alors un polynôme dans les Grassmanniens ξ_j . La démonstration de cette généralisation est exactement aussi fastidieuse que celle de la formule du changement de variables multidimensionnelles dans le cas scalaire ordinaire...

3) Exercice IV : “Gaussiennes” Grassmanniennes.

Ces fonctions n’ont de gaussiennes que le nom. De quoi s’agit-il en réalité ?

3.1) Cas simple à une variable:

Les variables $\bar{\eta}$ et η sont des générateurs grassmanniens indépendants, m est un nombre scalaire. Etablir que

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-m\bar{\eta}\eta} = m \quad . \quad (\text{TDII.14})$$

3.2) 1^{ere} extension à plusieurs variables:

Les variables $\bar{\eta}_i$ et η_j sont des générateurs grassmanniens indépendants. Les m_i sont des scalaires et $M_{ij} = m_i \delta_{ij}$. Etablir que

$$\int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \cdots d\bar{\eta}_n d\eta_n \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n m_j \bar{\eta}_j \eta_j \right\} = \prod_{i=1}^n m_i = \det M \quad . \quad (\text{TDII.15})$$

3.3) 2^{eme} extension à plusieurs variables:

Les variables $\bar{\eta}_i$ et η_j sont des générateurs grassmanniens indépendants. La matrice M_{ij} est à coefficients scalaires – réels ou complexes – pas forcément symétrique ni hermitienne. Etablir que

$$\int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \cdots d\bar{\eta}_n d\eta_n \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \bar{\eta}_i \eta_j \right\} = \det M \quad . \quad (\text{TDII.16})$$

Indication: utiliser le théorème de “bi-diagonalisation” suivant lequel

$$M = U^\dagger . D . V \quad , \quad (\text{TDII.17})$$

où M est une matrice $n \times n$ complexe quelconque, U et V sont deux matrices $n \times n$ unitaires (i.e. $U^\dagger . U = 1$). Utiliser alors un changement de variables astucieux pour vous ramener à un cas précédent.

Commentaire: ce petit résultat d’algèbre élémentaire (TDII.17) s’établit aisément dans le cas où M est inversible. C’est un tripatouillage plus fastidieux dans le cas non inversible. Il vous servira aussi au module prochain dans le cours de théorie électrofaible lors de la diagonalisation de la matrice de masse des quarks et de l’identification de l’origine de la matrice de mélange dite de **Cabbibo–Kobayashi–Maskawa**.

3.4) 3^{eme} extension à plusieurs variables:

Les variables $\bar{\eta}_i$ et η_j sont des générateurs grassmanniens indépendants. La matrice M_{ij} est à coefficients scalaires – réels ou complexes – inversible mais pas forcément symétrique ni hermitienne. De plus, $\bar{\omega}_i$ et ω_j sont $2n$ grassmanniens indépendants des précédents. Etablir que

$$\int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \cdots d\bar{\eta}_n d\eta_n e^{-M_{ij} \bar{\eta}_i \eta_j + \bar{\omega}_i \eta_i + \bar{\eta}_i \omega_i} = (\det M) e^{(M^{-1})_{ij} \bar{\omega}_i \omega_j} \quad . \quad (\text{TDII.18})$$

Indication: faire un changement de variables astucieux pour se ramener au cas précédent.

3.5) Autre cas à plusieurs variables:

Soit A une matrice $N \times N$ antisymétrique réelle ou complexe. On veut calculer l’expression

$$I(A) = \int d\bar{\eta}_N \cdots d\bar{\eta}_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \eta_i \eta_j \right\} \quad . \quad (\text{TDII.19})$$

- Dans le cas où N est impair, montrer que $I(A) = 0$.
- Dans le cas où $N = 2n$, $n \geq 1$, montrer que

$$\{I(A)\}^2 = \det A \quad . \quad (\text{TDII.20})$$

Indication: mélanger les deux “ $I(A)$ ”.

Montrer que

$$I(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} \epsilon_{\sigma(1) \cdots \sigma(2n)} \prod_{i=0}^{n-1} A_{\sigma(2i+1) \sigma(2i+2)} \quad (\text{TDII.21})$$

$$= Pf(A) \quad , \quad (\text{TDII.22})$$

ce que l’on appelle le “Pfaffien” de A . Ici la somme court sur les permutations σ des $2n$ premiers entiers. Indication: combinatoire un peu fastidieuse... à réserver aux amateurs!

4) Exercice V : Solfège de Diracologie.

Cet exercice et le suivant constituent un échauffement indispensable en préparation des calculs des éléments de matrice S pour des processus physiques. La théorie des champs a quand même été inventée pour cela...

4.1) Conjugaison hermitienne de matrices γ .

On rappelle que

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^{j=1,2,3})^\dagger = -\gamma^j \quad (\text{TDII.23})$$

Montrer que ceci peut s'écrire:

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \quad (\text{TDII.24})$$

On note $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$ un produit de n matrices γ^μ :

$$\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} = \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \quad (\text{TDII.25})$$

Calculer $(\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger$. Etudier en particulier le cas de

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \quad (\text{TDII.26})$$

où l'on définit $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -$ le signe de la permutation $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{\mu, \nu, \rho, \sigma\}$. Montrer que le résultat obtenu pour la conjugaison hermitienne de γ_5 est compatible avec l'anticommution de γ_5 et des γ^μ .

4.2) Conjugaison complexe de termes bilinéaires dans les spineurs.

Les solutions d'onde plane d'énergie positive et négative de l'équation de Dirac à masse m dans l'espace des quadri-impulsions sont respectivement $u(k, \alpha = \pm)$ et $v(k, \beta = \pm)$ avec $(\not{k} - m\mathbb{I})u(k, \alpha = \pm) = 0$ et $(\not{k} + m\mathbb{I})v(k, \alpha = \pm) = 0$.

Montrer que les matrices 4×4 $\Lambda_\pm(k)$ définies par

$$[\Lambda_+(k)]_{ab} = +\frac{\not{k} + m\mathbb{I}}{2m} = +\sum_{\alpha=\pm} u_a(k, \alpha)\bar{u}_b(k, \alpha) \quad (\text{TDII.27})$$

$$[\Lambda_-(k)]_{ab} = -\frac{\not{k} - m\mathbb{I}}{2m} = -\sum_{\beta=\pm} v_a(k, \beta)\bar{v}_b(k, \beta) \quad (\text{TDII.28})$$

sont des "projecteurs orthogonaux". On les appelle "projecteurs d'énergie positive" et "d'énergie négative" respectivement.

On note $w = u$ ou v . Montrer que:

$$(\bar{w}_1 \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} w_2)^* = \bar{w}_2 \gamma^0 (\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger \gamma^0 w_1 \quad (\text{TDII.29})$$

Montrer que

$$\sum_{\alpha, \beta = \pm} |\bar{w}_1(k, \alpha) \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} w_2(p, \beta)|^2 = \text{tr} \left\{ P_{(1)}(k) \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} P_{(2)}(p) \gamma^0 (\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger \gamma^0 \right\} \quad (\text{TDII.30})$$

où $P_{(j=1,2)} = \Lambda_+$ si $w_j = u$ et $P_{(j=1,2)} = -\Lambda_-$ si $w_j = v$.

Commentaires:

1) Ici on a sommé sur les états de spins. Mais la même méthode fonctionne aussi si on ne somme pas sur les états de spins, à condition d'utiliser les relations de fermeture adaptées à la situation. Ainsi si on note n le quadri-vecteur de type espace orthogonal à k et le long duquel est quantifié le spin, $u(k, n, \pm)$ la solution d'énergie positive et de spin \pm selon n , et $v(k, n, \pm)$ la solution d'énergie négative et de spin \pm selon n , alors

$$u_a(k, n, \pm) \bar{u}_b(k, n, \pm) = \left[\frac{\not{k} + m\mathbb{I}}{2m} \times \frac{\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \right]_{ab}, \quad (\text{TDII.31})$$

$$v_a(k, n, \pm) \bar{v}_b(k, n, \pm) = \left[\frac{\not{k} - m\mathbb{I}}{2m} \times \frac{\mathbb{I} \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \right]_{ab}, \quad (\text{TDII.32})$$

où les projecteurs de spin et d'énergie commutent – à vérifier. Attention: ici, il n'y a aucune somme dans le membre de gauche.

2) L'identité (TDII.30) montre que le calcul d'expressions de ce type ne nécessite aucunement de connaître l'expression explicite des bi-spineurs d'onde plane dans telle ou telle base de référence: on se ramène à un calcul de trace de matrices γ . On va voir dans le prochain exercice que ces calculs de traces eux-mêmes ne nécessitent absolument pas de connaître l'expression explicite des matrices γ dans telle ou telle représentation – Dirac, chirale, de Majorana, peu importe – mais se ramène à un exercice algébrique itératif très simple.

5) Exercice VI : Solfège de Diracologie – suite.

En utilisant la relation d'anticommutation des matrices γ , établir les propriétés suivantes:

5.1) Traces de matrices γ .

Montrer que

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 4 g^{\mu\nu} \quad (\text{TDII.33})$$

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{TDII.34})$$

Proposer une généralisation de ceci au calcul d'une trace de $2n$ matrice γ – décrire la démarche.

$$\text{tr} \{ \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_{2n+1}} \} = 0 \quad (\text{TDII.35})$$

$$\text{tr} \{ \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_{2n}} \} = \text{tr} \{ \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_1} \} \quad (\text{TDII.36})$$

Indication: pour (TDII.35), insérer $\mathbb{I} = \gamma_5^2$ et utiliser la cyclicité de la trace. Pour (TDII.36), procéder de même en insérant $\mathbb{I} = C^{-1}.C$ où $C = i\gamma^2\gamma^0$ est la matrice de conjugaison de charge, telle que $C^{-1} = C^\dagger = -C$ et capable de transposer les matrices γ puisque

$$C.\gamma^\mu.C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T . \quad (\text{TDII.37})$$

Etudier ainsi la transposition de γ_5 .

5.2) Traces de matrices γ avec un γ_5 .

Etablir que

$$\text{tr} \{ \gamma_5 \} = 0 \quad (\text{TDII.38})$$

$$\text{tr} \{ \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \} = 0 \quad (\text{TDII.39})$$

$$\text{tr} \{ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 0 \quad (\text{TDII.40})$$

$$\text{tr} \{ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = -4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4 i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{TDII.41})$$

Proposer une généralisation de ceci au calcul d'une trace de $2n$ matrices γ avec un γ_5 – décrire la démarche.

5.3) Chaînes de matrices γ avec contractions d'indices de Lorentz.

Etablir que

$$g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 \mathbb{I} \quad (\text{TDII.42})$$

$$g_{\mu\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = -2\gamma^\nu \quad (\text{TDII.43})$$

$$g_{\mu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4g^{\nu\rho} \mathbb{I} \quad (\text{TDII.44})$$

$$g_{\mu\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (\text{TDII.45})$$

Travaux dirigés III

Calcul du processus $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Cette séance a pour objet le calcul du taux de transition de la réaction d'annihilation

$$e^+(k) e^-(p) \rightarrow \mu^+(k') \mu^-(p') , \quad (\text{TDIII.1})$$

en électrodynamique quantique – QED – dans le cadre de la théorie des perturbations, c'est-à-dire dans le cadre du développement en puissances du paramètre de couplage $\alpha = e^2/4\pi$ – dans les unités où $\hbar = c = 1$ – à l'approximation dite de Born, donc à l'ordre le plus bas en α , soit ici α^2 . Les quantités entre parenthèses dans l'équation (TDIII.1) ci-dessus sont les énergies-impulsions des particules. On notera $s = (k + p)^2$ le carré de l'énergie totale dans le centre de masse de la réaction.

On négligera le fait que le muon est une particule instable – ce phénomène relève de l'interaction faible – et on le traitera de la même façon que l'électron. On négligera plus généralement tout effet de l'interaction faible. On négligera également le fait que le système $\mu^+ \mu^-$ peut former des états liés “muonium”. Ceci est légitime lorsque \sqrt{s} est suffisamment grande devant le seuil $2m_\mu$.

On considèrera que l'on a quantifié la QED à la Gupta-Bleuler, avec le lagrangien

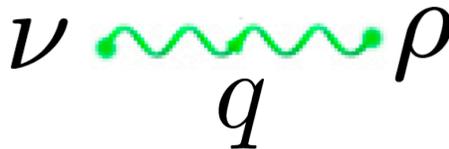
$$\mathcal{L} = \sum_{f=e,\mu} \bar{\psi}_f (i\mathcal{D}_f - m_f \mathbb{I}) \psi_f - \frac{1}{4} F_{\nu\rho} F^{\nu\rho} - \frac{\xi}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 , \quad (\text{TDIII.2})$$

où $\mathcal{D}_f = \gamma^\sigma (\partial_\sigma + ie Q_f A_\sigma)$ et où Q_f est la valeur de la charge électrique du fermion d'espèce f .

On rappelle les règles de Feynman de la QED avec des fermions de Dirac, utiles dans ce TD:

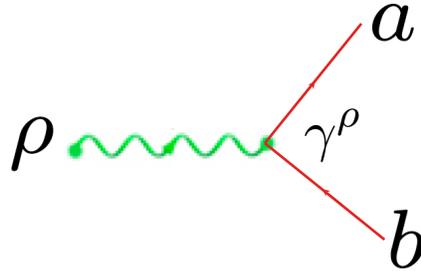
- Propagateur du photon:

$$iG_{\nu\rho}(q) = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left\{ -g_{\nu\rho} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{q_\nu q_\rho}{q^2 + i\epsilon} \right\}$$



- **vertex d'interaction entre le fermion chargé d'espèce f et le photon:**

$$-i e Q_f [\gamma^\rho]_{ab} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \text{ (conservation d'énergie-impulsion au vertex)}$$



Les lignes fermioniques sont orientées de sorte que la charge $+Q_f$ entre dans le vertex dans le sens de la flèche et $+Q_f$ sort du vertex dans le sens de la flèche.

- Dans le cas concerné par ce TD, les indices vectoriels de Lorentz des vertex se contractent sur ceux du propagateur du photon. Par contre les indices spinoriels de Dirac des vertex ne se contractent sur aucun propagateur. Ce sont des “moignons de pattes externes” qu’il faut contracter sur des bi-spineurs d’onde plane selon les prescriptions suivantes:

- (i) **fermion entrant:** $u_b(p, n, \lambda)$
à droite de la chaîne de matrices γ
- (ii) **anti-fermion entrant:** $\bar{v}_a(p, n, \lambda)$
à gauche de la chaîne de matrices γ
- (iii) **fermion sortant:** $\bar{u}_a(p, n, \lambda)$
à gauche de la chaîne de matrices γ
- (iv) **anti-fermion sortant:** $v_b(p, n, \lambda)$
à droite de la chaîne de matrices γ

Enfin on intègre sur les quadri-impulsions des lignes internes du diagramme. Ces lignes internes sont des propagateurs.

QUESTION 1 : En utilisant les règles de Feynman de la QED, tracer le ou les diagrammes de Feynman correspondant à l'ordre le plus bas en α . Combien y en a-t-il? Ecrivez la ou les amplitudes de transitions correspondantes.

*Indication: Lorsqu'on a tracé le diagramme de Feynman d'une amplitude de transition, une façon simple de procéder pour écrire l'amplitude correspondante est de partir de l'extrémité d'une ligne fermionique en regardant si celle-ci est dans l'état initial ou bien dans l'état final – on commence à écrire \bar{v} ou bien \bar{u} suivant le cas – puis de remonter en sens inverse de la flèche qui oriente cette ligne fermionique jusqu'à son autre extrémité – en empilant de gauche à droite les matrices γ des vertex et des propagateurs fermioniques au fur et à mesure où on les rencontre lors de cette remontée de ligne – et de regarder alors si cette dernière est dans l'état initial ou bien dans l'état final – finissant ainsi de transcrire la ligne fermionique considérée par un u ou bien un v . L'expression écrite doit être un nombre **sans indice spinoriel**, de la forme $\bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2$. Ensuite on passe successivement aux autres lignes fermioniques du diagramme que l'on traite de la même manière.*

QUESTION 2 : Montrer que la partie en

$$\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{q_\rho q_\sigma}{q^2 + i\epsilon}$$

du propagateur du photon intermédiaire ($q = k + p$) ne contribue pas. Donner une explication à ce phénomène et commenter.

Mots-clés : courant conservé, indépendance vis-à-vis de la fixation de jauge.

QUESTION 3 : On va considérer le cas où les leptons incidents ne sont pas polarisés – leurs états de spin sont inconnus – et où l'on ne mesure pas non plus le spin des leptons sortants. Ecrire le module carré de l'amplitude de transition de la Question 1 en fonction de traces de chaînes de matrices γ .

Indication: les $u_{(e)}, v_{(e)}$ se combinent en trace d'un côté, les $u_{(\mu)}, v_{(\mu)}$ de l'autre. Attention à ne surtout pas faire intervenir des âneries du genre

$$\sum_{\lambda=\pm} u_{(e),a}(k_e, \lambda) \bar{u}_{(\mu),b}(p_\mu, \lambda) = \{\text{je ne sais quelle horreur !}\}_{ab}$$

Chaque trace porte deux indices de Lorentz. Les indices de “ $tr_{(e)}$ ” et ceux de “ $tr_{(\mu)}$ ” sont contractés au moyens du propagateur du photon intermédiaire.

QUESTION 4 : En utilisant les propriétés des traces de matrices γ vues au TD II, calculer explicitement ces traces, et calculer leur contraction de Lorentz l'une sur l'autre. Montrer que, après un peu de cinématique, le module carré de l'amplitude de transition moyennée sur les spins initiaux et sommée sur les spins finaux peut s'écrire:

$$\frac{1}{2^2} \sum_{\sigma, \sigma', \tau, \tau'} |\mathcal{T}|^2 = \frac{1}{2^2} e^4 Q_e^2 Q_\mu^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{(2m_e)^2} \frac{1}{(2m)^2} 4^2 \{2(p.k')(p'.k) + 2(p.p')(k.k') + s(m_e^2 + m_\mu^2)\} \quad (\text{TDIII.3})$$

QUESTION 5 : Ecrire la section efficace différentielle correspondant à ce processus. Montrer que, une fois les intégrations triviales faites, celle-ci peut s'écrire:

$$d\sigma (e^+e^- \rightarrow \mu+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s} Q_e^2 Q_\mu^2 \frac{\beta_\mu}{\beta_e} \{3 - \beta_e^2 - \beta_\mu^2 + \beta_e^2 \beta_\mu^2 \cos^2 \theta_{pp'}\} d \cos \theta_{pp'} d\phi , \quad (\text{TDIII.4})$$

où

$$\beta_f = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{s}} . \quad (\text{TDIII.5})$$

Quelle est la signification physique de β_f ?

Indication: Se placer dans le centre de masse pour exprimer (TDIII.4) et pour interpréter (TDIII.5).

Donner la limite ultra-relativiste de (TDIII.4).

QUESTION 6 : Calculer la section efficace totale. Montrer qu'elle peut s'écrire, pour $s \geq 4m_\mu^2$:

$$\sigma_{\text{tot}} (e^+e^- \rightarrow \mu+\mu^-) = \frac{\pi\alpha^2}{3s} Q_e^2 Q_\mu^2 \frac{\beta_\mu}{\beta_e} \{3 - \beta_e^2\} \{3 - \beta_\mu^2\} \quad (\text{TDIII.6})$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_e^2 Q_\mu^2 \left[\frac{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{2m_e^2}{s} \right] \left[1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right] \quad (\text{TDIII.7})$$

Donner la limite ultra-relativiste de $\sigma_{\text{tot}} (e^+e^- \rightarrow \mu+\mu^-)$.

QUESTION 7 : Commenter qualitativement les effets non calculés ci-dessus, qui affectent $\sigma_{\text{tot}} (e^+e^- \rightarrow \mu+\mu^-)$ lorsque $\sqrt{s} \leq 2m_\mu$. Donner une estimation de la largeur de la région en énergies concernée, le type d'effets attendus et une estimation "à la louche" de quelques caractéristiques de ceux-ci.

QUESTION 8 : Expliquer comment, à partir du calcul de l'amplitude de transition précédemment étudiée, on peut donner celle de la réaction

$$\mu^-(q) e^-(p) \rightarrow \mu^-(q') e^-(p') . \quad (\text{TDIII.8})$$

Commentaire: cette propriété porte le nom de "propriété de croisement. Elle reflète l'analyticité des amplitudes de transition dans les variables cinématiques.

QUESTION 9 : Par contre, expliquer la différence entre (TDIII.1) et la réaction

$$e^+(k) e^-(p) \rightarrow e^+(k') e^-(p') . \quad (\text{TDIII.9})$$

Tracer dans ce cas tous les diagrammes de Feynman et obtenir les amplitudes correspondantes à partir des questions 1 et 9. Lorsqu'on calcule le module carré de l'amplitude totale correspondante, qu'intervient-il de nouveau ?

Travaux dirigés IV

Calcul de la self-énergie de l'électron à une boucle

Cette séance a pour objet le calcul de la self-énergie de l'électron à une boucle en utilisant le formalisme de la réduction dimensionnelle. Il s'agit donc de calculer le diagramme de la figure IV.1, d'évaluer sa divergence dans un espace euclidien de dimension $D = 4 - 2\epsilon$ puis de faire apparaître le pôle éventuel lorsque ϵ tend vers 0.

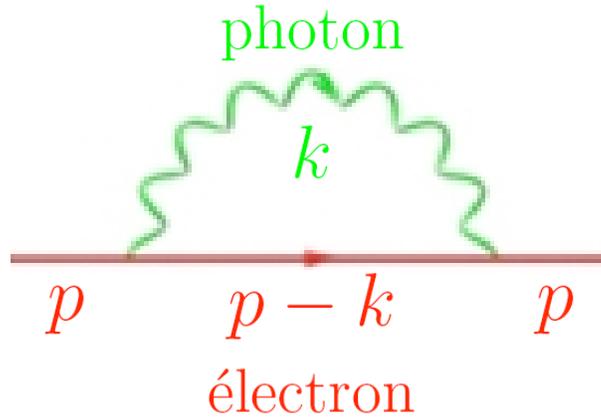


Figure IV.1: Ce diagramme corrige à l'ordre d'une boucle le propagateur de l'électron.

QUESTION 1 : En vous aidant de la figure IV.2, établir que

$$iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p) + i\epsilon} . \quad (\text{TDIV.1})$$

QUESTION 2 : Considérons d'une manière générale un diagramme de Feynman d'ordre n au sein duquel une ligne fermionique relie le point z_i au point z_f . Le propagateur de Feynman libre associé est défini par

$$\langle 0 | T \{ \psi(z_f) \bar{\psi}(z_i) \} | 0 \rangle = iS_0(z_f - z_i) . \quad (\text{TDIV.2})$$

Les impulsions d'entrée et de sortie du diagramme complet étant fixées, le développement de Fourier du propagateur $S_0(z_f - z_i)$ fait apparaître l'impulsion p partant de z_i et aboutissant à z_f . Le premier terme correctif S_0 provient du diagramme d'ordre $n + 2$ dans lequel on interpose entre les points z_i et z_f les vertex $-ie A_\mu(x) : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :$ et $-ie A_\nu(y) : \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) :$. Connecter ces vertex de manière appropriée afin de retrouver le diagramme IV.1. En développant ensuite l'expression obtenue dans l'espace de Fourier, montrer que le terme correctif à prendre

en compte s'écrit

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \left\{ -i \Sigma^{(1)}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i G_{\mu\nu}(k) \gamma^\mu \cdot i S_0(p-k) \cdot \gamma^\nu \right\} , \quad (\text{TDIV.3})$$

où p_i est l'impulsion qui quitte le point z_i et p_f est celle aboutissant en z_f . Le propagateur du photon est défini par

$$\langle 0 | T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} | 0 \rangle = i G_{\mu\nu}(x-y) . \quad (\text{TDIV.4})$$

L'expression du propagateur $i G_{\mu\nu}(k)$ a été donnée dans le TD précédent et l'on prend $\xi = 1$.

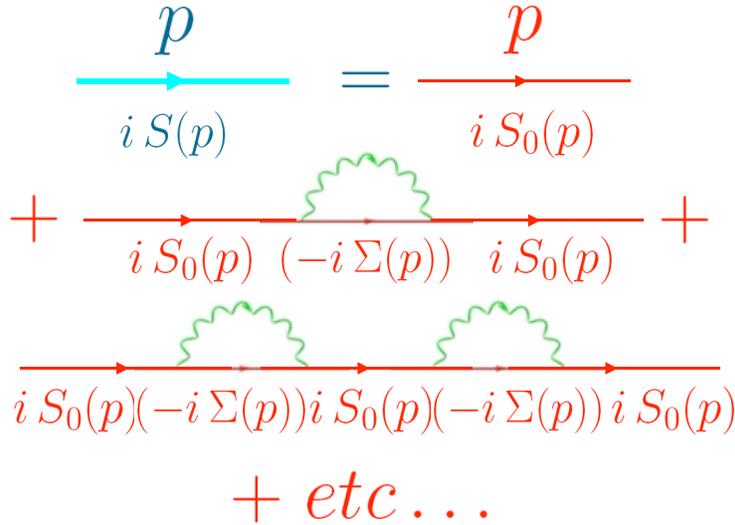


Figure IV.2: En présence d'interactions avec le champ électromagnétique virtuel du vide, le propagateur de l'électron devient $iS(p)$ alors que dans la théorie libre, il est décrit par $iS_0(p)$.

QUESTION 3 : En considérant l'action électromagnétique à D dimensions

$$\mathcal{S} = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi - e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right\} , \quad (\text{TDIV.5})$$

et en préservant la dimension de l'action $[\mathcal{S}] = 0$ et de la masse $[m] = 1$, calculer les dimensions $[A_\mu]$, $[\psi]$ et $[e]$ en fonction de D . Justifier le remplacement de la charge e par le produit $e \mu^{2-D/2}$ lors du passage de 4 à D dimensions.

QUESTION 4 : Démontrer la formule de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \{ ax + b(1-x) \}^{-2} . \quad (\text{TDIV.6})$$

On remarquera avec profit que

$$\frac{1}{a} = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt , \quad (\text{TDIV.7})$$

et l'on utilisera la définition de la fonction Gamma d'Euler

$$s! = \Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt . \quad (\text{TDIV.8})$$

Utiliser le même raisonnement afin d'établir que

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \{ax + by + c(1-x-y)\}^{-3} . \quad (\text{TDIV.9})$$

La démonstration peut s'effectuer directement mais elle est fastidieuse.

QUESTION 5 : En utilisant le relation (TDIV.6), montrer que la boucle régularisée en dimension D s'écrit désormais

$$-i \Sigma_{\text{reg}}^{(1)}(p) = -e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \{ \gamma_\mu \cdot ((1-x)\not{p} + m) \cdot \gamma^\mu \} \mathcal{I}_D(\Delta^2) , \quad (\text{TDIV.10})$$

où l'intégrale \mathcal{I}_D est définie par

$$\mathcal{I}_D(\Delta^2) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{1}{q^2 - \Delta^2 + i\epsilon} \right\}^2 . \quad (\text{TDIV.11})$$

On passe de k à q par le changement de variable $q = k - xp$ et l'on remarquera que les termes impairs en q disparaissent par raison de symétrie.

QUESTION 6 : Rotation de Wick.

On repasse à $D = 4$ dimensions afin de travailler dans l'eulclidien. Montrer tout d'abord que

$$\mathcal{I}_4(\Delta^2) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq^0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{q^{02} - \mathbf{q}^2 - \Delta^2 + i\epsilon} \right\}^2 . \quad (\text{TDIV.12})$$

On peut considérer que l'intégrale sur la variable q^0 est réalisée dans le plan complexe de la variable $z = q^0 + i\tilde{q}^0$. En étudiant les deux cas correspondants aux signes possibles de $(\mathbf{q}^2 + \Delta^2)$, établir que l'intégrale le long de l'axe réel q^0 est égale à l'intégrale le long de l'axe imaginaire $i\tilde{q}^0$. En posant alors $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}$, dériver l'expression de \mathcal{I}_4 en tant qu'intégrale désormais effectuée dans l'espace **eulclidien** à $D = 4$ dimensions du quadri-vecteur \tilde{q} .

QUESTION 7 : Calcul dans l'eulclidien à D dimensions.

On désire calculer l'intégrale eulclidienne

$$\mathcal{I}_D(\Delta^2) = i \int \frac{d^D \tilde{q}}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{1}{\tilde{q}^2 + \Delta^2 - i\epsilon} \right\}^2 . \quad (\text{TDIV.13})$$

Le facteur $-i\epsilon$ est-il juste décoratif ?

• L'intégrale (TDIV.13) n'est pas des plus triviales et son calcul nécessite l'emploi de quelques outils qu'il nous faut construire à présent. Tout d'abord, on considère la fonction des variables x et y définie par

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} . \quad (\text{TDIV.14})$$

En introduisant la nouvelle variable $u = (1/t) - 1$, montrer que

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} du \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} , \quad (\text{TDIV.15})$$

puis en vous aidant de la relation (TDIV.8), établir l'expression bien utile

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} . \quad (\text{TDIV.16})$$

• L'intégrale volumique (TDIV.13) fait intervenir la norme du quadri-vecteur \tilde{q} , autrement dit le rayon R_E . Le carré \tilde{q}^2 devient alors R_E^2 . Il nous reste cependant à écrire l'élément de volume $d^D \tilde{q}$ en coordonnées sphériques en fonction de R_E et de dR_E . Dans un espace euclidien de dimension n , le volume de l'hyper-sphère de rayon R s'écrit

$$\mathcal{V}_n = a_n R^n . \quad (\text{TDIV.17})$$

Que valent a_1 , a_2 et a_3 ? En intégrant le volume \mathcal{V}_{n-1} sur la variable verticale z – disons la $n^{\text{ième}}$ variable x^n d'un espace euclidien de dimension n – établir que le volume de l'hyper-sphère à n dimensions de rayon R est donné par

$$\mathcal{V}_n = 2 \int_0^R dz \mathcal{V}_{n-1} \left\{ \sqrt{1-z^2} \right\} = 2 a_{n-1} R^n \int_0^1 dt (1-t^2)^{(n-1)/2} . \quad (\text{TDIV.18})$$

Dériver alors la relation de récurrence

$$a_n = a_{n-1} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \right\} , \quad (\text{TDIV.19})$$

et montrer que le coefficient a_n vaut

$$a_n = \frac{\{\Gamma(1/2)\}^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} . \quad (\text{TDIV.20})$$

Déduire l'expression de la surface de l'hyper-sphère de dimension n et de rayon unité afin de montrer que l'intégrale sur l'angle solide correspondant vaut

$$\int d\Omega_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} . \quad (\text{TDIV.21})$$

• Nous sommes fin prêts désormais pour le calcul de l'expression (TDIV.13). Montrer tout d'abord que l'élément différentiel $d^D \tilde{q}$ s'écrit en coordonnées sphériques comme

$$d^D \tilde{q} = \frac{2 \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} R_E^{D-1} dR_E . \quad (\text{TDIV.22})$$

Intégrer la variable radiale R_E pour aboutir à

$$\int_0^{+\infty} dR_E \frac{R_E^{D-1}}{(R_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{2} (\Delta^2)^{-\epsilon} B(\epsilon, D/2) , \quad (\text{TDIV.23})$$

où $D = 4 - 2\epsilon$. En déduire immédiatement que

$$\mathcal{I}_D(\Delta^2) = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} (\Delta^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) . \quad (\text{TDIV.24})$$

QUESTION 8 : Justifier les relations de Diracologie en dimension D

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D \quad \text{et} \quad \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = (2 - D) \not{p} . \quad (\text{TDIV.25})$$

A l'aide de ces expressions et des relations (TDIV.10) et (TDIV.24), établir que

$$-i \Sigma_{\text{reg}}^{(1)}(p) = -\frac{ie^2}{8\pi^2} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2} \right)^\epsilon \{((x-1)\not{p} + 2m) + \epsilon((1-x)\not{p} - m)\} . \quad (\text{TDIV.26})$$

QUESTION 9 : En développant en fonction de ϵ l'expression précédente, montrer que la partie divergente de la boucle fermionique de la figure IV.1 est donnée par

$$\Sigma_{\text{div}}^{(1)}(p) = \frac{e^2}{16\pi^2} (-\not{p} + 4m) \frac{1}{\epsilon} . \quad (\text{TDIV.27})$$

En déduire que l'inverse du propagateur renormalisé encasse la variation infinie

$$S^{-1}(p) = \not{p} \left(1 + \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon} \right) - m \left(1 + \frac{e^2}{4\pi^2\epsilon} \right) . \quad (\text{TDIV.28})$$

Travaux dirigés V

Etude de la diffusion Compton

Cette séance a pour objet le calcul du taux de transition de la diffusion Compton

$$\gamma(k) + e^-(p) \rightarrow \gamma(k') + e^-(p') \quad (\text{TDV.1})$$

en électrodynamique quantique (QED), dans le cadre de la théorie des perturbations, donc du développement en puissances du paramètre de couplage $\alpha = e^2/4\pi$ – dans les unités où $\epsilon_0 = \hbar = c = 1$ – à “l’approximation de Born”, i.e. à l’ordre le plus bas en α soit ici α^2 . Les quantités entre parenthèses dans la réaction (TDV.1) sont les énergies–impulsions des particules.

On considèrera que l’on a quantifié QED à la Gupta–Bleuler, avec le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m\mathbb{I})\psi - \frac{1}{4}F_{\nu\rho}F^{\nu\rho} - \frac{\xi}{2}(\partial_\rho A^\rho)^2, \quad (\text{TDV.2})$$

avec $\mathcal{D} = \gamma^\sigma(\partial_\sigma + ieQA_\sigma)$ où e est le paramètre de couplage et Q est la charge avec le choix $Q = -1$. Les règles de Feynman utiles pour traiter ce TD sont rappelées à la fin de l’énoncé.

QUESTION 1 : En utilisant les règles de Feynman de QED, tracer les diagrammes à l’ordre le plus bas en α . Combien y en a-t-il? Ecrivez les amplitudes de transition correspondantes.

Suggestion: abréger les notations en notant $\epsilon' = \epsilon(k', r, \beta')$ et $\epsilon = \epsilon(k, r, \beta)$.

QUESTION 2 : On a un certain arbitraire dans le choix des vecteurs de polarisation des photons, du fait de “l’invariance de jauge”*. On choisit le vecteur r des règles de Feynman (voir B1 et B2 dans l’appendice) pour le photon entrant et aussi pour le photon sortant égal à l’énergie–impulsion p de l’électron entrant de sorte que

$$k \cdot \epsilon = p \cdot \epsilon = 0, \quad (\text{TDV.3})$$

$$k' \cdot \epsilon' = p \cdot \epsilon' = 0. \quad (\text{TDV.4})$$

Montrer que l’amplitude de diffusion à l’approximation de Born peut s’écrire:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \quad (\text{TDV.5})$$

$$= ie^2 Q^2 \bar{u}(p', n', \tau) \left\{ \frac{\not{\epsilon}'^* \not{\epsilon} \not{k}}{2p \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} \not{\epsilon}'^* \not{k}'}{2p \cdot k'} \right\} u(p, n, \sigma). \quad (\text{TDV.6})$$

*Il s’agit en fait, plus précisément, d’une particularité des représentations de masse nulle et d’hélicité 1 du groupe de Poincaré. Voir à ce sujet le début du cours de E. Sokatchev

QUESTION 3 : On considère le cas où ni l'électron entrant ni l'électron sortant ne sont polarisés. Par contre, on ne somme pas sur les polarisations des photons entrant ni sortant. Ecrire le module carré de (TDV.5) sommé–moyenné sur les spins des électrons comme somme de traces de matrices γ . Préciser l'origine et la nature de ces termes. Montrer que, dans cette somme de termes, 2 sont échangés l'un en l'autre par une symétrie de croisement entre photons que l'on précisera. Montrer que 2 autres sont égaux si on choisit des vecteurs polarisations à composantes réelles[†]. En déduire une économie de travail à fournir pour effectuer le calcul.

Indication: utiliser la “propriété miroir” des traces d'un nombre pair de matrices γ .

En utilisant les propriétés des traces de matrices γ vues au TDII, on va calculer explicitement ces traces, de 6 et 8 matrices $\gamma \rightarrow$ si on calcule ces traces “à la brute” on risque une prolifération de termes, et, alors, l'enlissement... Essayons d'être astucieux.

QUESTION 4 : En utilisant la relation d'anticommutation des matrices γ , montrer que a et b étant 2 quadri–vecteurs quelconques

$$\not{a} \not{b} = 2(a.b) \mathbb{I} - \not{b} \not{a} , \quad (\text{TDV.7})$$

et qu'en particulier:

$$\not{a} \not{a} = a^2 \mathbb{I} . \quad (\text{TDV.8})$$

QUESTION 5 : On commence par le calcul des traces provenant du module carré d'un diagramme, dans lequel on utilise la technique de la question 4. Montrer que les contributions aux traces à 6 γ provenant des termes $m\mathbb{I}$ sont nuls. Montrer qu'on peut réduire les chaînes de 8 matrices γ à des chaînes de 4 matrices γ .

Indication: considérer des combinaisons du genre $\not{k} \not{p} \not{k}$ et $\not{\epsilon} \not{k} \not{\epsilon}^$, utiliser la condition de couche de masse $k^2 = 0$, l'hypothèse “ ϵ réel” et la normalisation $\epsilon^2 = -1$.*

Montrer qu'alors

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \tau = \pm} |\mathcal{T}_1|^2 = \frac{e^4 Q^4}{(2m)^2} \left\{ \frac{(p.k')}{(p.k)} + 2 \frac{(k.\epsilon')^2}{(p.k)} \right\} , \quad (\text{TDV.9})$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \tau = \pm} |\mathcal{T}_2|^2 = \frac{e^4 Q^4}{(2m)^2} \left\{ \frac{(p.k)}{(p.k')} - 2 \frac{(k'.\epsilon)^2}{(p.k')} \right\} . \quad (\text{TDV.10})$$

QUESTION 6 : On poursuit par le calcul des traces provenant de l'interférence des 2 diagrammes. Utiliser à nouveau la technique de la question 4 pour réduire les traces de 8 matrices γ à celles de 4 matrices γ et montrer que:

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \tau = \pm} \{ \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2^* + \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1^* \} = 2 \frac{e^4 Q^4}{(2m)^2} \left\{ -\frac{(k.\epsilon')^2}{(p.k)} + \frac{(k'.\epsilon)^2}{(p.k')} + \left[2 (\epsilon.\epsilon')^2 - 1 \right] \right\} . \quad (\text{TDV.11})$$

[†]On fera cette hypothèse dans la suite, car elle conduit à quelques simplifications commodes.

Indication: le calcul du terme d'interférence est plus fastidieux que celui des modules carrés de diagramme. Éliminer p' au profit de p , k et k' . Tronçonner la trace de 8γ en plusieurs morceaux, traiter chaque morceau séparément... et prendre son mal en patience! Le bout du tunnel apparait après 2 pages d'algèbre élémentaire. Remarquer que les 2 premiers termes de (TDV.11) compensent exactement une contribution de (TDV.9) et (TDV.10).

QUESTION 7 : Combinant les résultats des questions 5 et 6, établir

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \tau = \pm} |\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2|^2 = \frac{e^4 Q^4}{(2m)^2} \left\{ \frac{(p \cdot k')}{(p \cdot k)} + \frac{(p \cdot k)}{(p \cdot k')} + 2 \left[2 (\epsilon \cdot \epsilon')^2 - 1 \right] \right\} . \quad (\text{TDV.12})$$

Commentaire: ce résultat a été obtenu par Klein et Nishima dès 1929, alors que la théorie quantique des champs en était à ses balbutiements, avant l'invention du formalisme covariant et des règles de Feynman développés deux décennies plus tard: un tel calcul était à l'époque un vrai morceau de bravoure! L'élaboration de l'électrodynamique quantique, replacée dans son contexte historique, est racontée dans:

“QED and the Men who made it”, par S. S. Schweber, ed. Princeton.

Ce livre est à la bibliothèque du Master et il se lit comme un roman!

QUESTION 8 : On note $\theta_{\vec{k}\vec{k}'}$ l'angle entre les tri-impulsions des photons entrant et sortant dans le référentiel au repos de l'électron incident. Montrer que, dans ce référentiel:

$$\frac{(p \cdot k')}{(p \cdot k)} = \frac{E_{k'}}{E_k} = \left\{ 1 + \frac{E_k}{m} (1 - \cos \theta_{\vec{k}\vec{k}'}) \right\}^{-1} . \quad (\text{TDV.13})$$

Montrer que, dans ce référentiel, et dans la limite dite “de Thomson” où $E_k/m \ll 1$, la section efficace différentielle de diffusion Compton moyennée sur le spin de l'électron entrant et sommée sur le spin de l'électron sortant est donnée par:

$$\frac{d\sigma^{\gamma e \rightarrow \gamma e}}{d \cos \theta_{\vec{k}\vec{k}'} d\phi} = \frac{\alpha^2}{m^2} \left\{ (\epsilon \cdot \epsilon')^2 + \mathcal{O} \left(\frac{E_k}{m} \right)^2 \right\} . \quad (\text{TDV.14})$$

Commentaire: en fait on peut démontrer un “théorème de basse énergie” – dans le régime où $E_k/m \rightarrow 0$ – valable à tous les ordres en α qui étend la validité de (TDV.14) qu'on a établie ici à l'approximation de Born:

$$\frac{d\sigma^{\gamma e \rightarrow \gamma e}}{d \cos \theta_{\vec{k}\vec{k}'} d\phi} \rightarrow \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon \cdot \epsilon')^2 \Delta , \quad (\text{TDV.15})$$

avec

$$\Delta \sim \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{3\pi} \mathcal{O} \left(\left(\frac{E_k}{m} \right)^2 \log \left(\frac{m}{\Delta k} \right) \right) \right\} , \quad (\text{TDV.16})$$

et où Δk est un paramètre de coupure dans l'infrarouge que l'on serait amené à introduire pour tenir compte du seuil de détection fini des photons “mous” dans un calorimètre électromagnétique.

On voit que si

$$\left(\frac{E_k}{m}\right)^2 \log\left(\frac{m}{\Delta k}\right) \rightarrow 0 ,$$

alors $\Delta \rightarrow 1$. Le grand intérêt de ce résultat est de relier α à une observable au moyen d'une relation "asymptotiquement exacte", i.e. pas seulement à un ordre fini en théorie des perturbations, mais à tous les ordres.

QUESTION 9 : On réécrit:

$$\mathcal{T}_1 = \epsilon_\mu \epsilon'_\nu \mathcal{M}_1^{\mu\nu} , \quad \mathcal{T}_2 = \epsilon_\mu \epsilon'_\nu \mathcal{M}_2^{\mu\nu} . \quad (\text{TDV.17})$$

Calculer

$$k_\mu \mathcal{M}_1^{\mu\nu} \quad \text{et} \quad k_\mu \mathcal{M}_2^{\mu\nu} .$$

Montrer que

$$k_\mu \underbrace{(\mathcal{M}_1^{\mu\nu} + \mathcal{M}_2^{\mu\nu})}_{\text{notons ceci } \mathcal{M}^{\mu\nu}} = 0 . \quad (\text{TDV.18})$$

Procéder de même avec $k'_\nu \mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu}$ pour établir:

$$k'_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{TDV.19})$$

Commentaire: les relation (TDV.18) et (TDV.19) constituent deux exemples de ce que l'on appelle les **identités de Ward**. En particulier, ces dernières garantissent que le module carré de l'élément de matrice de transition moyenné et sommé sur les polarisations des photons respectivement entrant et sortant ne dépend pas du choix particulier explicité dans la question 2 par les équations (TDV.3) et (TDV.4). Ce dernier point fait l'objet de la question suivante.

QUESTION 10 : En partant du choix particulier (TDV.3) de la question 2, on complète $\epsilon(k, p, \beta = 1, 2)$ en une tétrade orthonormée au moyen de $\epsilon(k, p, \beta = 0) = p/m$ et de $\epsilon(k, p, \beta = 3)$ choisi de type espace, normé et orthogonal avec les 3 autres $\epsilon(k, p, \beta = 0, 1, 2)$.

Donner l'expression de $\epsilon(k, p, \beta = 3)$ en fonction de p et k .

On définit le projecteur sur les polarisations physiques (transverses) par:

$$\mathcal{P}_{\mu\sigma}(k, p) = - \sum_{\beta=1,2} \epsilon_\mu(k, p, \beta) \epsilon_\sigma(k, p, \beta) . \quad (\text{TDV.20})$$

Utiliser cette expression pour montrer que

$$\mathcal{P}_{\mu\sigma}(k, p) = \underbrace{g_{\mu\sigma}}_{(i)} - \underbrace{\frac{k_\mu p_\sigma + p_\mu k_\sigma}{(k \cdot p)} + \frac{p^2}{(k \cdot p)^2} k_\mu k_\sigma}_{(ii)} , \quad (\text{TDV.21})$$

$$= \left[g_\mu^\rho - \frac{k_\mu p^\rho}{(k \cdot p)} \right] \left[g_{\rho\sigma} - \frac{p_\rho k_\sigma}{(k \cdot p)} \right] . \quad (\text{TDV.22})$$

(avec des expressions similaires pour les polarisations du photon sortant).

En considérant

$$\sum_{\beta, \lambda=1,2} |\epsilon_\mu(k, p, \beta) \epsilon_\nu(k', p, \lambda) \mathcal{M}^{\mu\nu}|^2, \quad (\text{TDV.23})$$

et en utilisant (TDV.21), (TDV.18) et (TDV.19), montrer que les parties “(ii)” des projecteurs (TDV.21) de chacun des photons ne contribuent pas. Interpréter et commenter cette propriété en termes de découplage/compensation de contributions des polarisations non physiques.

Commentaire: De façon plus générale, les identités de Ward contrôlent la façon dont les fonctions de Green dépendent de la fixation de jauge. Elles reflètent et garantissent l'indépendance des observables vis-à-vis de la fixation de jauge. Elles jouent un rôle crucial dans la renormalisabilité des théories de jauge.

Appendice

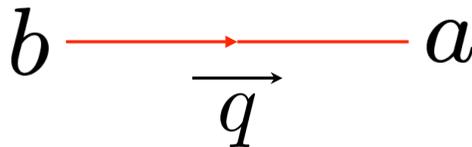
Rappel des règles de Feynman utiles dans ce TD

Que ce soit pour calculer une fonction de Green à B pattes photoniques et F (pair) pattes fermioniques, ou l'amplitude de transition correspondante, à un ordre donné V de la théorie des perturbations, commencer par tracer **tous les diagrammes de Feynman topologiquement non équivalents** possédant B pattes photoniques, F pattes fermioniques et N vertex (deux diagrammes sont topologiquement non équivalents si on ne peut pas passer de l'un à l'autre par une déformation continue i.e. sans couper ni ressouder).

Les lignes fermioniques sont orientées dans le sens de propagation de la charge $+Q$. La charge $+Q$ entre dans chaque vertex dans le sens de la flèche et $+Q$ sort du vertex dans le sens de la flèche.

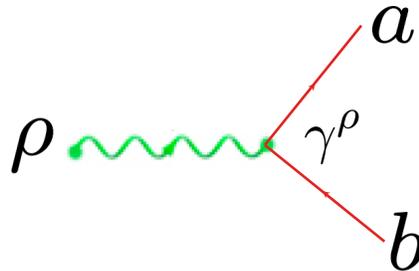
- Propagateur de l'électron:

$$i[S(q)]_{ab} = \frac{i[\not{q} + m\mathbb{1}]_{ab}}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (\text{TDV.24})$$



• **Vertex d'interaction entre fermion chargé et photon:**

$$-i e Q [\gamma^\rho]_{ab} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \text{ (conservation d'énergie-impulsion au vertex)} \quad (\text{TDV.25})$$



Enfin on intègre sur les quadri-impulsions des lignes internes des diagrammes (qui sont des propagateurs):

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} ,$$

et on factorise un terme global égal à

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \text{ (conservation d'énergie-impulsion entre ce qui entre et ce qui sort)} .$$

“**Moignons externes**”:

Lorsqu'on a tracé le diagramme de Feynman d'une amplitude de transition, une façon simple de procéder pour écrire l'amplitude correspondante est de partir de l'extrémité d'une ligne fermionique en regardant si celle-ci est dans l'état initial ou bien dans l'état final. On commence à écrire \bar{v} ou bien \bar{u} suivant le cas (voir prescriptions ci-dessous), puis on remonte en sens inverse de la flèche qui oriente cette ligne fermionique jusqu'à son autre extrémité, en empilant de gauche à droite les matrices γ des vertex et des propagateurs fermioniques au fur et à mesure où on les rencontre lors de cette remontée de ligne. On regarde alors si cette dernière est dans l'état initial ou bien dans l'état final: on finit ainsi de transcrire la ligne fermionique considérée par un u ou bien un v (voir prescriptions ci-dessous). Les règles pour contracter les extrémités d'une ligne fermionique sur des \bar{u} , ou \bar{v} à gauche, et sur des u ou v à droite, sont données ci-dessous. L'expression écrite doit être un nombre **sans indice spinoriel**, de la forme $\bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2$. Γ désigne la chaîne de matrices γ collectées en remontant le long de la ligne fermionique. Les éventuels indices de Lorentz portés par Γ sont contractés, soit sur ceux de propagateurs de bosons vecteurs (ce n'est pas le cas dans ce TD), soit ce sont des “moignons” de pattes externes vectorielles à contracter sur des vecteurs de polarisations, selon les règles données ci-dessous. Ensuite on passe successivement aux autres lignes fermioniques du diagramme s'il y a lieu, en les traitant de la même manière.

Fermion ou anti-fermion entrant ou sortant:

p est le quadri-vecteur énergie-impulsion (sur couche de masse: $p^2 = m^2$),
 n est un vecteur de type espace, normé ($n^2 = -1$), et orthogonal à p ($n.p = 0$), le long duquel est quantifié le spin.

(F1) **fermion entrant:** $u_b(p, n, \lambda)$
à droite de la chaîne de matrices γ

(F2) **anti-fermion entrant:** $\bar{v}_a(p, n, \lambda)$
à gauche de la chaîne de matrices γ

(F3) **fermion sortant:** $\bar{u}_a(p, n, \lambda)$
à gauche de la chaîne de matrices γ

(F4) **anti-fermion sortant:** $v_b(p, n, \lambda)$
à droite de la chaîne de matrices γ

Boson vecteur entrant ou sortant, cas non massif:

k est le quadri-vecteur énergie-impulsion sur couche de masse (ici $k^2 = 0$),
 r est un vecteur linéairement indépendant de k .

Ces deux vecteurs définissent un plan perpendiculaire aux deux polarisations transverses “physiques” $\epsilon(k, r, \beta)$. Celles-ci peuvent être choisies “linéaires” ($\epsilon(k, r, \beta = 1$ ou $2)$ à composantes réelles) ou “circulaires” ($\epsilon(k, r, \beta = \pm) = (\epsilon(k, r, \beta = 1) \pm i\epsilon(k, r, \beta = 2)) / \sqrt{2}$, qui sont vecteurs propres d’hélicité $h = \pm 1$)

(B1) **Boson vecteur entrant:** $\epsilon_\mu(k, r, \beta)$

(B2) **Boson vecteur sortant:** $\epsilon_\mu^*(k, r, \beta)$
 (“*” = complexe conjugué)