Contrôle continu 1 – Théorie de Stueckelberg

La théorie de Stueckelberg permet de décrire aussi bien un champ vectoriel de masse M qu'un champ électromagnétique de masse nulle. Son Lagrangien inclut un terme de masse pour le potentiel vecteur A_μ de sorte que

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \;+\; \frac{M^2}{2}\,A_\mu A^\mu \;-\; \frac{\lambda}{2}\,(\partial A)^2 \;-\; J^\mu A_\mu \;\;. \tag{1}$$

On rappelle que le tenseur électromagnétique est lié au champ par $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Le dernier terme du Lagrangien contient le terme de couplage au courant J^μ. On rappelle que ce dernier se conserve et sa quadri-divergence est ainsi nulle.
Nous commençons notre étude par une analyse classique.

1. Dériver les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

2. Pour le cas $\lambda = 0$, montrer que le potentiel vecteur A^μ vérifie dans le vide une équation de Klein-Gordon dont la masse associée est M.

3. Calculer la quadri-divergence de l'expression obtenue en 1. et montrer que

$$\Big[\lambda\Box + M^2\Big]\big(\partial A\big) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

4. Justifier alors que, dans le cas général où $\lambda \neq 0$, la quadri-divergence $\big(\partial A\big)$ se comporte comme un champ scalaire vérifiant l'équation de Klein-Gordon avec masse associée

$$m^2 \;=\; \frac{M^2}{\lambda}\,. \tag{3}$$

   Dans la suite, on choisira $\lambda > 0$ afin que l'on traite des états physiques ayant $m^2 > 0$.

La relation (2) conduit à une décomposition du potentiel vecteur,

$$A^\mu \;=\; A^\mu_S + A^\mu_T\,. \tag{4}$$

La partie dite scalaire A^μ_S est proportionnelle au gradient de la divergence ∂A, alors que la partie dite transverse A^μ_T se comporte comme un champ vectoriel de masse M.

5. Montrer que la partie scalaire, définie par

$$A^\mu_S \;=\; -\frac{1}{m^2}\partial^\mu\big(\partial A\big)\,, \tag{5}$$

   vérifie l'équation de Klein-Gordon avec masse m.

6. Montrer ensuite que la partie transverse A^μ_T, définie par la relation (4), a une quadri-divergence nulle, exactement comme le champ vectoriel massif de la question 2.

7. Montrer finalement que la partie transverse A^μ_T vérifie l'équation de Klein-Gordon avec masse M.