Univ. Grenoble Alpes – Univ. Savoie Mont Blanc Master de Physique – Parcours Physique Subatomique et Cosmologie (PSC) Année universitaire 2023/2024

# Introduction à la Théorie Quantique des Champs

Björn Herrmann

Laboratoire d'Annecy de Physique Théorique (LAPTh) Univ. Savoie Mont Blanc – CNRS

> herrmann@lapth.cnrs.fr https://lapth.cnrs.fr/~herrmann

Page web associé au cours : https://lapth.cnrs.fr/~herrmann/TQC

## Chapitre 1

# Révisions de mécanique quantique

## 1.1 Mécanique Lagrangienne

### 1.1.1 L'oscillateur harmonique en mécanique classique

Nous considérons le cas d'un point matériel de masse m astreint à se déplacer le long de l'axe Ox et soumis à la force de rappel F = -kx. Ce point effectue des oscillations harmoniques suivant la loi

$$x = x_0 \cos(\omega t + \phi_0), \qquad (1.1)$$

où la pulsation  $\omega = \sqrt{k/m}$  s'exprime en fonction de la masse m et de la raideur k du ressort, et les paramètres  $x_0$  et  $\phi_0$  correspondent aux conditions initiales à t = 0. L'énergie mécanique totale se conserve,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2.$$
 (1.2)

## 1.1.2 Équations d'Euler-Lagrange et principe variationnel

Le Lagrangien associé à l'oscillateur harmonique précédent est défini comme

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \qquad (1.3)$$

où  $\dot{x}$  est la vitesse v = dx/dt. L'équation dynamique de l'oscillateur harmonique peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \,. \tag{1.4}$$

Plus généralement, tout système dynamique est susceptible d'être décrit par un ensemble de r variables  $q_i$  (i = 1, 2, ..., r) indépendantes spécifiant complètement son état et prenant en compte les liaisons mécaniques. Pour chacune des variables  $q_i$ , les équations d'**Euler-Lagrange** s'écrivent alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \,. \tag{1.5}$$

Ces équations peuvent être dérivées à partir d'un principe variationnel imposant que l'action

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}\left\{q_i, \dot{q}_i, t\right\} \mathrm{d}t$$
(1.6)

soit extrêmale pour tout variation du chemin joignant le point point initial  $A\{q_i(t_A)\}$  au point final  $B\{q_i(t_B)\}$  dans l'espace des  $\{q_i\}$ . La variation de l'action S s'écrit au premier ordre de la perturbation  $\delta q_i(t)$  comme

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^r \delta q_i(t) \, \mathrm{d}t \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] \,. \tag{1.7}$$

Les équations d'Euler-Lagrange se mettent alors sous la forme

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} \equiv 0. \tag{1.8}$$

#### 1.1.3 Équations de Hamilton et formalisme Hamiltonien

Le moment conjugué  $p_i$  de la variable canonique  $q_i$  est défini par la relation

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \{q_j, \dot{q}_j, t\}.$$
(1.9)

Nous supposeront qu'il est possible de résoudre les r équations précédentes et d'exprimer les  $\dot{q}_i$  en fonction des quantités  $p_i$  et  $q_i$  ainsi que du temps t en sorte que le Lagrangien  $\mathcal{L}$  est maintenant une nouvelle fonction de ses variables. Le **Hamiltonien** s'obtient grâce à la transformation de Legrendre

$$\mathcal{H}\{q_i, p_i, t\} \equiv \sum_{i=1}^r p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\{q_i, \dot{q}_i, t\}.$$
(1.10)

On en déduit les équations du mouvement qui s'écrivent

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$
 (1.11)

De plus, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$
(1.12)

Les équations (1.11) traduisent l'évolution déterministe d'un système placé initialement au point  $A\{q_i(t_A), p_i(t_A)\}$  de l'espace des phases. Ces relations donnent la 2r-vitesse  $\mathbf{v} = (\dot{q}_i, \dot{p}_i)$  en tout point de la trajectoire. On peut montrer qu'elles traduisent l'incompressibilité du fluide constitué de la constellation des points représentatifs du système au cours de son mouvement au sein de l'espace des phases. En effet, selon le **théorème de Liouville** la divergence de la 2r-vitesse s'annule,

$$\nabla \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} \left[ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = 0.$$
 (1.13)

Comme les équations d'Euler-Lagrange, les relations (1.11) peuvent être dérivées à partir d'un principe variationnel exigeant que la trajectoire physique partant du point  $A\{q_i(t_A), p_i(t_A)\}$  de l'espace des phases à l'instant  $t_A$  et arrivant au point  $B\{q_i(t_B), p_i(t_B)\}$  à l'instant  $t_B$  rende l'action

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}\{q_i, \dot{q}(t), t\} \mathrm{d}t \equiv \int_{t_A}^{t_B} \left[ p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}\{q_i, \dot{q}(t), t\} \right] \mathrm{d}t$$
(1.14)

extrêmale pour toute perturbation  $\{\delta q_i(t), \delta p_i(t)\}$  du chemin telle que

$$\delta q_i(t_A) = \delta q_i(t_B) = 0. \tag{1.15}$$

Les crochets de Poisson sont définis par

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{A}\} \equiv \sum_{i=1}^{r} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right].$$
(1.16)

Ils traduisent la dépendance implicite d'une quantité  $\mathcal{A}\{q_i, p_i, t\}$  par rapport au temps via les coordonnées  $q_i$  et  $p_i$  de l'espace des phases. L'évolution dans le temps de  $\mathcal{A}$  est alors donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \left\{\mathcal{H}, \mathcal{A}\right\} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$
(1.17)

Les crochets de Poisson constituent un pont naturel entre mécanique Lagrangienne classique et mécanique quantique. On peut montrer en effet que l'évolution temporelle d'un opérateur quantique A est régie par la relation

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H,A] + \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad (1.18)$$

très similaire à l'équation classique (1.16). Le crochet de Poisson a cédé la place au commutateur quantique [H, A] avec comme règle de correspondance

$$\begin{bmatrix} H, A \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad -i\hbar \left\{ \mathcal{H}, \mathcal{A} \right\}. \tag{1.19}$$

Cette règle permet de déduire immédiatement le commutateur entre l'opérateur position  $Q_i$  et l'opérateur impulsion  $P_j$ ,

$$\left[Q_i, P_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \,. \tag{1.20}$$

## 1.2 Lagrangien d'une particule relativiste

#### 1.2.1 Particule libre

Nous allons maintenant dériver les équations du mouvement d'une particule libre de masse m dans un cadre relativiste. Le bon élément de longueur en relativité est le temps propre

$$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \qquad (1.21)$$

où la métrique de Minkowski est diagonale,

$$n_{\mu\nu} \equiv \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1).$$
 (1.22)

Nous adoptons la convention d'Einstein selon les quelles tout indice  $\mu$  répété deux fois est implicitement sommé de 0 à 3.

En mécanique classique, le Lagrangien s'écrivait

$$\mathcal{L}_{\text{classique}} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j , \qquad (1.23)$$

en sorte que sa généralisation quadri-dimensionnelle devient

$$\mathcal{L}_{\text{relativiste}} = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} , \qquad (1.24)$$

où  $\dot{x}^{\mu}$  désigne la dérivée de la coordonnée  $x^{\mu}$  par rapport au temps propre  $\tau$  (ou par tout autre paramètre proportionnel au temps propre).

L'action S devient alors proportionnelle à la longueur quadri-dimensionnelle joigant l'événement de départ A à l'événement d'arrivée B. Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \tag{1.25}$$

correspondant à la forme (1.24) conduisent à la relation

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = 0, \qquad (1.26)$$

qui traduit la conservation de l'impulsion  $P^{\mu} = mU^{\mu} = m\dot{x}^{\mu}$  de la particule libre. La quadri-vitesse est notée  $U^{\mu}$ .

## 1.2.2 Couplage avec un champ électromagnétique

Afin de prendre en compte désormais les interactions de la particule précédente avec un champ électromagnétique de potentiel vecteur  $A^{\mu} \equiv \{V, \mathbf{A}\}$ , nous modifions le Lagrangien (1.24) en lui ajoutant un terme de couplage en  $J_{\mu}A^{\mu}$ ,

$$\mathcal{L}_{\text{interaction}} = \frac{m}{2} U_{\mu} U^{\mu} + q U_{\mu} A^{\mu} , \qquad (1.27)$$

où le courant électromagnétique  $J^{\mu} = qU^{\mu}$  associé à la particule fait intervenir sa charge électrique q. La variable conjuguée à  $x^{\mu}$  est l'impulsion généralisée

$$\Pi_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = m U_{\mu} + q A_{\mu} . \qquad (1.28)$$

Nous avons une première illustration du fait qu'en présence d'un champ électromagnétique, l'impulsion  $P^{\mu}$  devient

$$P^{\mu} \longrightarrow P^{\mu} + qA^{\mu} \,. \tag{1.29}$$

Cette propriété est liée à la symétrie de jauge U(1) associée à l'électromagnétisme comme nous le verrons dans les chapitres suivants. Les équations d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien (1.27) se mettent alors sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left( P^{\mu} + q A^{\mu} \right) = q U^{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha} = J^{\alpha} \partial_{\mu} A_{\alpha} .$$
(1.30)

La relation (1.30) peut également s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = qU^{\alpha}F_{\mu\alpha} = J^{\alpha}F_{\mu\alpha}, \qquad (1.31)$$

où le champ électromagnétique  $F_{\mu\nu}$  est défini par

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \,. \tag{1.32}$$

## 1.3 L'oscillateur harmonique et mécanique quantique

Cette partie est instructive. Nous verrons en effet apparaître les excitations quantiques de l'oscillateur harmonique étudié précédemment. Elles sont les embryons des particules qui – en théorie des champs – se manifestent comme des ondes se propageant dans le vide et susceptibles d'abriter des excitations élémentaires. Le vide quantique serait alors l'état fondamental d'une entité réagissant comme un ensemble infiniment continu de ressorts couplés les uns aux autres  $^1$ .

#### 1.3.1 Hamiltonien quantique et opérateurs de création et d'annihilation

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2, \qquad (1.33)$$

devient en mécanique quantique l'opérateur

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2.$$
 (1.34)

En représentation spatiale, l'opérateur X revient à multiplier par la variable x alors que l'opérateur P est équivalent à  $-i\hbar\partial_x$  en sorte que

$$[X,P] = i\hbar\partial_x x = i\hbar.$$
(1.35)

Le spectre des états propres du Hamiltonien est discret et l'état fondamental a une énergie  $\epsilon_0$  positive. En introduisant les opérateurs

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$$
 et  $\hat{P} = \frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}$ , (1.36)

avec la pulsation  $\omega = \sqrt{k/m}$ , nous pouvons écrire le Hamiltonien sous la forme

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \left[ \hat{P}^2 + \hat{X}^2 \right] \,. \tag{1.37}$$

La relation de commutation de ces deux opérateurs s'écrit

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right] = i. \tag{1.38}$$

Les opérateurs de création et d'annihilation, conjugués l'un à l'autre, sont définis comme

$$a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \hat{X} - i\hat{P} \right]$$
 et  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \hat{X} + i\hat{P} \right]$ . (1.39)

<sup>1.</sup> Cette vision mécaniste pourra ensuite être abandonnée car elle n'est guère utile en définitive.

Le Hamiltonien s'exprime alors en fonction de ces opérateurs

$$H = \hbar\omega \left[ a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right] = \hbar\omega \left[ N + \frac{1}{2} \right], \qquad (1.40)$$

en sorte que les états propres d'énergie sont également vecteurs propres de l'opérateur hermitien  $N = a^{\dagger}a$ .

Les opérateurs a et  $a^{\dagger}$  vérifient entre eux la relation de commutation

$$\left[a,a^{\dagger}\right] = 1, \qquad (1.41)$$

alors que vis à vis de N, les commutateurs s'écrivent

$$[N,a] = -a \quad \text{et} \quad [N,a^{\dagger}] = a^{\dagger}. \quad (1.42)$$

#### 1.3.2 Spectre en énergie et espace de Fock

Les états propres de l'opérateur N n'ont que des valeurs propres n entières avec  $n \ge 0$ . Chaque valeur propre n est associée à un seul état noté  $|n\rangle$ . L'état de plus basse excitation  $|0\rangle$  a la propriété d'être annulé par l'opérateur a,

$$a \left| 0 \right\rangle = 0. \tag{1.43}$$

L'état  $|0\rangle$  est caractérisé par l'absence d'excitation de l'oscillateur. Il jouera ultérieurement le rôle du **vide quantique**. Chaque état  $|n\rangle$  est associé à l'énergie propre

$$\epsilon_n = \hbar \omega \left[ n + \frac{1}{2} \right] \,. \tag{1.44}$$

A partir du vide  $|0\rangle$ , nous pouvons construire tous les états de la théorie en appliquant l'opérateur de création  $a^{\dagger}$  qui permet de passer de l'état  $|n\rangle$  à l'état  $|n+1\rangle$ . Réciproquement, l'application de l'opérateur d'annihilation *a* permets de redescendre à partir de  $|n+1\rangle$  et d'obtenir l'état  $|n\rangle$ . Si nous exigeons que l'ensemble des états de l'oscillateur soient de norme unité, nous obtenons les vecteurs  $|n\rangle$  par application successive de l'opérateur de création  $a^{\dagger}$  sur le vide en sorte que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^{\dagger}\right)^{n} |0\rangle . \qquad (1.45)$$

L'ensemble des vecteurs  $|n\rangle$  où  $n \ge 0$  est dénommé l'**espace de Fock**. Il s'agit de l'ensemble des états excités de l'oscillateur harmonique.

#### 1.3.3 Schéma de Schrödinger et de Heisenberg

Dans la présentation précédente, nous avons implicitement supposé que les opérateurs X et Pne dépendaient pas du temps mais étaient donnés spatialement par la multiplication par x ou par la dérivation  $-i\hbar\partial_x$ . Les opérateurs de création et d'annihilation,  $a^{\dagger}$  et a, sont donc indépendants du temps. Seuls les vecteurs propres du système évoluent au cours du temps selon

$$|n,t\rangle = e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle , \qquad (1.46)$$

où  $|n\rangle$  a été défini précédemment. Les fonctions d'onde décrivant l'amplitude de probabilité de trouver l'oscillateur à la position x au temps t s'écrivent donc

$$\varphi_n(x,t) = e^{-i\epsilon_n t} \varphi_n(x) = e^{-i\epsilon_n t} \langle x|n \rangle .$$
(1.47)

Contrairement au schéma de **Schrödinger** précédent, une autre approche – le schéma de **Heisenberg** – consiste à prendre une base de vecteurs propres indépendants du temps et à faire porter l'évolution temporelle par les opérateurs quantiques eux-mêmes. L'élément de matrice de l'opérateur A s'écrit dont

$$\langle m | A_H | n \rangle = \langle m, t | A_S | n, t \rangle = \{ \langle m | e^{i\epsilon_n t} \} A_S \{ e^{-i\epsilon_n t} | n \rangle \}.$$
(1.48)

Dans la mesure où l'on passe du schéma de Schrödinger à celui de Heisenberg grâce à

$$A_H = e^{iHt} A_S e^{-iHt}, (1.49)$$

la relation (1.18) s'interprète alors comme

$$\frac{\mathrm{d}A_H}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar} \left[ H, A_H \right] + \frac{\partial A_H}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[ H, A_H \right] + e^{iHt} \frac{\mathrm{d}A_S}{\mathrm{d}t} e^{-iHt} \,. \tag{1.50}$$

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, dans le schéma de Heisenberg les opérateurs  $X_H$  et  $P_H$  dépendent alors du temps. Leur dérivées sont données par

$$\dot{X}_H = \frac{P_H}{m}$$
 et  $\dot{P}_H = -kX_H$ . (1.51)

Les dérivées des opérations de création et d'annihilation vérifient les relations

$$\dot{a}_H = -i\omega a_H$$
 et  $\dot{a}_H^{\dagger} = i\omega a_H^{\dagger}$ , (1.52)

et leur évolution temporelle suit la relation

$$a_H(t) = e^{-i\omega t} a_H(0)$$
 et  $a_H^{\dagger}(t) = e^{i\omega t} a_H^{\dagger}(0)$ . (1.53)

Les états propres de l'énergie sont construits à partir du vide  $|0\rangle$  en appliquant l'opérateur de création  $a_H^{\dagger}(0) \equiv a_S^{\dagger}(0) \equiv a^{\dagger}$ . Ils sont ainsi indépendants du temps.

## Exercices

## Problème 1.1

Deux points matériels  $A_1$  et  $A_2$  sont astreints à se déplacer sur l'axe horizontale Ox. A l'équilibre, ils sont respectivement en  $O_1$  et  $O_2$ . Lorsque le système est excité,  $x_i$  désigne l'abscisse de  $A_i$  par rapport à la position d'équilibre  $O_i$ . Le point  $A_1$  de masse  $m_1$  est relié à la paroi gauche par un ressort de raideur  $k_1$ , alors que le point  $A_2$  de masse  $m_2$  est relié à la paroi droite par un ressort de raideur  $k_2$ . Les deux points sont également relié entre eux par un ressort de raideur  $k_0$ .

Écrire le Lagrangien de ce système en prenant  $x_1$  et  $x_2$  comme variables indépendantes et dériver les équations du mouvement.

#### Problème 1.2

Exprimer la différentielle d $\mathcal{H}$  du Hamiltonien donné en (1.10) en fonction des différentielles  $dq_i$ ,  $dp_i$  et dt et démontrer ainsi les équations (1.11) et (1.12).

#### Problème 1.3

Démontrer l'expression de la variation de l'action donnée en (1.14).

#### Problème 1.4

Démontrer les relations de commutations (1.41) et (1.42) entre les opérateurs de création et d'annihilation,  $a^{\dagger}$  et a, ainsi que l'opérateur N de l'oscillateur harmonique.

#### Problème 1.5

Démontrer les relations (1.51), (1.52) et (1.53) pour le cas de l'oscillateur harmonique dans le schéma de Heisenberg.

## Chapitre 2

# Le champ scalaire

Dans ce chapitre, la notion du champ quantique est introduite de manière intuitive à partir d'un réseau continu d'oscillateurs harmoniques. Ces derniers sont susceptibles d'être quantifiés ainsi que nous l'avons vu précédemment. Nous commencerons par un rappel sur les phonons suivi de l'étude classique puis quantique de la propagation d'ondes sonores le long d'une ligne fermée.

## 2.1 Rappels sur les phonons

Des atomes de masse m sont alignés le long de l'axe Ox et sont placés sur les sites  $x_n = na$ , où a est le pas du réseau. Chaque atome n est relié à ses plus proches voisins par un ressort de raideur  $\kappa$ . Il peut alors vibrer autour de sa position d'équilibre  $x_n$  dont il s'écarte de la distance  $\varphi_n$  le long de l'axe Ox.

Le Lagrangien de ce système est donné par

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{n} \frac{1}{2} m \dot{\varphi}_n^2 - \sum_{n} \frac{\kappa}{2} \left[ \varphi_{n+1} - \varphi_n \right]^2, \qquad (2.1)$$

où l'entier n varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On peut alors montrer que l'élongation longitudinale de l'atome n vérifie la relation

$$\ddot{\varphi}_n = -\omega_0^2 \Big[ 2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1} \Big]$$
(2.2)

avec  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ .

Les modes de Fourier, définis par

$$\varphi_n(t) = \varphi_k(t) e^{ikna}, \qquad (2.3)$$

obéissent à une équation d'oscillateur harmonique,

$$\ddot{\varphi}_k + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \varphi_k = 0.$$
(2.4)

Les atomes vibrent selon des modes collectifs qui s'interprètent comme des ondes sonores de déformation longitudinale se propageant le long de la file atomique dans les deux sens avec la relation de dispersion

$$\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \,. \tag{2.5}$$

La quantification de ce système est possible à condition de se placer en schéma de Heisenberg et de prendre comme opérateur quantiques l'élongation  $\varphi_i$  de l'atome *i* et son moment conjugué  $P_i = m\dot{\varphi}_i$ . Les relations de commutation non-triviales sont prises à temps égal et s'écrivent

$$\left[\varphi_i(t), P_j(t)\right] = i\delta_{ij}.$$
(2.6)

## 2.2 La ligne continue et sa quantification

#### 2.2.1 Approche classique : Lagrangien et équations du mouvement

La file précédente est prise de longueur  $L_0$  finie. Le nombre N de ses atomes tend vers l'infini et le pas a tend vers 0 de manière à ce que le produit  $Na = L_0$  reste constant. De surcroît, la ligne se reboucle sur elle même. Le dernier atome situé en  $x = L_0$  est alors identifié avec l'atome placé en x = 0.

Les fonctions spatiales sont donc périodiques de période  $L_0$  et se développent en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{ik_n x},$$
 (2.7)

où  $k_n = nk_0$  et  $k_0 = 2\pi/L_0$ . Les coefficients  $f_n$  sont alors donnés par

$$f_n = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} e^{-ik_n x} f(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{2.8}$$

Lorsque le pas a tend vers 0 lors du passage de la file d'atomes à la ligne continue, le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  se transforme en impulsion de Dirac,

$$\frac{1}{a}\delta_{ij} \longrightarrow \delta(x-y), \qquad (2.9)$$

où  $x = a \cdot i$  et  $y = a \cdot j$  correspondent aux positions des atomes i et j.

Ces propriétés relatives à l'agencement de la boucle continue ayant été vues, nous sommes prêts désormais à entamer l'analyse classique puis quantique du système. Dans la limite continue, le Lagrangien (2.1) devient la somme continue

$$L(t) = \int_0^{L_0} \mathcal{L}(x,t) \, \mathrm{d}x = \int_0^{L_0} \left[ \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(x,t) - \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(x,t) \right] \mathrm{d}x \,, \tag{2.10}$$

où  $\mu \equiv m/a$  désigne la masse linéïque et  $\alpha \equiv Ka$  est le module d'Young. Les dérivées partielles par rapport au temps t et par rapport à la variable spatiale x sont respectivement notées  $\dot{\varphi}$  et  $\varphi'$ . L'élongation  $\varphi(x,t)$  de l'atome placé en  $x = a \cdot i$  joue le rôle de l'élongation X de l'oscillateur harmonique étudié précédemment. Le Hamiltonien de ce système s'obtient comme la limite de

$$H(t) = \sum_{n} a \left[ \frac{P_n}{a} \dot{\varphi}_n \right] - L(t) , \qquad (2.11)$$

lorsque le pas a tend vers 0,

$$H(t) = \int_0^{L_0} \left[ \Pi(x,t) \dot{\varphi}(x,t) - \mathcal{L}(x,t) \right] dx = \int_0^{L_0} \mathcal{H}(x,t) dx.$$
 (2.12)

Le moment conjugué de la variable  $\varphi(x,t)$  est noté  $\Pi(x,t) \equiv \mu \dot{\varphi}(x,t)$ . La densité spatiale de l'Hamiltonien s'écrit donc

$$\mathcal{H}(x,t) = \frac{1}{2}\mu\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\alpha\varphi'^2.$$
(2.13)

La limite continue des équation d'Euler-Lagrange (2.2) est donnée par l'équation d'Alembert

$$\mu \ddot{\varphi} - \alpha \varphi'' = 0.$$
(2.14)

On en conclu que des ondes sonores peuvent se propager le long de la ligne avec une vitesse  $c_s = \sqrt{\alpha/\mu}$ . Nous retrouvons la vitesse du son  $c_s = \omega_0 a$  avec laquelle les phonons de grande longueur d'onde se propageaient dans le cas de la file d'atomes précédente.

Nous aimerions maintenant dériver l'équation d'Alembert (2.14) en appliquant le principe variationnel selon lequel l'action

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} L(t) \, \mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \int_0^{L_0} \mathcal{L}\{\dot{\varphi}, \varphi'\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \tag{2.15}$$

ne varie qu'au second ordre de la perturbation  $\delta \varphi(x,t)$  imposée à l'évolution classique du champ  $\varphi(x,t)$  entre les instants  $t_A$  et  $t_B$ . Comme à l'habitude, les points de départ et d'arrivée ne sont pas perturbés tel que pour tous les x entre 0 et  $L_0$ 

$$\delta\varphi(x, t_A) = \delta\varphi(x, t_B) = 0. \qquad (2.16)$$

La variation de l'action au premier ordre s'écrit

$$\delta \mathcal{S} = -\int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \int_0^{L_0} \mathrm{d}x \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \right] \delta \varphi(x, t) \,, \tag{2.17}$$

et l'équation du mouvement se met alors sous la forme compacte

$$\partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} \right] = 0,$$
 (2.18)

où l'indice  $\mu$  peut prendre les valeurs 0 (variable temporelle, t) ou 1 (variable spatiale, x).

### 2.2.2 Développement de l'élongation $\varphi$ en modes de Fourier

Dans la mesure où la file continue se reboucle sur elle-même, l'élongation  $\varphi(x,t)$  est à tout instant t une fonction périodique de l'espace susceptible d'être développée en série de Fourier,

$$\varphi(x,t) = \sum_{\text{modes } n} \varphi_n(t) e^{ik_n x}, \qquad (2.19)$$

où l'entier *n* varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Le mode *n* est caractérisé par  $k_n = nk_0$  et est donc un multiple du vecteur d'onde  $k_0 \equiv 2\pi/L_0$  du mode fondamental. Le coefficient de Fourier correspondant vérifie

l'équation différentielle harmonique

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_n^2 \varphi_n = \ddot{\varphi}_n + c_s^2 |k_n|^2 \varphi_n = 0, \qquad (2.20)$$

et se développe donc en

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \Big[ A_n e^{-i\omega_n t} + A_{-n}^* e^{i\omega_n t} \Big],$$
 (2.21)

si l'on tient compte du fait que l'élongation  $\varphi(x,t)$  est une quantité réelle et non complexe. Celle ci peut désormais s'écrire

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_{\text{modes } k} \left[ A_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + A_k^* e^{i(\omega_k t - kx)} \right].$$
(2.22)

Inverser la relation précédente permet d'établir que

$$A_{k} = \frac{1}{2\sqrt{L_{0}}} \int_{0}^{L_{0}} e^{-ikx} \Big[ \varphi(x,0) + i \frac{\Pi(x,0)}{\mu\omega_{k}} \Big] \mathrm{d}x \,, \tag{2.23}$$

où l'élongation  $\varphi(x,t)$  et son moment conjugué  $\Pi(x,t)$  sont évalués à l'instant t = 0. Le vecteur d'onde k est un multiple de  $k_0$  tel que  $k \equiv nk_0$  avec l'entier  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### 2.2.3 Quantification de la boucle continue et espace de Fock

L'étude classique nous a préparés à la quantification des modes de Fourier précédents. Le champ  $\varphi(x,t)$  et son moment conjugué  $\Pi(x,t)$  sont maintenant des opérateurs quantiques agissant dans l'espace des états accessibles au système. Il convient de préciser leurs relations de commutation exactement comme pour les opérateurs X et P de l'oscillateur harmonique :

$$\left[\varphi(x,t),\Pi(y,t)\right] = i\delta(x-y), \qquad (2.24)$$

$$[\varphi(x,t),\varphi(y,t)] = [\Pi(x,t),\Pi(y,t)] = 0.$$
(2.25)

A l'aide du développement de Fourier (2.23), ces relations de commutations se traduisent en

$$\left[A_k, A_p^{\dagger}\right] = \frac{\delta_{kp}}{2\mu\omega_k}, \qquad (2.26)$$

alors que les opérateurs quantiques  $A_k$  et  $A_p$  commutent entre eux ainsi que leurs hermitiens conjuguées  $A_k^{\dagger}$  et  $A_p^{\dagger}$ . Dans l'expression précédente, le terme  $\delta_{kp}$  s'entend comme le symbole de Kronecker  $d_{ij}$  où les modes k et p sont respectivement caractérisés par les vecteurs d'ondes  $k \equiv ik_0$ et  $p \equiv jk_0$ . En redéfinissant l'opérateur  $A_k$  par  $a_k = \sqrt{2\mu\omega_k}A_k$  avec la pulsation  $\omega_k = c_s|k|$ , le développement de l'opérateur quantique d'élongation devient

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_{\text{modes } k} \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k}} \left[ a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^{\dagger} e^{i(\omega_k t - kx)} \right].$$
(2.27)

L'opérateur  $a_k$  s'obtient en inversant la relation précédente,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \int_0^{L_0} e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\mu\omega_k} \varphi(x,0) + i \frac{\Pi(x,0)}{\sqrt{\mu\omega_k}} \right] \mathrm{d}x \,. \tag{2.28}$$

Les nouvelles relations de commutation non-triviales sont désormais

$$\left[a_k, a_p^{\dagger}\right] = \delta_{kp} \,. \tag{2.29}$$

La construction de  $a_k$  est similaire à celle de l'opérateur d'annihilation a de l'oscillateur harmonique pour lequel la définition (1.39) se traduit en

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{m\omega} X + i \frac{P}{\sqrt{m\omega}} \right] . \tag{2.30}$$

Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, nous cherchons maintenant à exprimer l'Hamiltonien en fonction des opérateurs  $a_k$  et  $a_k^{\dagger}$ . Pour commencer, l'élongation  $\varphi(x, t)$  ainsi que ses dérivées peuvent s'écrire comme

$$\varphi(x,t) = \sum_{\text{modes } k} \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k L_0}} \left[ a_k e^{-i\omega_k t} + a^{\dagger}_{-k} e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx} , \qquad (2.31)$$

$$\dot{\varphi}(x,t) = -i \sum_{\text{modes } k} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\mu L_0}} \left[ a_k e^{-i\omega_k t} - a^{\dagger}_{-k} e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx}, \qquad (2.32)$$

$$\varphi'(x,t) = i \sum_{\text{modes } k} \frac{k}{\sqrt{2\mu\omega_k L_0}} \left[ a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^{\dagger} e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx}, \qquad (2.33)$$

Le Hamiltonien de la ligne continue est une intégrale spatiale de la densité (3.12),

$$H(t) = \int_0^{L_0} \mathcal{H}(x,t) dt = \int_0^{L_0} \left[ \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(x,t) + \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(x,t) \right] dx$$
(2.34)

Nous allons évaluer l'intégrale à l'aide du théorème de Parseval. Pour deux fonctions f et g d'une variable spatiale x, complexes et périodique avec période  $L_0$ , qui se développent alors en série de Fourier comme

$$f(x) = \sum_{\text{modes } k} f_k e^{ikx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\text{modes } k} g_k e^{ikx}, \quad (2.35)$$

ce théorème stipule que

$$\frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} g^*(x) f(x) dx = \sum_{\text{modes } k} g_k^* f_k.$$
(2.36)

En utilisant le théorème de Parseval, on dérive l'expression de H en fonction des opérateurs  $a_k$  et  $a_k^{\dagger}$ ,

$$H = \sum_{\text{modes } k} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left[ a_k^{\dagger} a_k + a_k a_k^{\dagger} \right] = \sum_{\text{modes } k} \hbar\omega_k \left[ a_k^{\dagger} a_k + \frac{1}{2} \right].$$
(2.37)

L'opérateur  $a_k^{\dagger}$  crée un quantum d'excitation supplémentaire sur le mode de vecteur d'onde k et fait croître l'énergie du système de  $\hbar\omega_k$ . L'opérateur  $a_k$  a l'effet opposé. Le vide de la théorie correspond

à l'absence de toute excitation et est par définition détruit par tous les opérateurs d'annihilation,

$$a_k |0\rangle = 0. (2.38)$$

L'état  $|n_1n_2...n_p\rangle$  correspond à l'existence de  $n_1$  excitations sur le mode  $k_1$ ,  $n_2$  excitations sur le mode  $k_2$ , ..., et de  $n_p$  excitations sur le mode  $k_p$ . Il est obtenu en appliquant les opérateurs de créations correspondant sur le vide,

$$|n_1 n_2 \dots n_p\rangle = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left[ a(k_i)^{\dagger} \right]^{n_i} |0\rangle .$$
 (2.39)

Le vide de la théorie est associé à la somme des énergies de point zéro de tous les modes oscillants,

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \sum_{\text{modes } k} \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \infty, \qquad (2.40)$$

qui diverge. Comme nous ne mesurons que des différences d'énergie entre l'état fondamental du système et un de ses états excités, il convient de redéfinir le zéro des énergies en soustrayant  $E_0$ . Cette procédure de renormalisation revient à considérer le **produit normal** 

$$: a_k a_k^{\dagger} : \equiv a_k^{\dagger} a_k , \qquad (2.41)$$

où les opérateurs de création sont placés avant les opérateurs d'annihilation. Le Hamiltonien ainsi renormalisé s'écrit finalement

$$H = \sum_{\text{modes } k} \hbar \omega_k a_k^{\dagger} a_k , \qquad (2.42)$$

et l'énergie du vide est bien nulle.

## Exercices

### Problème 2.1

Démontrer que les modes de Fourier,  $\varphi_k$ , obéissent à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (2.4).

#### Problème 2.3

Démontrer l'équation d'Alembert (2.14).

#### Problème 2.4

Inverser la relation (2.22) afin de démontrer l'expression des coefficients  $A_k$  donnée en (2.23).

## Problème 2.5

En partant des relations de commutation (2.6), établir que

$$\left[\varphi(x,t),\Pi(y,t)\right] = i\delta(x-y), \qquad (2.43)$$

alors que

$$\left[\varphi(x,t),\varphi(y,t)\right] = 0 \quad \text{et} \quad \left[\Pi(x,t),\Pi(y,t)\right] = 0.$$
(2.44)

Expliquer la raison pour laquelle les opérateurs  $\varphi$  et  $\Pi$  sont pris au même instant t dans les commutateurs précédents.

#### Problème 2.6

En utilisant le théorème de Parseval, en partant de l'intégrale (2.34) ainsi que les expressions (2.32) et (2.33), démontrer l'expression (2.37) de l'Hamiltonien donnée en fonction des opérateurs  $a_k$  et  $a_k^{\dagger}$ .

## Chapitre 3

# Le champ scalaire neutre

Nous commencerons par le champ de **Klein-Gordon** dont nous dériverons l'équation du mouvement ainsi que le tenseur impulsion-énergie avant de nous intéresser à sa quantification. Dans le chapitre suivant, nous discuterons son avatar chargé. Nous étudieront ensuite le champ électromagnétique et ainsi le photon dans le Chapitre 5. Finalement, dans le Chapitre 6, le champ chargé de spin-demientier nous donnera l'occasion d'utiliser la théorie de **Dirac** afin de quantifier les électrons-positrons.

## 3.1 Analyse classique

## 3.1.1 Le Lagrangien du champ scalaire neutre

En s'inspirant de la boucle continue, il est possible de justifier l'expression

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - V(\varphi) , \qquad (3.1)$$

pour la densité de Lagrangien du champ scalaire  $\varphi$  qui désormais dépend des coordonnées spatiotemporelles  $x^{\mu} \equiv (t, \boldsymbol{x})$ . Le tenseur de Minkowski est noté  $\eta_{\mu\nu}$ . Dans le cas d'un champ libre de masse m, le potentiel scalaire est donnée par

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2.$$
(3.2)

Le Lagrangien de champ à l'instant t s'obtient en intégrant la densité (3.1) sur tous les oscillateurs  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  et donc sur tout l'espace,

$$L(t) = \int_{\text{espace physique}} \mathcal{L}\left\{\partial_{\mu}\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x},t)\right\} d^{3}\boldsymbol{x}.$$
(3.3)

#### 3.1.2 L'équation de Klein-Gordon

L'action du champ scalaire est définie par l'intégrale sur tout l'espace-temps de la densité de Lagrangien (3.1),

$$S = \int L(t) dt = \int \mathcal{L}\{\partial_{\mu}\varphi,\varphi\} d^{4}x. \qquad (3.4)$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent par l'application du principe de moindre action qui stipule que la variation  $\delta S$  de l'action doit être nulle au premier ordre de la perturbation  $\delta \varphi$  du chemin classique. Nous demanderons que cette perturbation s'annule d'une part dans l'état initial  $(t \rightarrow -\infty)$  et l'état final  $(t \rightarrow \infty)$  et d'autre part à l'infini de l'espace physique à tout instant t. Cette variation s'exprime comme l'intégrale sur tout l'espace-temps

$$\delta \mathcal{S} = -\int \delta \varphi \left[ \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right] d^{4}x \,.$$
(3.5)

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$
(3.6)

prennent la forme particulière

$$\Box \varphi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = 0, \qquad (3.7)$$

connue sous le nom d'équation de **Klein-Gordon** dans laquelle l'opérateur d'Alembertien est défini par

$$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \partial_t^2 - \Delta.$$
(3.8)

Dans le cas d'un champ libre de masse m, l'équation de Klein-Gordon prend la forme usuelle

$$\left[\Box + m^2\right]\varphi = 0.$$
(3.9)

#### 3.1.3 Tenseur impulsion-énergie et théorème de Noether

Par analogie avec la boucle continue et ses ondes sonores, le Hamiltonien s'écrit

$$H(t) = \int_{\text{espace physique}} \Pi(\boldsymbol{x}, t) \, \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}^{3} \boldsymbol{x} - L(t) \,, \qquad (3.10)$$

où le moment conjugué  $\Pi(\boldsymbol{x},t)$  de la variable  $\varphi(\boldsymbol{x},t)$  est défini par

$$\Pi(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi})} = \dot{\varphi}.$$
(3.11)

Le Hamiltonien apparaît alors comme une intégrale sur tout l'espace de la densité  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2 + V(\varphi). \qquad (3.12)$$

Cette expression peut être dérivée grâce au théorème de **Noether**. À cette fin, considérons le changement de coordonnées

$$x^{\mu} \longrightarrow \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$$
 (3.13)

au cours duquel le même point M initialement repéré par  $x^{\mu}$  est maintenant associé à  $\tilde{x}^{\mu}$ . Nous prendrons un vecteur  $\epsilon^{\mu}$  constant dans l'espace-temps et petit. Le champ scalaire reste le même au point M puisque rien n'a changé. La fonction associant aux coordonnées  $x^{\mu}$  et  $\tilde{x}^{\mu}$  la valeur correspondante de  $\varphi$  subit par contre une modification puisque

$$\varphi(x^{\mu}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}^{\mu}) \equiv \varphi(M).$$
(3.14)

Le champ a alors changé en x d'une quantité

$$\delta\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) = \epsilon^{\mu}\partial^{\mu}\varphi. \qquad (3.15)$$

La densité de Lagrangien varie également. En remarquant qu'elle dépend des coordonnées  $x^{\mu}$  à travers le champ scalaire  $\varphi$  et ses dérivées  $\partial_{\mu}\varphi$ , nous construisons le **tenseur impulsion-énergie** 

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} \partial^{\nu}\varphi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$
(3.16)

On peut montrer que sa quadri-divergence est nulle :

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. (3.17)$$

Ce résultat permet d'établir que l'intégrale spatiale

$$P^{\mu}(t) = \int_{\text{espace physique}} T^{0\mu} d^{3}\boldsymbol{x}$$
(3.18)

ne varie pas au cours du temps et alors l'impulsion  $P^{\mu}$  se conserve. Il convient toutefois que le champ scalaire  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  s'annulle rapidement à l'infini de l'espace physique afin que les éventuelles pertes d'impulsion ou d'énergie y soient supprimées.

La densité de Hamiltonien s'identifie avec la composante  $T^{00}$  du tenseur impulsion-énergie,

$$T^{00} = \Pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}. \tag{3.19}$$

Le tenseur impulsion-énergie peut également s'écrire

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\varphi \partial^{\nu}\varphi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \qquad (3.20)$$

On en déduit que

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = \partial^{\nu}\varphi \left[\Box\varphi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\right].$$
 (3.21)

Si le champ scalaire satisfait à l'équation du mouvement, c.a.d. à l'équation de Klein-Gordon, son tenseur impulsion-énergie se conserve.

## 3.2 La quantification canonique du champ scalaire neutre

Nous considérons le cas d'un champ scalaire libre de masse m. Le potentiel scalaire associé est donné par

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \qquad (3.22)$$

#### 3.2.1 Décomposition en mode de Fourier et relations de commutation

Nous allons nous inspirer de nouveau par le traitement quantique de la boucle atomique continue parcourue par des ondes sonores. Le passage à la limite  $L_0 \to \infty$  et la prise en compte de trois dimension spatiales au lieu d'une seule nous permet de justifier le développement de Fourier du champ scalaire  $\varphi(x)$  sous la forme

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ikx} \right] \,. \tag{3.23}$$

On rappelle que  $x = (t, \mathbf{x})$  et que le produit kx s'entend comme le produit scalaire de Minkowksi,

$$kx = \eta^{\mu\nu}k_{\mu}x_{\nu} = \omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{x} \tag{3.24}$$

sachant que la composante temporelle du quadri-vecteur k est donnée par

$$k^0 = \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}.$$
 (3.25)

Un tel champ scalaire satisfait bien à l'équation de Klein-Gordon,

$$\left[\Box + m^2\right]\varphi(x) = 0. \tag{3.26}$$

En introduisant la mesure

$$d\tilde{k} = \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} = \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2), \qquad (3.27)$$

qui est invariante de Lorentz, le développement de Fourier du champ  $\varphi(x)$  s'écrit plus simplement

$$\varphi(x) = \int d\tilde{k} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ikx} \right].$$
(3.28)

Les relations de commutation entre les opérateurs d'annihilation  $a_k$  et les opérateurs de création  $a_k^{\dagger}$  sont données par

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\right] = (2\pi)^{3} 2\omega_{\boldsymbol{k}} \delta^{3}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}).$$
(3.29)

Pour les relations de commutations entre l'opérateur  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  et son moment conjugué  $\Pi(\mathbf{y}, t)$  on obtient

$$\left[\varphi(\boldsymbol{x},t),\Pi(\boldsymbol{y},t)\right] = i\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \qquad (3.30)$$

## 3.2.2 L'opérateur impulsion

Pour rappel, le Hamiltonien du champ scalaire peut s'écrire comme

$$H(t) = \int d^3 \boldsymbol{x} \, \mathcal{H} = \int d^3 \boldsymbol{x} \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] \,. \tag{3.31}$$

Dans la suite, nous allons calculer cette intégrale en utilisant de nouveau le théorème de Parseval. Pour deux fonctions complexes f et g de la variable spatiale x dont les développements en série de Fourier s'écrivent

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} F(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \quad \text{et} \quad g(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} G(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}, \quad (3.32)$$

ce théorème (dans sa version continue) stipule que

$$\int d^3 \boldsymbol{x} g^*(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} G^*(\boldsymbol{k}) F(\boldsymbol{k}). \qquad (3.33)$$

En utilisant le développement (3.28) du champ scalaire et en appliquant le théorème de Parseval, on obtient le Hamiltonien en fonction des opérateurs d'annihilation et de création :

$$H(t) = \int d\tilde{k} \frac{\omega_k}{2} \left[ a_k^{\dagger} a_k + a_k a_k^{\dagger} \right].$$
(3.34)

Comme dans le cas de la boucle continue, l'énergie du vide diverge. En conséquence, une renormalisation de l'énergie s'impose qui peut de nouveau s'effectuer en utilisant le produit normal des opérateurs  $a_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ 

$$H(t) = \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} : \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m \varphi^2 \right] : = \int \mathrm{d}\tilde{k} \,\omega_k \, a_k^{\dagger} a_k \,.$$
(3.35)

L'opérateur impulsion est donné par

$$\boldsymbol{P} = -\int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \, \dot{\varphi} \boldsymbol{\nabla} \varphi \,, \qquad (3.36)$$

et peut alors s'écrire en fonction des opérateurs d'annihilation et de création comme

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{k}}{2} \left[ a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} a_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \right] \,. \tag{3.37}$$

Pour raison de symétrie, le vide est dépourvu de toute impulsion. On en déduit que

$$\boldsymbol{P} = -\int \mathrm{d}^{3}\boldsymbol{x} : \dot{\varphi}\boldsymbol{\nabla}\varphi := \int \mathrm{d}\tilde{k}\,\boldsymbol{k}\,a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k}}. \qquad (3.38)$$

Faisant appel au tenseur impulsion-énergie, ce dernier résultat peut se mettre sous la forme

$$P^{\mu} = \int d^{3}x T^{0\mu} = \int d\tilde{k} k^{\mu} a^{\dagger}_{k} a_{k}, \qquad (3.39)$$

sachant que  $T^{0\mu} = \dot{\varphi} \partial^{\mu} \varphi - \eta^{0\mu} \mathcal{L}.$ 

L'opérateur  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  crée un quantum d'excitation associé à l'onde plane (qui maintenant joue le rôle de véritable mode de propagation) dont le vecteur est  $\mathbf{k}$ . Ce quantum est interprété comme la présence d'une particule de masse m se propageant avec l'impulsion  $\mathbf{k}$ . Comme chaque onde plane peut être excitée autant de fois que l'on veut, les particules correspondantes peuvent occuper le même état quantique de propagation : nous sommes en présence de **bosons**. Une rotation spatiale ou un changement de référentiel n'affecte pas la structure interne du champ car celui-ci est un scalaire. La théorie introduite dans ce chapitre est alors susceptible de décrire des particules neutres de spin 0 comme par exemple les pions neutres  $\pi^0$ .

On peut finalement montrer que les opérateurs de création  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  entretiennent avec l'opérateur impulsion  $P^{\mu}$  les relations de commutation

$$\left[P^{\mu}, a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\right] = k^{\mu} a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}. \tag{3.40}$$

Le vide de la théorie est détruit par tous les opérateurs d'annihilation  $a_k$ . L'application de l'opérateur  $a_k^{\dagger}$  sur le vide engendre la création d'une particule de quadri-impulsion  $k^{\mu}$  et l'excitation de l'onde plane associée.

## Exercices

## Problème 3.1

Pour le cas du champ scalaire libre, démontrer que les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme donnée en (3.9).

### Problème 3.2

Démontrer que la relation (3.19) conduit à l'expression (3.12).

### Problème 3.3

À partir du développement (3.28), démontrer que le champ  $\varphi$  satisfait à l'équation de Klein-Gordon (3.26).

## Problème 3.4

Démontrer la relation (3.30) à partir des relations (3.29).

#### Problème 3.5

Démontrer l'expression (3.34) du Hamiltonien en utilisant le théorème de Parseval (3.33). Montrer ensuite que l'énergie du vide diverge.

## Problème 3.6

Démontrer les relations de commutation (3.40).

## Chapitre 4

# Le champ scalaire chargé

Afin de décrire un champ scalaire chargé, comme p.ex. pour un pion  $\pi^{\pm}$ , il suffit d'introduire deux champs neutres  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , et de les associer en un champ scalaire complexe défini par

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \varphi_1 + i \varphi_2 \right]. \tag{4.1}$$

## 4.1 Lagrangien et tenseur impulsion-énergie

Le Lagrangien du champ complexe  $\varphi$  est une somme directe des expressions correspondant aux composantes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial^{\mu} \varphi_1) (\partial_{\mu} \varphi_1) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial^{\mu} \varphi_2) (\partial_{\mu} \varphi_2) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_2^2.$$
(4.2)

Ce Lagrangien peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} = (\partial^{\mu}\varphi^{*})(\partial_{\mu}\varphi) - V(\varphi^{*}\varphi), \qquad (4.3)$$

où le potentiel est invariant par rotation dans le plan complexe  $\varphi$ . Les champs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant indépendants l'un de l'autre, nous choisiront dorénavant comme bonnes variables canoniques le champ chargé  $\varphi$  et son complexe conjugué  $\varphi^*$ . L'équation d'Euler-Lagrange qui les regit s'écrit alors

$$\partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = \Box \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi^*} = 0.$$
(4.4)

Dans le cas du champ libre de masse m nous avons  $V(\varphi^*\varphi) = m^2 \varphi^* \varphi$ , et l'équation précédente se réduit à la relation (3.26), c.a.d. l'équation de Klein-Gordon. Le conjugué complexe de la relation (4.4) s'obtient également en dérivant directement le Lagrangien par rapport à  $\varphi$  et  $\partial_{\mu}\varphi$ .

En remarquant que le Lagrangien ne dépend des coordonnées spatio-temporelles qu'à travers les champs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , ou encore  $\varphi$  et  $\varphi^*$ , ainsi que leurs dérivées, le tenseur impulsion-énergie se construit comme

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{i})} \partial^{\nu}\varphi_{i} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$
(4.5)

Dans le cas du champ scalaire chargé, l'expression précédente prend la forme

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\varphi^{*}\partial^{\nu}\varphi + \partial^{\nu}\varphi^{*}\partial^{\mu}\varphi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$
(4.6)

Le Hamiltonien de la théorie s'obtient comme l'intégrale sur tout l'espace de la composante temps-temps du tenseur impulsion-énergie. Il peut s'écrire sous la forme

$$H(t) = \int d^3 \boldsymbol{x} \left[ \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + \boldsymbol{\nabla} \varphi^* \boldsymbol{\nabla} \varphi + V(\varphi) \right].$$
(4.7)

L'impulsion spatiale associée à la configuration classique  $\varphi(x)$  s'écrit

$$\boldsymbol{P}(t) = -\int \mathrm{d}^{3}\boldsymbol{x} \left[ \boldsymbol{\nabla}\varphi^{*}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^{*}\boldsymbol{\nabla}\varphi \right].$$
(4.8)

Dans le formalisme de la seconde quantification, nous avons décomposé le champ scalaire neutre en modes de Fourier grâce au développement (3.28) dans lequel apparaissent les opérateurs d'annihilation  $a_{\mathbf{k}}$  et de création  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ . Nous supposerons également ici que le champ scalaire est libre et de masse m. Chacune des composantes réelles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  est susceptible de s'exprimer en fonction de ses opérateurs  $a_{1,\mathbf{k}}$  et  $b_{1,\mathbf{k}}$  et de leurs hermitiens conjugués  $a_{1,\mathbf{k}}^{\dagger}$  et  $a_{2,\mathbf{k}}^{\dagger}$  grâce à une relation analogue et nous aboutissons immédiatement à l'expression

$$\varphi(x) = \int d\tilde{k} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ikx} \right], \qquad (4.9)$$

où les opérateurs  $a_k$  et  $b_k$  sont donnés par

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[ a_{1,\mathbf{k}} + i a_{2,\mathbf{k}} \Big] \quad \text{et} \quad b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[ a_{1,\mathbf{k}} - i a_{2,\mathbf{k}} \Big].$$
 (4.10)

Ces opérateurs obéissent aux relations de commutations

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}, a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right] = \left[b_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\right] = (2\pi)^{3} 2\omega_{\boldsymbol{k}} \delta^{3}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}), \qquad (4.11)$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}, b_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\right] = \left[b_{\boldsymbol{k}}, a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right] = 0.$$
(4.12)

Nous pouvons alors exprimer le Hamiltonien ainsi que l'impulsion en fonction des opérateurs d'annihilation et de création. A partir de l'expression (4.7), en se rappellons que nous sommes dans le cas d'un champ libre avec  $V = m^2 \varphi^* \varphi$  et du développement de Fourier (4.9), on peut montrer que

$$H(t) = \int d\tilde{k} \,\omega_{\boldsymbol{k}} \left[ a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} a_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \right].$$
(4.13)

Pour les mêmes raisons qu'évoquées dans les chapitres précédents, le Hamiltonien se mets finalement sous la forme du

$$H(t) = \int d\tilde{k} \,\omega_{\boldsymbol{k}} \left[ a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} a_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} b_{\boldsymbol{k}} \right], \qquad (4.14)$$

en utilisant le produit normal des opérateurs afin de renormaliser l'énergie du vide. Dans le même esprit, l'opérateur impulsion s'écrit finalement

$$\mathbf{P}(t) = \int d\tilde{k} \, \mathbf{k} \left[ a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} \right].$$
(4.15)

## 4.2 Invariance de jauge et charge électrique

L'analyse précédente permet de conclure que les opérateurs  $a_{k}^{\dagger}$  et  $b_{k}^{\dagger}$  créent tous les deux un quantum d'excitation associé à une onde plane de vecteur d'onde k et donc une particule dont la quadri-impulsion est

$$k^{\mu} = (\omega_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k}) \tag{4.16}$$

avec  $\omega_{\mathbf{k}}^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$ . Cependant en quoi la particule engendrée par l'opérateur  $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  diffère-t-elle de celle créée par  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ ? La réponse à cette question est liée à l'invariance de jauge!

Le Lagrangien (4.3) possède la propriété remarquable d'être invariant sous la rotation complexe

$$\varphi \longrightarrow \tilde{\varphi} = e^{-iq\theta}\varphi.$$
 (4.17)

Cette transformation dite de **jauge** est un élément du groupe U(1). L'angle de rotation  $\theta$  est multiplié par la charge q. S'il ne dépend pas de la position, la rotation complexe ressentie par le champ  $\varphi$  est la même en chaque point de l'espace-temps et la transformation de jauge est de **première espèce** ou **globale**. Si l'angle  $\theta$  est une fonction de x, la transformation de jauge est dite de **seconde espèce** ou **locale**.

Une rotation d'angle  $\theta \to 0$  engendre la modification infinitésimale  $\delta \varphi = iq\theta\varphi$ . En constatant que cette perturbation du champ, et également de sa dérivée spatio-temporelle  $\partial_{\mu}\varphi$ , n'est suivie d'aucun effet sur le Lagrangien (4.3), on peut montrer que le vecteur

$$J^{\mu} = iq \left[ \varphi^*(\partial^{\mu}\varphi) - (\partial^{\mu}\varphi^*)\varphi \right] = iq \left[ \varphi^* \stackrel{\leftrightarrow}{\partial_{\mu}} \varphi \right]$$
(4.18)

se conserve dans la mesure où sa quadri-divergence  $\partial_{\mu}J^{\mu}$  est nulle. Cette propriété remarquable permet d'interpréter  $J^{\mu}$  comme un courant électrique dont la charge volumique n'est autre que la composante temporelle  $J^0$  et d'établir que l'intégrale spatiale

$$Q(t) = \int_{\text{espace physique}} d^3 \boldsymbol{x} J^0$$
(4.19)

ne varie pas au cours du temps. La quantité Q(t) apparaît donc comme la charge électrique totale associée à la configuration classique  $\varphi(t, \mathbf{x})$ . Si maintenant nous quantifions le champ libre de manière canonique, nous pouvons définir l'opérateur charge électrique comme

$$Q(t) = iq \int d^3 \boldsymbol{x} : \left[\varphi^* \stackrel{\leftrightarrow}{\partial_{\mu}} \varphi\right] : .$$
(4.20)

Le développement en terme des opérateurs de création et d'annihilation permet d'écrire

$$Q(t) = \int d\tilde{k} q \left[ a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} a_{\boldsymbol{k}} - b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} b_{\boldsymbol{k}} \right] .$$
(4.21)

L'application de l'opérateur  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  sur le vide quantique  $|0\rangle$  engendre une **particule** d'impulsion  $\mathbf{k}$ , d'énergie  $\omega_{\mathbf{k}}$  et de charge électrique +q, alors que l'opérateur  $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  donne naissance à une **antiparticule** de même quadri-impulsion  $k^{\mu}$  mais de charge -q opposée. La théorie permets donc de prendre en compte simultanément particules et antiparticules. Elle est tout à fait adaptée par exemple à la description du champ chargé de spin nul associé au pion  $\pi^{\pm}$ .

## 4.3 Propagateur de Feynman et *T*-produit

En présence d'une source  $S(t, \boldsymbol{x})$ , le champ scalaire libre  $\varphi$  obéit à l'équation de Klein-Gordon modifiée

$$\left[\Box + m^2\right]\varphi = S(x), \qquad (4.22)$$

dont la solution fait intervenir la fonction de Green G(x-y) qui exprime la manière dont la source située en y contribue à l'onde  $\varphi$  rayonnée en x,

$$\varphi(x) = \int G(x-y) S(y) d^4y. \qquad (4.23)$$

La fonction G(x - y) décrit donc la propagation de l'onde scalaire  $\varphi$  depuis y où elle est produite jusqu'en x. Elle vérifie l'équation de Klein-Gordon

$$\left[\Box + m^{2}\right]G(x) = \delta^{4}(x). \qquad (4.24)$$

Une décomposition de Fourier permet de définir G(k) grâce à

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, G(k) e^{-ikx} \,. \tag{4.25}$$

L'équation (4.24) se traduit par la relation

$$G(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2}, \qquad (4.26)$$

et le propagateur est donné par la suite d'intégrales

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \mathbf{k} \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int dk^0 \, e^{-ik^0t} \frac{-1}{(k^0)^2 - \omega_k^2} \,. \tag{4.27}$$

On rappelle la manière dont le calcul de l'intégrale sur  $k^0$  est mené dans le plan complexe. Pour t négatif, on reboucle sur le contour par le haut, et pour t positif par le bas. Les pôles sont situés sur l'axe réel en  $\pm \omega_k$ . Si on les déplace tous deux vers le bas, on obtient la fonction de Green retardée de Lienard et Wiechert. Si le pôle  $+\omega_k$  est déplacé vers le bas mais le pôle en  $-\omega_k$  est déplacé vers le haut, on obtient le propagateur de Feynman. Dans ce cas, les solutions à énergie positive se propagent vers le future alors que les solutions à énergies négatives se propagent vers le passé.

Le propagateur de Feynman s'écrit

$$G_F(x-y) = i \int d\tilde{k} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right].$$
(4.28)

En théorie quantique des champs, nous allons retrouver le propagateur de Feynman grâce au Tproduit (ou produit chronologiquement ordonné) du champ  $\varphi(x)$  et de son hermitien conjugué  $\varphi^{\dagger}$ :

$$T\left\{\varphi(x)\varphi^{\dagger}(y)\right\} = \theta(x^{0} - y^{0})\varphi(x)\varphi^{\dagger}(y) + \theta(y^{0} - x^{0})\varphi^{\dagger}(y)\varphi(x).$$
(4.29)

Le propagateur de Feynman est lié à la valeur dans le vide du T-produit,

$$G_F(x-y) = i \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi^{\dagger}(y) \} | 0 \rangle .$$

$$(4.30)$$

Ce résultat s'interprète comme une particule se propageant de y vers x si  $x^0 > y^0$  et comme une antiparticule se propageant de x vers y si  $y^0 > x^0$ .

## Exercices

## Problème 4.1

Démontrer l'expression du Hamiltonien donnée en (4.7) en calculant l'intégrale de la composante  $T^{00}$  du tenseur impulsion-énergie. Montrer ensuite que l'impulsion spatiale associée est donnée par l'expression (4.8).

## Problème 4.2

En utilisant les relations de commutation (3.29), démontrer les relations de commutation (4.11) et (4.12).

## Problème 4.3

Calculer directement la quadri-divergence du courant  $J^{\mu}$  défini en (4.18). En vous aidant de l'équation de Klein-Gordon, montrer que le courant se conserve.

### Problème 4.4

Montrer que le propagateur de Feynman s'écrit comme proposé en (4.28).

## Problème 4.5

Démontrer la relation donnée en (4.30) entre le propagateur de Feynman et le T-produit de  $\varphi$  et  $\varphi^{\dagger}$ .

## Chapitre 5

# Le champ électromagnétique

## 5.1 Equations de Maxwell et invariance de jauge

Les équations de Maxwell se mettent sous une forme covariante de Lorentz remarquablement compacte, puisque si l'on identifie le champ électromagnétique  $F_{\mu\nu}$  à partir du potentiel  $A^{\mu}$  par

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial\nu A_{\mu} \tag{5.1}$$

les deux relations

$$\nabla B = 0$$
 et  $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$  (5.2)

deviennent évidentes, alors que les relations reliant champ et source

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
 et  $\nabla \times E = \mu_0 \left[ J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right]$  (5.3)

s'écrivent

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu}. \tag{5.4}$$

Le champ électromagnétique est invariant sous les transformations locales de jauge qui affectent le potentiel vecteur :

$$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\theta, \qquad (5.5)$$

où  $\theta(x)$  est une fonction scalaire du point x. Il existe une infinité de choix de jauge, c.a.d. de potentiels vecteurs différents, redonnant exactement la même configuration du champ électromagnétique. En particulier, une classe de choix possibles correspond à la condition de **jauge de Lorentz** pour laquelle

$$\partial A = \partial_{\mu} A^{\mu} = 0.$$
 (5.6)

Dans ce cas, les équations de Maxwell se simplifient plus,

$$\Box A^{\mu} = J^{\mu}. \tag{5.7}$$

Cette relation est identique à l'équation de Klein-Gordon avec source (4.22) à condition de prendre un champ de masse nulle.

Dans le cas classique où nous nous plaçons ici, la solution de l'équation (5.7)

$$A^{\mu}(x) = \int G_{\rm ret}(x-y) J^{\mu}(y) \,\mathrm{d}^4 y$$
(5.8)

fait intervenir le propagateur retardé  $G_{\text{ret}}$  de Liénard et Wiechert. La transformée de Fourier de la fonction  $G_{\text{ret}}(x)$  est donnée par

$$G_{\rm ret}(k) = -\frac{1}{k^2}.$$
 (5.9)

En intégrant de manière convenable (c.a.d. en faisant attention à la prescription sur le déplacement des pôles dans le cas retardé), on en déduit que

$$G_{\rm ret}(x-y) = \frac{1}{4\pi r} \,\delta(r - (x^0 - y^0))\,, \qquad (5.10)$$

où la distance r est la norme  $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$ . On en déduit finalement la solution des potentiels scalaires retardés de Liénard et Wiechert

$$A_{\rm ret}^{\mu}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int d^{3}\boldsymbol{y} \frac{J^{\mu}(\boldsymbol{y},t_{y}=t-r/c)}{r}$$
(5.11)

La contribution en  $\boldsymbol{x}$  à l'instant t qui provient du point source  $\boldsymbol{y}$  a été rayonnée à l'instant  $t_y = t - r/c$ antérieur car elle a dû se propager à la vitesse de la lumière sur la distance  $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ .

Ce rappel ne serait pas complet sans l'analyse de la structure de l'onde plane électromagnétique se propageant dans le vide. En l'absence de source, le potentiel vecteur

$$A^{\mu}(x) = \epsilon^{\mu} e^{-ikx} \tag{5.12}$$

est solution de l'équation  $\Box A^{\mu} = 0$  à condition que d'une part  $k^2 = 0$  (le photon est de masse nulle) et que d'autre part  $k\epsilon = 0$ . La condition de jauge de Lorentz impose en effet que dans le référentiel où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est dirigé suivant l'axe des z, les composantes longitudinales  $\epsilon^3 = \epsilon_z$  et temporelles  $\epsilon^0$  sont égales en sorte que le quadri-vecteur polarisation  $\epsilon$  se réduit à la somme d'une composante purement spatiale perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  et d'une composante proportionnelle au quadrivecteur k,

$$\epsilon^{\mu} = \epsilon^{\mu}_{\perp} + \alpha k^{\mu} \,. \tag{5.13}$$

Une transformation de jauge permet de se débarrasser de cette dernière et nous obtenons une polarisation physique dirigée suivant les vecteurs unitaires  $e_x$  et  $e_y$  du plan perpendiculaire à la direction  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$ . A chaque quadri-vecteur d'onde  $k^{\mu}$ , nous pouvons dès lors associer la base constituée des quadri-vecteurs  $e(\mathbf{k}, \lambda)$ . Pour  $\lambda = 1, 2, 3$  on obtient tout simplement les vecteurs spatiaux  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Le vecteur pour  $\lambda = 0$  est purement temporel de composante égale à 1.

Les vecteurs de base vérifient la relation d'orthonormalité

$$e(\boldsymbol{k},\lambda)e(\boldsymbol{k},\sigma) = e^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)e_{\mu}(\boldsymbol{k},\sigma) = \eta_{\lambda\sigma}, \qquad (5.14)$$

et la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \frac{e^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)e^{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)}{e(\boldsymbol{k},\lambda)e(\boldsymbol{k},\lambda)} = \eta_{\mu\nu}.$$
(5.15)

## 5.2 Formalisme Lagrangien et tenseur impulsion-énergie

Considérons le Lagrangien classique

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_{\mu} A^{\mu})^2 - J^{\mu} A_{\mu}.$$
 (5.16)

Le dernier terme prend en compte le couplage du potentiel vecteur  $A^{\mu}$  avec le courant source  $J^{\mu}$ . Afin de dériver les équation d'Euler-Lagrange, il convient tout d'abord de montrer que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}A_{\alpha})} = F^{\alpha\beta} - \lambda \eta^{\alpha\beta}(\partial A) \,. \tag{5.17}$$

Les champs  $A_{\alpha}$  constituent les variables canoniques indépendantes  $\varphi_i$  discutées auparavant. Les équations d'Euler-Lagrange se mettent sous la forme

$$\Box A^{\alpha} + (\lambda - 1)\partial^{\alpha}(\partial A) = J^{\alpha}.$$
(5.18)

Le tenseur impulsion-énergie a été dérivé de manière général dans le chapitre 3. Dans le cas présent, il s'exprime en fonction des champs canoniques  $A_{\alpha}$  comme

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\alpha})} (\partial^{\nu}A_{\alpha}) - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$
(5.19)

En considérant le Lagrangien (5.16) dans le cas où le parametre  $\lambda = 0$  et en l'absence de source  $J^{\mu}$ , nous sommes ramenés au cas conventionnel du champ électromagnétique de Maxwell dans le vide dont le tenseur impulsion-énergie s'écrit

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}\partial_{\nu}A_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(F \cdot F). \qquad (5.20)$$

La quadri-divergence de ce tenseur est bien nulle, mais il n'est pas invariant de jauge puisque la transformation du potentiel vecteur

$$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\theta$$
 (5.21)

se traduit par l'apparition du terme supplémentaire

$$\delta T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}\partial^{\nu}\partial_{\alpha}\theta. \tag{5.22}$$

Afin de construire un tenseur impulsion-énergie invariant de jauge, on modifie le tenseur précédent en

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + F^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}A^{\nu} = -F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(F \cdot F).$$
(5.23)

Le terme additionnel se conserve bien puisque

$$\partial_{\mu} \left[ F^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} A^{\nu} \right] = \partial_{\mu} \partial_{\alpha} \left[ F^{\mu\alpha} A^{\nu} \right].$$
(5.24)

La contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur anti-symétrique est nulle et nous avons utilisé le fait que le champ  $F^{\mu\alpha}$  vérifiait les équations de Maxwell dans le vide. On peut montrer que la composante temps-temps du tenseur impulsion-énergie est la densité d'énergie électromagnétique bloquée par les champs électrique E et magnétique B,

$$T^{00} = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2.$$
 (5.25)

Finalement, le vecteur de **Poynting** est donné par

$$T^{0i} = \epsilon_{ijk} E^j B^k = \mathbf{\Pi}^i = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i .$$
(5.26)

## 5.3 Quantification à la Gupta-Bleuler

Si l'on s'en tient au Lagrangien de la théorie de Maxwell dans le vide

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \qquad (5.27)$$

chaque variable canonique  $A_{\alpha}$  est associée au moment conjugué

$$\Pi^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_{\alpha})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\alpha}} = F^{\alpha 0}.$$
(5.28)

Le moment conjugué du potentiel électrostatitique  $A^0$  est donc nul. Cette propriété remarquable ne nous a pas empêchés d'étudier l'électromagnétisme d'un point de vue classique et d'en dériver les équations de mouvement. Mais elle constitue un obstacle majeur à la quantification puisque  $A^0$ et  $\Pi^0$  deviennent désormais des opérateurs agissant dans l'espace de Fock des états accessibles au système et ne peuvent pas s'annuler.

Une possibilité consisterait à s'en passer et à procéder avec le seul potentiel vecteur A en choissant la condition de jauge de Coulomb  $\nabla A = 0$ . Cette procédure peut être utile à l'analyse de certains problèmes pourvi que l'on reste dans le référentiel du laboratoire. Mais nous nous soucions ici de l'invariance de Lorentz et toutes les composantes  $A^{\mu}$  du potentiel vecteur doivent jouer le même rôle.

La méthode proposée par **Gupta** et **Bleuler** consiste à quantifier une théorie régie par le Lagrangien (5.16) et qui n'est donc plus strictement l'électromagnétisme. Certes, nous retrouvons les équations de Maxwell en choississant  $\lambda = 1$ , mais l'espace de Fock de cette théorie quantifiée n'est pas celui de l'électromagnétisme. Il contient en effet, outre les états conventionnels de polarisation transverse, des états de polarisation longitudinale  $e(\mathbf{k}, \lambda = 3) = \mathbf{e}_z$  et temporelle  $e(\mathbf{k}, \lambda = 0)$ . Chaque composante  $A_{\alpha}$  du potentiel vecteur est maintenant un opérateur quantique associé au moment conjugué

$$\Pi^{\alpha} = F^{\alpha 0} - \lambda \eta^{\alpha 0} (\partial A) .$$
(5.29)

Quantifier de manière canonique la théorie associée au Lagrangien (5.16) consiste à imposer les relations de commutation covariantes de Lorentz

$$\left[A^{\mu}(\boldsymbol{x},t),\Pi^{\nu}(\boldsymbol{y},t)\right] = i\eta^{\mu\nu}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$
(5.30)

A partir de maintenant, nous choisissons de prendre  $\lambda = 1$ . Les relations de commutation
#### 5.3. QUANTIFICATION À LA GUPTA-BLEULER

précédentes deviennent

$$\left[A_{\mu}(\boldsymbol{x},t),\dot{A}_{\nu}(\boldsymbol{y},t)\right] = -i\eta_{\mu\nu}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$
(5.31)

Le développement de Fourier du potentiel vecteur  $A_{\mu}$  en une somme d'onde planes se met sous la forme

$$A_{\mu}(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[ a(\mathbf{k}, \lambda) e_{\mu}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ikx} + a^{\dagger}(\mathbf{k}, \lambda) e_{\mu}(\mathbf{k}, \lambda) e^{ikx} \right]$$
(5.32)

où nous reconnaissons l'élément d $\tilde{k}$  introduit au Chapitre 3. Les opérateurs d'annihilation et de création vérifient les relations de commutations

$$\left[a(\boldsymbol{k},\alpha),a^{\dagger}(\boldsymbol{p},\beta)\right] = -\eta^{\alpha\beta}(2\pi)^{3}2\omega_{\boldsymbol{k}}\delta^{3}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}).$$
(5.33)

Chaque opérateur  $a^{\dagger}(\mathbf{k}, \lambda)$  crée un quantum électromagnétique d'impulsion  $\mathbf{k}$  et de polarisation  $e(\mathbf{k}, \lambda)$ . Le potentiel vecteur vérifie l'équation (5.7) sans source si  $k^2 = 0$  où encore si l'énergie  $\omega_{\mathbf{k}}$  est égale à la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

La relation de commutation (5.33) conduit à l'existence d'états quantique de **norme négative**. En effet, si l'on crée à partir du vide de la théorie (état annulé par tous les opérateurs  $a(\mathbf{k}, \lambda)$ ) un quantum de polarisation temporelle, nous aboutissons à la catastrophe

$$\langle 0 | a(\mathbf{k}, 0) a^{\dagger}(\mathbf{k}, 0) | 0 \rangle = \langle 0 | [a(\mathbf{k}, 0), a^{\dagger}(\mathbf{k}, 0)] | 0 \rangle = -(2\pi)^{3} 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{3}(\mathbf{0}) < 0.$$
 (5.34)

L'espace de Fock ainsi obtenu ne correspond pas en fait à la théorie de Maxwell. Afin de restaurer celle-ci classiquement à partir du Lagrangien (5.16), il convient déjà d'imposer que la divergence  $\partial A$  soit nulle. Au niveau quantique, cette condition ne peut être remplie par des opérateurs mais peut servir à sélectionner le sous-espace de Fock correspondant à l'électromagnétisme de Maxwell en imposant que les bons états physiques  $|\psi\rangle$  qui le constituent vérifient la condition

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = 0. \tag{5.35}$$

Il suffit en fait qu'en tout point x de l'espace-temps

$$\partial_{\mu}A^{\mu}_{+}(x)|\psi\rangle = \partial_{\mu}\left[\int d\tilde{k} a(\boldsymbol{k},\lambda)e^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ikx}\right]|\psi\rangle = 0, \qquad (5.36)$$

ou encore plus simplement que

$$\left[a(\boldsymbol{k},0) - a(\boldsymbol{k},3)\right] |\psi\rangle = 0.$$
(5.37)

Tout état physique est le produit tensoriel d'un vecteur  $|\psi_T\rangle$  be comportant que des quanta de polarisation transverse  $e(\mathbf{k}, \lambda = 1, 2)$  et d'un vecteur  $|\phi\rangle$  n'incluant que des excitations temporelles  $e(\mathbf{k}, \lambda = 0)$  et longitudinales  $e(\mathbf{k}, \lambda = 3)$ ,

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle \otimes |\phi\rangle . \tag{5.38}$$

La condition (5.37) contraint fortement la structure de  $|\phi\rangle$  qui comporte autant de quanta temporels que longitudinaux. Elle est l'équivalente quantique de l'égalité classique entre les polarisations  $\epsilon_z$ et  $\epsilon^0$  de l'onde plane. Le T-produit du potentiel vecteur est défini comme pour le champ scalaire par

$$T\{A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\} = \theta(x^{0} - y^{0})A_{\mu}(x)A_{\nu}(y) + \theta(y^{0} - x^{0})A_{\nu}(y)A_{\mu}(x).$$
(5.39)

Sa valeur dans le vide permet de définir le crochet temporel

$$\overline{A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)} = \langle 0|T\{A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\}|0\rangle .$$
(5.40)

La valeur du T-produit dans le vide est reliée au propagateur de Feynman du champ électromagnétique qui intervient dans la solution de l'équation (5.7). In convient de déplacer les pôles du plan complexe selon la prescription habituelle qui traduit la propagation des solutions à énergie positive dans le futur et des solutions à énergie négative dans le passé. On peut montrer que

$$G_F(x-y) = i \int d\tilde{k} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right].$$
(5.41)

En utilisant le développement (5.32) du potentiel vecteur, on peut établir que

$$\dot{A}_{\mu}(x)\dot{A}_{\nu}(y) = i\eta_{\mu\nu}G_F(x-y).$$
 (5.42)

## Exercices

### Problème 5.1

Montrer que la transformée de Fourier de la fonction  $G_{ret}(x)$  définie en (5.8) est donnée par l'expression donnée en (5.9).

En déduire l'expression du propagateur retardé donnée en (5.10).

#### Problème 5.2

Montrer que les équations d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien (5.16) se mettent sous la forme donnée en (5.18)

#### Problème 5.3

En partant de la définition (5.23), démontrer les relations (5.25) et (5.26).

#### Problème 5.4

Montrer que pour  $\lambda = 1$ , les relations (5.30) deviennent (5.31).

#### Problème 5.5

Démontrer le résultat donné en (5.41). En utilisant le développement (5.32) du potentiel vecteur, démontrer ensuite la relation (5.42).

## Chapitre 6

# Le champ fermionique de spin demi-entier

L'équation de Dirac est du premier ordre et covariante de Lorentz. Elle fait naturellement apparaître un spineur  $\psi_{\alpha}$  à quatre composantes ainsi que des solutions à énergie soit positive soit négative. Nous allons quantifier de manière canonique ce champ  $\psi$  qui obéit à l'équation

$$\left[i\partial \!\!\!/ - m\right]\psi = \left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right]\psi = 0, \qquad (6.1)$$

où m désigne la masse du fermion (par exemple l'électron) et où  $\gamma^{\mu}$  est une matrice  $4 \times 4$  qui vérifie l'algèbre de Clifford

$$\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}.$$
(6.2)

## 6.1 Analyse Lagrangienne et tenseur impulsion-énergie

Un Lagrangien associé à l'équation de Dirac (6.1) est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \Big[ \bar{\psi} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} \psi) - (\partial_{\mu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi \Big] - m \psi \bar{\psi}$$
(6.3)

En considérant que les composantes  $\psi_{\alpha}$  et  $\bar{\psi}_{\alpha}$  sont les bonnes variables canoniques (c.a.d. indépendantes les unes des autres) de la théorie, les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme

$$\partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_{\alpha})} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha}}, \qquad (6.4)$$

so it encore  $% \left( {{{\left( {{{{}}}}}} \right)}}}} \right,$ 

$$\partial_{\mu} \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{\psi} \gamma^{\mu} \right)_{\alpha} \right] = -\frac{i}{2} \left[ \left( \partial_{\mu} \bar{\psi} \right) \gamma^{\mu} \right]_{\alpha} - m \bar{\psi}_{\alpha} \,. \tag{6.5}$$

Nous retrouvons alors le complexe conjugué de l'équation (6.1),

$$\bar{\psi}\left[i\overleftarrow{\partial}+m\right] = 0.$$
(6.6)

A une quadri-divergence prêt, le Lagrangian (6.3) se mets sous la forme simplifiée

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[ \vec{\partial} - m \right] \psi \,. \tag{6.7}$$

Le tenseur impulsion-énergie s'écrit de manière générale en fonction des variables canoniques  $\psi_{\alpha}$  et  $\bar{\psi}_{\alpha}$  sous la forme

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\psi_{\alpha})} (\partial^{\nu}\psi_{\alpha}) + (\partial^{\nu}\bar{\psi}_{\alpha}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\alpha})} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}.$$
(6.8)

La conservation de l'impulsion-énergie n'est assurée que lorsque les équations du mouvement (ici l'équation de Dirac) sont satisfaites, et le Lagrangien dans l'expression précédente est alors nul en sorte que

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \Big[ \bar{\psi} \gamma^{\mu} (\partial^{\mu} \psi) - (\partial^{\nu} \psi) \gamma^{\mu} \psi \Big] = \frac{i}{2} \Big[ \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial^{\nu}} \psi \Big].$$
(6.9)

Le Lagrangien de Dirac est également invariant sous les transformations de jauge globale au cours desquelles

$$\psi_{\alpha} \longrightarrow \tilde{\psi}_{\alpha} = e^{iq\theta}\psi_{\alpha}.$$
(6.10)

On en déduit le courant correspondant

$$J^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \qquad (6.11)$$

## 6.2 Seconde quantification du champ de Dirac

La quantification canonique du champ de Dirac libre commence tout d'abord par le développement de Fourier de  $\psi$  en ondes planes,

$$\psi(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} \left[ b(\boldsymbol{k},\alpha) u(\boldsymbol{k},\alpha) e^{-ikx} + d^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) v(\boldsymbol{k},\alpha) e^{ikx} \right], \qquad (6.12)$$

où cette fois l'élément différentiel invariant de Lorentz est donné par

$$\mathrm{d}\tilde{k} = \frac{m}{E} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \,. \tag{6.13}$$

Les solutions  $u(\mathbf{k}, \alpha)$  à énergie positive et  $v(\mathbf{k}, \alpha)$  à énergie négative ont été étudiées en cours de mécanique quantique relativiste. Au repos, l'électron de masse m est décrit par

$$u(\mathbf{0},1) = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad u(\mathbf{0},2) = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad v(\mathbf{0},1) = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \qquad v(\mathbf{0},2) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Les solutions correspondant à une particule d'impulsion k s'obtiennent grâce à

$$u(\boldsymbol{k},\alpha) = \frac{\boldsymbol{k}+m}{\sqrt{2m(m+E)}}u(\boldsymbol{0},\alpha) \quad \text{et} \quad v(\boldsymbol{k},\alpha) = \frac{-\boldsymbol{k}+m}{\sqrt{2m(m+E)}}v(\boldsymbol{0},\alpha). \quad (6.15)$$

L'opérateur quantique impulsion associé au champ de Dirac est donné par l'intégrale sur l'espace physique du tenseur impulsion-énergie correspondant,

$$P^{\mu} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \frac{i}{2} \left[ \bar{\psi} \gamma^{0} \overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \psi \right] \,. \tag{6.16}$$

En utilisant le développement (6.12) ainsi que les propriétés des fonctions u et v, on établit la relation

$$P^{\mu} = \int \mathrm{d}\tilde{k} \, k^{\mu} \sum_{\alpha=1,2} \left[ b^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) b(\boldsymbol{k},\alpha) - d(\boldsymbol{k},\alpha) d^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) \right] \,. \tag{6.17}$$

L'énergie du vide est donc négative et divergente. Elle semble résulter de la contribution de toutes les solutions à énergie négative. Nous retrouvons en fait de manière déguisée la mer de Dirac. Cependant, dans le cadre de la quantification canonique des champs, le vide doit avoir une énergie nulle. Il nous faut donc introduire le produit normal et placer les opérateurs de création à gauche et les opérateurs qui annullent le vide à droite. Afin d'obtenir l'expression cohérente

$$P^{\mu} = \int \mathrm{d}\tilde{k} \, k^{\mu} \sum_{\alpha=1,2} \left[ b^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) b(\boldsymbol{k},\alpha) + d^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) d(\boldsymbol{k},\alpha) \right] \,, \tag{6.18}$$

il convient alors d'introduire des relations d'**anticommutation** pour les champs fermioniques à la place des relations habituelles de commutation. Nous avons maintenant

$$\left\{b(\boldsymbol{k},\alpha),b^{\dagger}(\boldsymbol{p},\beta)\right\} = \left\{d(\boldsymbol{k},\alpha),d^{\dagger}(\boldsymbol{p},\beta)\right\} = (2\pi)^{3}\frac{E}{m}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\delta_{\alpha\beta}.$$
(6.19)

Tous les autres anticommutateur sont nuls.

Ces relations d'anticommutations impliquent que

$$\left\{\psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}),\psi_{\beta}^{\dagger}(t,\boldsymbol{y})\right\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta}.$$
(6.20)

L'opérateur quantique de charge électrique s'écrit

$$Q = q \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} : \psi^{\dagger} \psi : .$$
 (6.21)

On peut montrer que les solutions u et v vérifient les identités

$$u^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\beta)v(\boldsymbol{k},\alpha) = v^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\beta)u(\boldsymbol{k},\alpha) = 0.$$
(6.22)

On en déduit le développement suivant pour l'opérateur charge électrique,

$$Q = q \int d\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} \left[ b^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) b(\boldsymbol{k},\alpha) - d^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) d(\boldsymbol{k},\alpha) \right] .$$
(6.23)

L'opérateur  $b^{\dagger}$  engendre alors une particule d'impulsion  $\mathbf{k}$  et de charge +q, tandis que l'opérateur  $d^{\dagger}$  engendre alors une particule de même impulsion  $\mathbf{k}$  mais de charge opposée -q.

### 6.3 Propagateur de Feynman

Nous terminerons ce chapitre par une discussion du propagateur de Feynman. En théorie classique, la fonction d'onde de Dirac de l'électron au point  $\boldsymbol{x}$  et à l'instant  $x^0$  peut se concevoir comme résultant de l'interférence des ondelettes rayonnées par la même fonction d'onde à un instant  $y^0$ différent. Si l'onde a une énergie positive, cette application du théorème de **Huygens** prend la forme

$$\theta(x^0 - y^0)\psi^+(x) = i \int d\mathbf{y} S_F(x - y)y^0\psi^+(y), \qquad (6.24)$$

alors que pour une onde à énergie négative, la propagation a lieu vers le passé avec

$$\theta(y^0 - x^0)\psi^-(x) = -i \int d\mathbf{y} S_F(x - y)y^0\psi^-(y).$$
(6.25)

Le propagateur de Feynman vérifie l'équation

$$\left[i\partial \!\!\!/ - m\right]S_F(x-y) = \delta^4(x-y), \qquad (6.26)$$

et sa transformée de Fourier est donnée par

$$S_F(k) = \frac{k+m}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$
 (6.27)

En se rappelant du cours sur l'équation de Dirac, on peut montrer que

$$\left[S_F(x-y)\right]_{\eta\xi} = -i \int d\tilde{k} \left[\theta(x^0 - y^0) \left(\Lambda_+(k)\right)_{\eta\xi} e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \left(\Lambda_-(k)\right)_{\eta\xi} e^{ik(x-y)}\right],$$
(6.28)

avec

$$\Lambda_{+}(k) = \frac{k+m}{2m}$$
 et  $\Lambda_{+}(k) = \frac{-k+m}{2m}$ . (6.29)

Le T-produit du champ  $\psi_{\eta}(x)$  avec le champ  $\bar{\psi}_{\xi}(y)$  est défini par

$$T\{\psi_{\eta}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y)\} = \theta(x^{0} - y^{0})\psi_{\eta}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y) + \theta(y^{0} - x^{0})\bar{\psi}_{\xi}(y)\psi_{\eta}(x).$$
(6.30)

Sa valeur moyenne dans le vide est lié au propagateur de Feynman,

$$\langle 0|T\left\{\psi_{\eta}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y)\right\}|0\rangle = \overline{\psi_{\eta}(x)\bar{\psi}_{\xi}(y)} = i\left[S_{F}(x-y)\right]_{\eta\xi}.$$
(6.31)

## Exercices

### Problème 6.1

En considérant la transformation de jauge donnée en (6.10), construire le courant donné en (6.11), et montrer qu'il se conserve. Justifier le signe dans le terme donné en (6.11).

#### Problème 6.2

Démontrer l'expression de l'opérateur impulsion donnée en (6.17).

#### Problème 6.3

Démontrer les relations données en (6.20).

### Problème 6.4

Démontrer les relations (6.22), et en déduire l'expression de la charge électrique donnée en (6.23).

#### Problème 6.5

Démontrer la relation (6.31) entre le T-produit et le propagateur de Feynman.

## Chapitre 7

# Champs en interaction

Les champs libres étudiés dans les chapitres précédents interagissent maintenant entre eux. L'électrodynamique quantique servira de cadre à cette introduction. Nous commencerons par l'effet d'une petite perturbation  $H_1$  sur l'évolution d'un système quantique par ailleurs régi par le Hamiltonien libre  $H_0$ . Nous définirons alors les états asymptotiquement libres ainsi que la matrice S qui les couples entre eux et essaierons de justifier cette approche. Nous démontrerons ensuite le théorème de **Wick** et l'appliquerons finalement au calcul des amplitudes de transition pour aboutir, au prochain chapitre, aux règles de **Feynman**.

## 7.1 Théorie des perturbations et matrice S

#### 7.1.1 Schéma de Schrödinger et Hamiltonien libre

Considérons un système quantique régi par le Hamiltonien  $H_0$  et plaçons-nous dans le schéma de Schrödinger. L'oscillateur harmonique quantique nous servira une nouvelle fois d'illustration avec

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2. ag{7.1}$$

Les opérateurs position X et impulsion P ne dépendent pas du temps si nous adoptons le point de vue de Schrödinger. Ce sont les états quantiques du système (vecteurs propres du Hamiltonien par exemple) qui évoluent en suivant la loi

$$|n,t\rangle = e^{-i\epsilon_n(t-t_0)} |n,t_0\rangle .$$

$$(7.2)$$

Dans la mesure où la base précédente des états  $|n, t\rangle$  diagonalise le Hamiltonien  $H_0$ ,

$$H_0 |n, t\rangle = \epsilon_n |n, t\rangle \tag{7.3}$$

 $(\epsilon_n$ étant une constante), la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$|n,t\rangle = e^{-iH_0(t-t_0)} |n,t_0\rangle .$$
 (7.4)

L'opérateur d'évolution défini par

$$U(t-t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)}$$
(7.5)

permet donc de connecter le même état quantique  $|n\rangle$  pris aux deux instants différents  $t_0$  et t et de traiter ainsi l'évolution temporelle de tout système puisque

$$|\psi, t\rangle = U(t - t_0) |\psi, t_0\rangle \tag{7.6}$$

quel que soit l'état  $|\psi\rangle$  considéré.

#### 7.1.2 Schéma de Heisenberg et Hamiltonien libre

Dans le schéma de Heisenberg, les états quantiques ne varient pas au cours du temps et sont fixés à la valeur qu'ils occupent à un instant convenu  $t_0$ . L'évolution du système se manifeste par l'intermédiaire des opérateurs quantiques qui dépendent maintenant implicitement du temps. L'opérateur  $A_H$  du schéma de Heisenberg est relié à son avatar  $A_S$  du schéma de Schrödinger par

$$A_H(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A_S(t) e^{-iH_0(t-t_0)}, \qquad (7.7)$$

et sa dérivée temporelle est alors donnée par l'équation (1.50) étudiée dans le chapitre de révision sur la mécanique lagrangienne et l'oscillateur harmonique. Dans le cas où l'opérateur  $A_S$  n'a aucune dépendence temporelle, nous pouvons noter plus simplement

$$A(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A e^{-iH_0(t-t_0)}.$$
(7.8)

L'opérateur A(t) du schéma de Heisenberg correspond à l'instant  $t_0$  à l'opérateur constant  $A \equiv A(t_0)$ du schéma de Schrödinger. Une première illustration de la relation précédente nous est donnée par les opérateurs position X(t) et impulsion P(t) de l'oscillateur harmonique. Le champ scalar neutre du chapitre 3 en est un autre exemple. En tout point  $\boldsymbol{x}$  et à tout instant t, il se décompose en fonction des opérateurs de création  $a^{\dagger}(\boldsymbol{k})$  et d'annihilation  $a(\boldsymbol{k})$ ,

$$\varphi(t, \mathbf{k}) = \int d\tilde{k} \left[ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{ikx} \right].$$
(7.9)

La dépendance spatio-temporelle du champ  $\varphi$  ne s'opère qu'à travers les exponentielles imaginaires  $e^{\pm ikx}$ . Le Hamiltonien du champ scalaire neutre libre ne dépend pas du temps puisqu'il s'écrit

$$H_0 = \int d\tilde{k} \omega_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) . \qquad (7.10)$$

On rappelle les relations de commutation des opérateurs  $a(\mathbf{k})$  et  $a(\mathbf{k})$  avec le Hamiltonien  $H_0$ :

$$\left[H_0, a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\right] = \omega_{\boldsymbol{k}} a(\boldsymbol{k}) \quad \text{et} \quad \left[H_0, a(\boldsymbol{k})\right] = -\omega_{\boldsymbol{k}} a^{\dagger}(\boldsymbol{k}). \quad (7.11)$$

On en déduit que la dérivée temporelle du champ  $\varphi$  au point spatial x est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t,\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}|_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = i[H_0,\varphi].$$
(7.12)

Cette dernière relation conduit à

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = e^{iH_0(t-t_0)}\varphi(t_0, \boldsymbol{x})e^{-iH_0(t-t_0)}, \qquad (7.13)$$

et que l'opérateur champ scalaire au point spatial  $\boldsymbol{x}$  suit donc l'équation (7.8). On pourra décomposer l'intervalle temporelle  $(t - t_0)$  en N segments identiques, puis faire tendre N vers l'infini.

Le champ scalaire neutre  $\varphi(t, \boldsymbol{x})$  assujetti à la relation (7.13) évolue sous l'action du Hamiltonien libre  $H_0$  indépendant du temps. Ce champ sera noté ultérieurement  $\varphi_{\text{free}}$  car il correspond au cas libre.

#### 7.1.3 Cas général et opérateur d'évolution

Cette partie généralise la discussion précédente dans le cas où le Hamiltonien  $H_S$  du schéma de Schrödinger depent explitement du temps<sup>1</sup> et qu'il n'est pas plus possible de le diagonaliser dans une seule et même base de vecteurs propres au cours du temps. Les opérateurs  $H_S(t')$  et  $H_S(t'')$  pris aux deux instant différents t' et t'' ne commutent pas nécessairement entre eux, la relation d'exponentiation ne peut plus être utilisée. En toute généralité, il convient donc de raisonner directement sur l'opérateur d'évolution  $U\{t \leftarrow t_0\}$  qui cesse ici d'être égal à  $e^{-iH_S(t-t_0)}$  mais qui obéit toujours à l'équation différentielle

$$i\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = H_S U. \tag{7.14}$$

Cet opérateur unitaire suit également certaines règles évidentes comme

$$U\{t \leftarrow t_0\} - U^{-1}\{t_0 \leftarrow t\} = U^{\dagger}\{t \leftarrow t_0\}, \qquad (7.15)$$

ou encore

$$U\{t_3 \leftarrow t_1\} = U\{t_3 \leftarrow t_2\}U\{t_2 \leftarrow t_1\}.$$
(7.16)

En schéma de Heisenberg, l'espace vectoriel des états quantiques est fixé (par l'exemple à l'instant  $t_0$ ) et ce sont les opérateurs qui supportent complètement l'évolution du système avec

$$A_H(t) = U^{-1}\{t \leftarrow t_0\} A_S(t) U\{t \leftarrow t_0\}.$$
(7.17)

Les opérateurs  $A_H(t)$  et  $A_S(t)$  coïncident à l'instant  $t_0$  car  $U\{t_0 \leftarrow t_0\} = 1$ , mais leur évolution est différente.

L'opérateur  $A_H$  obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}A_H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A_H}{\partial t} + i \big[ H_H, A_H \big], \qquad (7.18)$$

où sa dérivée partielle est définie par

$$\frac{\partial A_H}{\partial t} = U^{-1} \{ t \leftarrow t_0 \} \frac{\mathrm{d} A_S}{\mathrm{d} t} U \{ t \leftarrow t_0 \}, \qquad (7.19)$$

et où le Hamiltonien  $H_H$  est exprimé dans le schéma de Heisenberg grâce à la relation (7.17). Dans le cas libre,  $H_S$  et  $H_H$  sont égaux.

<sup>1.</sup> Ce qui n'est pas le cas de l'oscillateur harmonique, ni des champs libres de la seconde quantification.

#### 7.1.4 Schéma d'interaction et matrice S

En règle générale, il n'est pas possible de calculer l'opérateur d'évolution  $U\{t \leftarrow t_0\}$ . Prédire le comportement d'un système quantique quelconque est donc hors de notre portée. Cependant, il est possible de dériver de manière approchée l'opérateur d'évolution U dans le cas où le Hamiltonien complet H qui régit le système est peu différent du Hamiltonien  $H_0$  libre pour lequel une base de vecteurs propres a été trouvée,

$$H = H_0 + H_1. (7.20)$$

Il s'agit dès lors de développer de manière perturbative U en fonction de l'opérateur libre  $U_0$  dans le cas où le **terme d'interaction**  $H_1$  est petit devant  $H_0$ . Nous cherchons une solution sous la forme

$$U\{t_1 \leftarrow t_1\} = U_0\{t_2 \leftarrow t_1\}U_i\{t_2 \leftarrow t_1\}.$$
(7.21)

Nous supposeront (sans nuire à la généralité de la discussion) que la perturbation  $H_1$  est nulle avant l'instant  $t_0$ ,

$$U\{t_0 \leftarrow t\} = U_0\{t_0 \leftarrow t\} \quad \text{pour } t \le t_0.$$
 (7.22)

Jusqu'à l'instant  $t_0$ , le Hamiltonien libre  $H_0$  gouverne le comportement du système et l'opérateur  $U_1$  est égal à l'identité. A partir de  $t_0$ , l'opérateur  $U_i$  commence à évoluer d'autant plus lentement que la perturbation  $H_1$  est faible.

Les opérateurs  $U_0$  et U obéissent respectivement aux équations différentielles

$$i\frac{dU_0}{dt} = H_{0,S}U_0 = H_0U_0, \qquad (7.23)$$

$$i\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = H_S(t)U, \qquad (7.24)$$

où les Hamiltoniens  $H0, S = H_0$  et  $H_S$  sont exprimés en schéma de Schrödinger. On en déduit que l'opérateur d'interaction  $U_i$  suit la relation

$$i\frac{dU_i}{dt} = \left[U_0^{-1}\{t \leftarrow t_0\}H_{1,S}(t)U_0\{t \leftarrow t_0\}\right]U_i = H_I(t)U_i.$$
(7.25)

L'opérateur  $H_I$  n'est autre que le Hamiltonien d'interaction  $H_{1,S}$  exprimé dans le schéma de Schrödinger que l'on fait évoluer en schéma de Heisenberg sous l'effet de  $U_0$  seul (et donc de son Hamiltonien libre associé  $H_0$ ) comme si l'effet de la perturbation avait disparu. L'opérateur  $H_I$ s'exprime donc en fonction des opérateurs  $A_{\text{free}}$  du schéma de Heisenberg libre,

$$A_{\text{free}} = e^{iH_0(t-t_0)} A_S(t) e^{-iH_0(t-t_0)}.$$
(7.26)

En seconde quantification, le Hamiltonien d'interaction  $H_I$  s'exprime dès lors en fonction des champs libres  $\varphi_{\text{free}}$  dont nous connaissons le développement en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

Pour le cas de l'oscillateur harmonique que nous perturbons à l'aide du potentiel quartic  $\epsilon X^4$ très petit devant le Hamiltonien libre  $H_0$ ,

$$H_S = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2 + \epsilon(t)X^4.$$
(7.27)

Le Hamiltonien d'interaction se met alors sous la forme

$$H_I(t) = \epsilon(t) X_{\text{free}}^4 \,. \tag{7.28}$$

Les opérateurs position  $X_{\text{free}}$  et impulsion  $P_{\text{free}}$  dépendent alors désormais du temps (puisqu'ils sont dérivés en schéma de Heisenberg libre) et obéissent aux équations différentielles (1.51),

$$\dot{X}_{\text{free}} = \frac{P_{\text{free}}}{2m}$$
 et  $\dot{P}_{\text{free}} = -kX_{\text{free}}$ . (7.29)

La factorisation (7.21) n'est pas anodine! En nous plaçant en schéma de Heisenberg libre, nous allons en effet continuer à faire évoluer tous les opérateurs quantiques sous l'effet de  $H_0$  seul et ne considérons que les entités  $A_{\text{free}}(t)$  du cas sans interaction dont nous connaissons le comportement. Par contre, l'interaction  $H_1$  engendre une évolution supplémentaire  $U_i$  qui par convention affecte les vecteurs  $|n,t\rangle$  de l'espace des états quantiques accessibles au système. En l'absence de toute interaction, ces vecteurs resteraient gelés dans leur état à l'instant  $t_0$ . Nous sommes dans le schéma d'interaction qui est un moyen terme entre les schémas de Schrödinger et de Heisenberg puisque les opérateurs quantiques supportent d'une part l'évolution due à  $H_0$  seul (comme dans le cas libre) alors que l'interaction entraîne d'autre part une lente dérive des vecteurs  $|n,t\rangle$  de l'espaces des états. La solution intégrale de l'équation (7.24) s'écrit

$$U_i\{t \leftarrow t_0\} = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') U_i\{t' \leftarrow t_0\} \,\mathrm{d}t'$$
(7.30)

et se développe de manière perturbative en puissance de l'interaction  $H_I$  sous la forme

$$U_{i}\{t \leftarrow t_{0}\} = 1 + (-i) \int_{t_{0}}^{t} dt' H_{I}(t') + (-i)^{2} \int_{t_{0}}^{t} dt' \int_{t_{0}}^{t'} dt'' H_{I}(t') H_{I}(t'') + (-i)^{3} \int_{t_{0}}^{t} dt' \int_{t_{0}}^{t'} dt'' \int_{t_{0}}^{t''} dt''' H_{I}(t') H_{I}(t'') H_{I}(t''') + \dots$$
(7.31)

En considérant le second ordre du développement précédent, on démontre que

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1)$$
  
$$= \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 T \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \}$$
  
$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \},$$
 (7.32)

où les termes du T-produit sont ordonnés chronologiquement par temps croissant de la droite vers la gauche. D'une manière générale, on peut établir que

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \, H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 \dots \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_n \, T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\}.$$
(7.33)

Lorsque l'on intègre sur l'hypercube à n dimensions s'étendant dans chaque direction  $t_1$  (i = 1, ..., n), la suite  $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$  peut être ordonnée chronologiquement de n! manières différentes

correspondant chacune à une permutation différente de l'ensemble  $\{1, 2, \ldots, n\}$ .

Nous venons alors d'établir que l'opérateur d'interaction  $U_i$  peut se développer de manière formelle sous la forme

$$U_i\{t \leftarrow t_0\} = T\left\{e^{-i\int_{t_0}^t dt' H_I(t')}\right\}.$$
(7.34)

Ce schéma d'interaction est approprié pour décrire une collision entre particules au sein d'un accélérateur puisque celles-ci ne se voient finalement que dans les zones d'interaction où les faisceaux se croisent. En dehors du moment où les paquets d'onde se mélangent et entrent en collision, les particules se propagent de manière libre. L'instant  $t_0$  correspond au début de l'interaction et tà la fin. Puisque nous utiliserons essentiellement des ondes planes, nous ferons tendre formellement  $t_0 \longrightarrow -\infty$  et  $t \longrightarrow +\infty$  en considérant que la région d'interaction occupe tout l'espace.

En raison du terme d'interaction  $H_I$ , un état initial  $|i, t_0\rangle$  se transforme à l'instant t en

$$|i,t\rangle = U\{t \leftarrow t_0\} |i,t_0\rangle , \qquad (7.35)$$

et peut avoir une composante non-nulle suivant le vecteur  $|f, t_0\rangle$  ouvrant par là même la possibilité à une transition entre l'état i et l'état f. On définit alors la matrice d'interaction

$$\mathcal{S} = U\{+\infty \leftarrow -\infty\}. \tag{7.36}$$

Cet opérateur décrit la rotation interne de l'espace des états libres  $|n, t_0\rangle$  sous l'effet de l'interaction  $H_I$ .

Dans le cadre de la théorie des champs, la matrice  $\mathcal{S}$  devient alors

$$\mathcal{S} = T\left\{e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \,H_I(t)}\right\} = T\left\{e^{-i\int \mathrm{d}^4x \,\mathcal{H}_I(x)}\right\}, \qquad (7.37)$$

où le Hamiltonien d'interaction s'écrit en fonction des champs libres  $\varphi_{\text{free}}$  ar l'intermédiaire de la densité  $\mathcal{H}_I$ ,

$$H_I(t) = \int d\boldsymbol{x} \, \mathcal{H}_I(t, \boldsymbol{x}) \,. \tag{7.38}$$

#### 7.1.5 Electrodynamique quantique

En physique des particules, le Lagrangien de l'électrodynamique quantique associant électrons et photons prend la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\gamma) + \mathcal{L}_0(e^-, e^+) + \mathcal{L}_I.$$
(7.39)

La contribution correspondant au champ électromagnétique libre est donnée par

$$\mathcal{L}_{0}(\gamma) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2}, \qquad (7.40)$$

alors que le terme associé au champ libre fermionique d'électrons et de positrons s'écrit

$$\mathcal{L}_0(e^-, e^+) = \bar{\psi} \left[ i \overrightarrow{\partial} - m \right] \psi.$$
(7.41)

L'interaction entre les électrons et les photons est décrite par le couplage entre le potentiel vecteur  $A_{\mu}$  du champ électromagnétique et le courant fermionique  $J^{\mu}$ :

$$\mathcal{L}_{I} = -J^{\mu}A_{\mu} = -e : \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi : A_{\mu} = -e : \bar{\psi}\mathcal{A}\psi :, \qquad (7.42)$$

où e est la charge de l'électron et où l'on reconnaît le produit normal dans la définition de l'opérateur courant  $J^{\mu}$ .

La densité de Hamiltonien d'interaction est simplement donnée par

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = e : \bar{\psi} \mathcal{A} \psi : . \tag{7.43}$$

On se rappelle que dans le schéma d'interaction, les densités  $\mathcal{H}_I$  et  $\mathcal{L}_I$  sont exprimées en fonction des champs libres  $\varphi_{\text{free}}$ .

La matrice  $\mathcal{S}$  de l'électrodynamique quantique associant électrons et photons s'écrit alors

$$\mathcal{S} = T \left\{ e^{-ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x) : A_{\mu}(x)} \right\} .$$
(7.44)

## 7.2 Le théorème de Wick

La définition (7.37) de la matrice S fait intervenir le T-produit (produit chronologiquement ordonné) du Lagrangien d'interaction. En 1949, **Dyson** a démontré que le T-produit de n champs quantiques pouvait être développé en une série de termes composés chacun d'un produit normal et de propagateurs. La démonstration de Dyson a été ensuite généralisée et formalisée par **Wick** en 1950. La série de produits normaux conduit (de manière algébrique) aux diagrammes de **Feynman**.

#### 7.2.1 Cas bosonique

Considérons le champ bosonique  $\varphi_i$  qui peut représenter un champ scalaire neutre  $\varphi$  ou un champ scalaire chargé  $\varphi$  ou son hermitien conjugué  $\varphi^{\dagger}$ , ou encore la composante  $A_{\alpha}$  du champ électromagnétique. Le champ  $\varphi_i$  est pris au point spatio-temporelle  $x_i$  associé à l'instant  $t_i$ . Il se décompose en opérateurs d'annihilation (partie  $\varphi_i^+$  à énergie positive) et de création (partie  $\varphi_i^-$  à énergie négative), en sorte que

$$\varphi_i = \varphi_i^+ + \varphi_i^-, \qquad (7.45)$$

avec

$$\varphi_i^+ |0\rangle = 0 \quad \text{alorsque} \quad \bar{0}\varphi_i^- = 0.$$
 (7.46)

Dans le cas du champ scalaire neutre que nous avons étudié dans le chapitre 3, cette décomposition prend la forme

$$\varphi_i^+(x) = \int d\tilde{k} a(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad \text{et} \quad \varphi_i^-(x) = \int d\tilde{k} a^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{+ikx}.$$
 (7.47)

#### Cas de deux bosons

On considère tout d'abord le produit  $\varphi_1\varphi_2$  des deux champs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Leur T-produit est défini par

$$T\{\varphi_{1}\varphi_{2}\} = \theta(t_{1} - t_{2})\varphi_{1}\varphi_{2} + \theta(t_{2} - t_{1})\varphi_{2}\varphi_{1}, \qquad (7.48)$$

alors que le produit normal :  $\varphi_1 \varphi_2$  : s'obtient en plaçant les opérateurs de création  $\varphi_i^-$  à gauche et les opérateurs d'annihilation  $\varphi_i^+$  à droite. Il se décompose alors en

$$:\varphi_1\varphi_2: = : \left[\varphi_1^+ + \varphi_1^-\right] \left[\varphi_2^+ + \varphi_2^-\right]:$$
(7.49)

$$= :\varphi_{1}^{+}\varphi_{2}^{+}: + :\varphi_{1}^{+}\varphi_{-} + :\varphi_{1}^{-}\varphi_{2}^{+}: + :\varphi_{1}^{-}\varphi_{2}^{-}:$$
(7.50)  
$$= \varphi_{1}^{+}\varphi_{2}^{+} + \varphi_{2}^{-}\varphi_{1}^{+} + \varphi_{1}^{-}\varphi_{2}^{+} + \varphi_{1}^{-}\varphi_{2}^{-}.$$
(7.51)

$$= \varphi_1^+ \varphi_2^+ + \varphi_2^- \varphi_1^+ + \varphi_1^- \varphi_2^+ + \varphi_1^- \varphi_2^-.$$
(7.51)

On en déduit que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\} = :\varphi_1\varphi_2 : +\langle 0|T\{\varphi_1\varphi_2\}|0\rangle = :\varphi_1\varphi_2 : +\varphi_1\varphi_2$$

$$(7.52)$$

ainsi que

$$T\{:\varphi_1\varphi_2:\} =:\varphi_1\varphi_2:.$$
 (7.53)

#### Cas de trois bosons

On considère le T-produit des trois champs  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ . On remarque d'abord que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = T\{\varphi_2\varphi_3\varphi_1\} = T\{\varphi_3\varphi_1\varphi_2\} = \dots$$
(7.54)

On suppose que  $\varphi_3$  est le champ correspondant au moment le plus antérieur  $t_3$ . Dans ce cas, nous avons

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = T\{\varphi_1\varphi_2\}\varphi_3.$$
(7.55)

On peut ensuite montrer que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} =: \varphi_1\varphi_2: \varphi_3^- +: \varphi_1\varphi_2: \varphi_3^+ + \varphi_1^-\varphi_2\varphi_3.$$

$$(7.56)$$

On peut montrer que

$$:\varphi_{1}\varphi_{2}:\varphi_{3}^{+} = :\varphi_{1}\varphi_{2}\varphi_{3}^{+}:, \qquad (7.57)$$

$$:\varphi_1\varphi_2:\varphi_3^- = :\varphi_1\varphi_2\varphi_3^-: +\varphi_2\varphi_3\varphi_1 + \varphi_1\varphi_3\varphi_2.$$

$$(7.58)$$

Finalement, on en déduit que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} =: \varphi_1\varphi_2\varphi_3: + \varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_3\varphi_2 + \varphi_2\varphi_3\varphi_1.$$
(7.59)

Cette dernière égalité peut aussi s'écrire

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} =: \varphi_1\varphi_2\varphi_3: +: \varphi_1\varphi_2\varphi_3: +: \varphi_1\varphi_2\varphi_3: +: \varphi_1\varphi_2\varphi_3: +: \varphi_1\varphi_2\varphi_3: .$$
(7.60)

On remarque avec profit que puisque  $t_3$  est inférieur à  $t_1$ , le propagateur  $\varphi_1 \varphi_3$  n'est autre que le commutateur de  $\varphi_1^+$  avec  $\varphi_3^-$ ,

$$\overrightarrow{\varphi_1\varphi_3} = \langle 0|T\{\varphi_1\varphi_3\}|0\rangle = \left[\varphi_1^+,\varphi_3^-\right].$$
(7.61)

Il va de même pour le propagateur  $\varphi_2 \varphi_3$ .

#### Cas de quatre bosons

Plus difficile est le cas du T-produit des quatre champs  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  et  $\varphi_4$ . Nous décidons d'appeller  $\varphi_4$  le champ correspond à l'instant le plus antérieur avec  $t_4$  inférieur à  $t_1, t_2$  et  $t_3$ . En procédant comme au cas précédent, nous pouvons montrer que

$$T\{\varphi_{1}\varphi_{2}\varphi_{3}\varphi_{4}\} = T\{\varphi_{1}\varphi_{2}\varphi_{3}\}\varphi_{4}$$

$$=:\varphi_{1}\varphi_{2}\varphi_{3}\varphi_{4}:$$

$$+ \varphi_{1}\varphi_{2}:\varphi_{3}\varphi_{4}: +\varphi_{1}\varphi_{3}:\varphi_{2}\varphi_{4}: +\varphi_{1}\varphi_{4}:\varphi_{2}\varphi_{3}:$$

$$+ \varphi_{2}\varphi_{3}:\varphi_{1}\varphi_{4}: +\varphi_{2}\varphi_{4}:\varphi_{1}\varphi_{3}: +\varphi_{3}\varphi_{4}:\varphi_{1}\varphi_{2}:$$

$$+ \varphi_{1}\varphi_{2}\varphi_{3}\varphi_{4} + \varphi_{1}\varphi_{3}\varphi_{2}\varphi_{4} + \varphi_{1}\varphi_{4}\varphi_{2}\varphi_{3}.$$

$$(7.62)$$

#### 7.2.2 Cas fermionique

Considérons maintenant le champ fermionique  $\psi_i$  qui représentera une composante  $\psi_{\alpha}$  ou  $\bar{\psi}_{\beta}$  du spineur de Dirac  $\psi$  étudié dans le chapitre 6. Ce champ est par essence un objet anti-commutant et nous le prenons au point spatio-temporel  $x_i$  associé à l'instant  $t_i$ . Il se décompose également en une partie  $\psi_i^+$  à énergie positive constituée d'opérateurs d'annihilation ainsi qu'une partie  $\psi_i^-$  à énergie négative constituée d'opérateurs de création,

$$\psi_i = \psi_i^+ + \psi_i^-, \tag{7.63}$$

avec

$$\psi_i^+ |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0| \, \bar{\psi}_i^- = 0.$$
 (7.64)

Pour le spineur  $\psi_i$ , cette décomposition prend la forme

$$\psi_i^+(x) = \int \mathrm{d}\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} b(\mathbf{k},\alpha) u(\mathbf{k},\alpha) e^{-ikx} , \qquad (7.65)$$

$$\psi_i^-(x) = \int \mathrm{d}\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} d^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) v(\boldsymbol{k},\alpha) e^{+ikx} , \qquad (7.66)$$

alors que pour le spineur conjugué  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^{0}$ , elle s'écrit

$$\bar{\psi}_i^-(x) = \int \mathrm{d}\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} b^{\dagger}(\boldsymbol{k},\alpha) \bar{u}(\boldsymbol{k},\alpha) e^{+ikx}, \qquad (7.67)$$

$$\bar{\psi}_i^+(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\alpha=1,2} d(\boldsymbol{k}, \alpha) \bar{v}(\boldsymbol{k}, \alpha) e^{-ikx} \,.$$
(7.68)

#### Cas de deux fermions

Le T-produit des deux champs fermioniques  $\psi_1$  et  $\psi_2$  est défini par

$$T\{\psi_1\psi_2\} = = \theta(t_1 - t_2)\psi_1\psi_2 - \theta(t_2 - t_1)\psi_2\psi_1, \qquad (7.69)$$

alors que le produit normal s'écrit (attention au signe!)

$$:\psi_1\psi_2: =: \left[\psi_1^+ + \psi_1^-\right] \left[\psi_2^+ + \psi_2^-\right]:$$
(7.70)

$$=:\psi_1^+\psi_2^+:+:\psi_1^+\psi_2^-:+:\psi_1^-\psi_2^+:+:\psi_1^-\psi_2^-:$$
(7.71)

$$= \psi_1^+ \psi_2^+ - \psi_2^- \psi_1^+ + \psi_1^- \psi_2^+ + \psi_1^- \psi_2^-.$$
(7.72)

On peut montrer que

$$T\{\psi_1\psi_2\} = :\psi_1\psi_2 : +\langle 0|T\{\psi_1\psi_2\}|0\rangle = :\psi_1\psi_2 : +\psi_1\psi_2, \qquad (7.73)$$

ainsi que (attention au signe!)

$$T\{:\psi_1\psi_2:\} = :\psi_1\psi_2:= -:\psi_2\psi_1:.$$
(7.74)

#### Cas de trois fermions

On considère maintenant le T-produit des trois champs  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  et  $\psi_3$ . On remarque ici que (attention au signe!)

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = -T\{\psi_2\psi_1\psi_3\} = T\{\psi_3\psi_1\psi_2\} = \dots$$
(7.75)

On choisit l'instant  $t_3$  associé à  $\psi_3$  comme le plus antérieur. De manière assez analogue que pour le cas bosonique (mais attention aux signes !), on montre que

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} =: \psi_1\psi_2\psi_3 :+ \psi_1\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_3\psi_2 + \psi_2\psi_3\psi_1$$
(7.76)

$$=:\psi_1\psi_2\psi_3:+:\psi_1\psi_2\psi_3:+:\psi_1\psi_2\psi_3:+:\psi_1\psi_2\psi_3:.$$
(7.77)

Le propagateur  $\overline{\psi_1}\psi_3$  s'écrit comme l'anti-commutateur de  $\psi_1^+$  avec  $\psi_3^-$ ,

$$\overline{\psi_1}\psi_3 = \langle 0|T\{\psi_1\psi_3\}|0\rangle = \{\psi_1^+, \psi_3^-\}.$$
(7.78)

Il en va de même pour le propagateur  $\psi_1\psi_2$ .

#### Cas de quatres fermions

Pour terminer, on considère le cas du T-produit des quatre champs  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  et  $\psi_4$ . En choissant  $\psi_4$  comme champ le plus antérieur avec  $t_4$  inférieur à  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , on peut établir la relation (attention aux signes !)

$$T\{\psi_{1}\psi_{2}\psi_{3}\psi_{4}\} =: \psi_{1}\psi_{2}\psi_{3}\psi_{4}: -\psi_{1}\psi_{3}: \psi_{2}\psi_{4}: +\psi_{1}\psi_{4}: \psi_{2}\psi_{3}: +\psi_{2}\psi_{3}: \psi_{1}\psi_{4}: -\psi_{2}\psi_{4}: \psi_{1}\psi_{3}: +\psi_{3}\psi_{4}: \psi_{1}\psi_{2}: +\psi_{1}\psi_{2}\psi_{3}: +\psi_{1}\psi_{2}\psi_{3}\psi_{4} - \psi_{1}\psi_{3}\psi_{2}\psi_{4} + \psi_{1}\psi_{4}\psi_{2}\psi_{3}.$$

$$(7.79)$$

#### 7.2.3 Cas général

Cette fois,  $\varphi_i$  désigne un champ quelconque de nature fermionique ou bosonique. Quand nous réarrangons l'ordre des termes d'un produit normal ou d'un T-produit, nous prendrons garde à introduire un signe – chaque fois que nous permuterons deux champs fermioniques entre eux. Le théorème de Wick établit que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\} = T\{12\ldots n\} = :12\ldots n:$$
(7.80)

$$= \sum_{\kappa=1} : 123\dots n : + \sum_{\kappa=2} : 123\dots n : + \sum_{\kappa=3} : 123\dots n : +\dots$$
(7.81)

où  $\kappa$  désigne le nombre d'" agrafes" dans les termes sous la somme. Les sommes par ordre de  $\kappa$  sont données par

$$\sum_{\kappa=1}^{N} : 123...n := : \overset{\Box}{123}...n : + : \overset{\Box}{123}...n : + ... + : 123...n : + ...,$$

$$\sum_{\kappa=2}^{N} : 123...n := : \overset{\Box}{12345678...n} : + : \overset{\Box}{12345678...n} : + ...,$$

$$\vdots$$

$$(7.82)$$

$$\vdots$$

Il se démontre par induction en admettant que la relation précédente est vraie à l'ordre n et en considérant ensuite le T-produit de n+1 champs dans lequel on aura pris soin de placer en dernière position  $\varphi_{n+1}$  puisqu'il correspond à l'instant  $t_{n+1}$  le plus antérieur. Comme précédemment, il est immédiat de montrer que

$$T\{\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\varphi_{n+1}\} = T\{\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\}\varphi_{n+1}$$
(7.83)

et que

$$:\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n:\varphi_{n+1}^+ = :\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\varphi_{n+1}^+:.$$
(7.84)

Dans le produit :  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n : \varphi_{n+1}^-$ , l'opérateur de création  $\varphi_{n+1}^-$  n'est pas à sa place. En le décalant à l'endroit approprié, il produit le propagateur

$$\overline{\varphi_i}\varphi_{n+1} = \langle 0|T\{\varphi_i\varphi_{n+1}\}|0\rangle = \left[\varphi_i^+, \varphi_{n+1}^-\right] \quad \text{ou} \quad \left\{\varphi_i^+, \varphi_{n+1}^-\right\}$$
(7.85)

chaque fois qu'il traverse le champ  $\varphi_i^+$ . L'anti-commutateur correspond au cas où les champs sont tous les deux fermioniques. Il s'ensuit que

$$:\varphi_{1}\varphi_{2}\dots\varphi_{n}:\varphi_{n+1}^{-} =:\varphi_{1}\varphi_{2}\dots\varphi_{n}\varphi_{n+1}^{-}:$$

$$+:\varphi_{1}\varphi_{2}\dots\overline{\varphi_{n}}\varphi_{n+1}^{-}:+:\varphi_{1}\varphi_{2}\dots\overline{\varphi_{n-1}}\varphi_{n}\varphi_{n+1}^{-}:+\dots$$
(7.86)
$$+:\overline{\varphi_{1}}\varphi_{2}\dots\overline{\varphi_{n}}\varphi_{n+1}^{-}.$$

#### 7.2.4 Application à l'électrodynamique quantique

La matrice  $\mathcal{S}$  (7.37) de l'électrodynamique quantique associant électons et photons admet comme développement, au second ordre en la charge électrique e, l'expression

$$\mathcal{S} = \frac{(-ie)^2}{2} \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y \,\mathcal{F}(x,y) \,, \tag{7.87}$$

où la fonction à intégrer est le T-produit

$$\mathcal{F}(x,y) = T\{ : \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) : A_{\mu}(x) : \bar{\psi}(y)\gamma^{\nu}\psi(y) : A_{\nu}(y) \}.$$
(7.88)

L'application du théorème de Wick conduit à développer la fonction  $\mathcal{F}(x, y)$  en une série de produits normaux où chaque terme correspond à un **diagramme de Feynman** particulier :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x,y) &=: \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x)\bar{\psi}(y)\gamma^{\nu}\psi(y)A_{\nu}(y): \\
&+: \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\bar{\psi}(x)A_{\mu}(x)\bar{\psi}(y)\gamma^{\nu}\psi(y)A_{\nu}(y): \\
&+: \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x)\bar{\psi}(y)\gamma^{\nu}\psi(y)A_{\nu}(y): \\
&+: \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\bar{\psi}(x)A_{\mu}(x)\bar{\psi}(y)\gamma^{\nu}\psi(y)A_{\nu}(y): \\
&+: \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\bar{\psi}(x)A_{\mu}(x)\bar{\psi}(y)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x)\bar{\psi}(y)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)\psi(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)A_{\mu}(x)Y_{\nu}(x)$$

Le terme  $\psi(x)$  correspond à une ligne fermionique aboutissant au point spatio-temporel x. Pour son conjugué  $\bar{\psi}(x)$ , la ligne fermionique part de x. Le champ électromagnétique  $A_{\mu}(x)$  est associé à une ligne ondulée dont une extrêmité est fixée en x. Le propagateur fermionique est défini par

$$\overline{\psi(x)}\overline{\psi}(y) = \langle 0|T\{\psi(x)\overline{\psi}(x)\} = iS_F(x-y),$$
(7.90)

et est graphiquement décrit par un segment de ligne orientée allant de y à x. Dans le cas du propagateur du photon,

$$\overline{A_{\mu}(x)}A_{\nu}(y) = \langle 0|T\{A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)\} = i\eta_{\mu\nu}G_F(x-y), \qquad (7.91)$$

la ligne ondulée connectant y et x n'est pas orientée. On remarque que la valeur dans le vide du T-produit d'un champ fermionique avec un champ bosonique est nulle.

## 7.2. LE THÉORÈME DE WICK

On établit finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,y) &=: \bar{\psi}_{\alpha}(x) \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) \bar{\psi}_{\eta}(y) \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \psi_{\xi}(y) A_{\mu}(x) A_{\nu}(y): \\ &+ i: \bar{\psi}_{\alpha}(x) \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \psi_{\xi}(y) A_{\mu}(x) A_{\nu}(y): \\ &- i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} : \psi_{\beta}(x) \bar{\psi}_{\eta}(y) \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} A_{\mu}(x) A_{\nu}(y): \\ &+ i: \bar{\psi}_{\alpha}(x) \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) \bar{\psi}_{\eta}(y) \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \psi_{\xi}(y): \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \psi_{\xi}(y): \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} : \psi_{\beta}(x) \bar{\psi}_{\eta}(y): \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\eta\xi} \eta_{\mu\nu} G_{F}(x-y) \\ &+ i \{S_{F}(y-x)\}_{\xi\alpha} \{\gamma^{\mu}\}_{\alpha\beta} \{S_{F}(x-y)\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\beta\eta} \{\gamma^{\nu}\}_{\beta\eta}$$

où les indices spinoriels  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  et  $\xi$  sont sommés de 1 à 4, alors que les indices de Lorentz  $\mu$  et  $\nu$  sont sommés de 0 à 3.

## Exercices

### Problème 7.1

Démontrer les relations de commutation (7.11). En déduire la relation (7.12). Finalement, montrer que cela conduit à l'expression donnée en (7.13).

#### Problème 7.2

Démontrer la relation donnée en (7.25) pour l'évolution de l'opérateur d'interaction  $U_i$ .

#### Problème 7.3

Pour l'exemple de l'oscillateur harmonique perturbé par un potentiel quartique  $\epsilon X^4$  (voir (7.27)), démontrer l'expression du Hamiltonien d'interaction donnée en (7.28).

#### Problème 7.4

Pour l'exemple de l'électrodynamique quantique, démontrer l'expression (7.44) pour la matrice S associée au Lagrangien d'interaction donnée en (7.42).

#### Problème 7.5

Démontrer le théorème de Wick pour le cas de quatre champs bosoniques, c.a.d. démontrer l'expression (7.62).

#### Problème 7.6

Démontrer le théorème de Wick pour le cas de trois champs fermioniques, c.a.d. démontrer l'expression (7.77).

## Problème 7.7

A partir de la relation (7.89) démontrer l'expression donnée en (7.92).

## Chapitre 8

# Règles de Feynman

Afin d'illustrer le calcul du taux de réactions entre particules élémentaires, nous nous concentrerons ici sur l'effet **Compton-Thomson** où un photon diffuse élastiquement sur un électron. Nous en profiterons pour dégager les règles qui président au calcul des diagrammes de Feynman correspondants et établirons finalement la relation permettant de calculer la section efficace différentielle de réaction.

## 8.1 Elément de matrice S

Le processus auquel nous nous intéressons est la diffusion élastique d'un photon sur un électron,

$$\gamma(\mathbf{k}_1, \lambda_1) + e^-(\mathbf{p}_1, s_1) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}_2, \lambda_2) + e^-(\mathbf{p}_2, s_2).$$
 (8.1)

Le photon incident possède l'impulsion  $\mathbf{k}_1$  et son état de polarisation est décrit par le vecteur  $e_1^{\mu} = e^{\mu}(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$ . Le photon de l'état final est caractérisé par l'impulsion  $\mathbf{k}_2$  et la polarisation  $e_2^{\mu} = e^{\mu}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)$ . Quant aux électrons, leurs impulsions et hélicités sont respectivement  $\mathbf{p}_1$  et  $s_1$  dans l'état initial ainsi que  $\mathbf{p}_2$  et  $s_2$  dans l'état final. Du point de vue de la seconde quantification, l'étal initial contient un seul électron et un seul photon dans tout le volume réactionnel

$$\mathcal{V} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^3 \,\delta^3(\mathbf{0})\,, \qquad (8.2)$$

en sorte que nous le décrirons par le vecteur unitaire de l'espace de Fock de la théorie libre pris à l'instant initial  $t_0 = -\infty$ ,

$$|i\rangle = |i, t_0 = -\infty\rangle = \mathcal{C}_i b^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1, s_1) a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1, \lambda_1) |0\rangle .$$
(8.3)

L'état final correspond au ket unitaire

$$|f\rangle = |f, t = +\infty\rangle = \mathcal{C}_f b^{\dagger}(\boldsymbol{p}_2, s_2) a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_2, \lambda_2) |0\rangle .$$
(8.4)

Les coefficients de normalisation sont données par

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_1 \mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{(E_1/m)\mathcal{V}}} \quad \text{et} \quad C_f = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_2 \mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{(E_2/m)\mathcal{V}}}, \quad (8.5)$$

où  $\epsilon_{1,2}$  sont les énergies des photons, alors que  $E_{1,2}$  sont les énergies des électrons.

L'élément de matrice  $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$  représente l'amplitude de probabilité associée à la diffusion (8.1). Celle-ci se déroule dans tout le volume  $\mathcal{V}$  entre l'instant  $t_0 = -\infty$  et l'instant  $t = +\infty$ , donc sur une durée

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(0) \,. \tag{8.6}$$

Le carré  $|\langle f | \mathcal{S} | i \rangle|^2$  est la probabilité pour qu'un électron et un photon contenus tous deux dans le volume  $\mathcal{V}$  interagissent entre eux via la diffusion Compton-Thomson pendant le laps de temps  $\mathcal{T}$ . Si cette probabilité vaut 1, nous comptabiliserons alors une seule réaction dans tout le volume spatio-temporelle  $\mathcal{VT}$ . Le taux de réaction (le nombre de réaction par seconde et par unité de volume) est donc donné par le rapport

taux de réaction = 
$$\frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\mathcal{VT}}$$
 (8.7)

L'élément de transition  $S_{fi}$  fait intervenir le produit hermitien

$$\mathcal{S}_{fi} = \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \left\langle 0 \right| a(\boldsymbol{k}_2, \lambda_2) \, b(\boldsymbol{p}_2, s_2) \, \mathcal{S} \, b^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1, \lambda_1) \, a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1, \lambda_1) \left| 0 \right\rangle \,. \tag{8.8}$$

Or la matrice S se développe en une série de polynômes s'écrivant chacun en terme des champs libres  $\psi_{\alpha}$ ,  $\bar{\psi}_{\beta}$  et  $A_{\mu}$ . Il faut pousser ce développement au second ordre en la charge électrique afin de trouver les premiers termes qui se réduiront exactement avec les opérateurs de création  $(a^{\dagger}(\mathbf{k}_1, \lambda_1)$  et  $b^{\dagger}(\mathbf{p}_1, s_1))$  et d'annihilation  $(a^{(\mathbf{k}_2, \lambda_2)})$  et  $b(\mathbf{p}_2, s_2)$  en jeu dans le processus étudié et qui engendreront ainsi un résultat non nul.

Au second ordre en e, la contribution de la matrice S à la diffusion Compton-Thomson est donnée par l'intégrale

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y \, \mathcal{F}_{\text{effectif}}(x, y) \,, \tag{8.9}$$

où la fonction  $\mathcal{F}_{\text{effectif}}(x, y)$  est la combinaison

$$\mathcal{F}_{\text{effectif}}(x,y) =: \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \overline{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \mathcal{A}(y) \psi(y) :: :: \overline{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \mathcal{A}(y) \overline{\psi}(y) :: .$$
(8.10)

En permutant le rôle de x et de y, on peut montrer que

$$S_2 = (-ie)^2 \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \overline{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \mathcal{A}(y) \psi(y) : .$$
(8.11)

## 8.2 Réduction de $S_{fi}$

L'élément de matrice effectif qui intervient dans l'amplitude de la diffusion Compton-Thomson est donc égal à

$$\mathcal{S}_{\text{effectif}} = (-ie)^2 \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \; iS_F(x-y) \; \mathcal{A}(y)\psi(y) : . \tag{8.12}$$

Nous devons alors évaluer l'amplitude de transition

$$\mathcal{S}_{fi} = (-ie)^2 \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y \, \langle 0 | \, a_2 b_2 : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \, iS_F(x-y) \, \mathcal{A}(y)\psi(y) : \, b_1^{\dagger} a_1^{\dagger} \, | 0 \rangle \,. \tag{8.13}$$

Concentrons nous tout d'abord sur les opérateurs fermioniques qui interviennent dans la relation précédente et examinons leur action sur le vide. Dans la mesure où ils commutent avec les opérateurs bosoniques associés au champ électromagnétique, il suffit de calculer

$$\langle 0|b_2:\bar{\psi}(x)\psi(y):b_1|0\rangle = \langle 0|b_2:\left[\bar{\psi}^+(x)+\bar{\psi}^-(x)\right]\left[\psi^+(y)+\psi^-(y)\right]:b_1|0\rangle .$$
(8.14)

L'évaluation de ce terme s'appelle une **réduction** et implique des règles simples. La combinaison  $\bar{\psi}^-(x)\psi^+(y)$  contient le produit  $b^{\dagger}b$  qui est ici le seul terme susceptible d'engendrer un résultat non nul. Les trois autres possibilités contiennent au moins un opérateur d ou  $d^{\dagger}$  détruisant le vide à droite ou à gauche. On appliquera les formules de réduction suivantes :

$$\psi^{+}(y) b^{\dagger}(\boldsymbol{p}_{1}, s_{1}) |0\rangle = u(\boldsymbol{p}_{1}, s_{1}) e^{-ip_{1}y} |0\rangle , \langle 0| b(\boldsymbol{p}_{2}, s_{2}) \bar{\psi}^{-}(x) = \bar{u}(\boldsymbol{p}_{2}, s_{2}) e^{ip_{2}x} \langle 0| .$$

$$(8.15)$$

L'amplitude de transition s'écrit alors

$$\mathcal{S}_{fi} = (-ie)^2 \, \mathcal{C}_i \mathcal{C}_f \, \iint \mathrm{d}^4 x \, \mathrm{d}^4 y \, e^{ip_2 x} e^{-ip_1 y} \left[ \bar{u}_2 \gamma^\mu i S_F(x-y) \gamma^\nu u_1 \right] \langle 0 | \, a_2 \, : A_\mu(x) A_\nu(y) \, : a_1^\dagger \, | 0 \rangle \,, \tag{8.16}$$

et il ne reste plus qu'à réduire la partie bosonique.

A ce propos, en s'aidant du développement de Fourier (8.12), on établit les formules de réduction

$$\begin{aligned}
A^{+}_{\mu}(x) a^{\dagger}(\mathbf{k}_{1}, \lambda_{1}) |0\rangle &= e_{\mu}(\mathbf{k}_{1}, \lambda_{1}) e^{-ik_{1}x} |0\rangle , \\
\langle 0| a(\mathbf{k}_{2}, \lambda_{2}) A^{-}_{\mu}(x) &= e_{\mu}(\mathbf{k}_{2}, \lambda_{2}) e^{ik_{2}x} \langle 0| .
\end{aligned}$$
(8.17)

On obtient alors pour l'élément de matrice résiduel

$$\langle 0| \ a_2 : A_{\mu}(x)A_{\nu}(y) : a_1^{\dagger} \ |0\rangle = \langle 0| \ a_2 \left[ A_{\mu}^-(x)A_{\nu}^+(y) + A_{\nu}^-(y)A_{\mu}^+(x) \right] a_1^{\dagger} \ |0\rangle$$
  
=  $e_{\mu}(2)e_{\nu}(1)e^{ik_2x}e^{-ik_1y} + e_{\nu}(2)e_{\mu}(1)e^{ik_2y}e^{-ik_1x}.$  (8.18)

On obtient alors pour l'amplitude de transition

$$S_{fi} = (-ie)^2 C_i C_f \iint d^4 x \, d^4 y \left[ e^{i(p_2 + k_2)x} e^{-i(p_1 + k_1)y} \bar{u}_2 \phi_2 \, iS_F(x - y) \, \phi_1 u_1 + e^{i(p_2 - k_1)x} e^{i(k_2 - p_1)y} \, \bar{u}_2 \phi_1 \, iS_F(x - y) \, \phi_2 u_1 \right].$$
(8.19)

Il ne nous reste plus qu'à utiliser le développement de Fourier du propagateur de Feynman,

$$iS_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \, e^{-iq(x-y)} \, iS_F(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \, e^{-iq(x-y)} \, \frac{i}{q(-m+i\epsilon)} \,. \tag{8.20}$$

Les intégrales sur x et y sont immédiates et nous aboutissons au résultat final

$$S_{fi} = C_i C_f (2\pi)^4 \,\delta^4 (p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \,\mathcal{M}_{fi} \,, \tag{8.21}$$

où l'élément de matrice  $\mathcal{M}_{fi}$  (que nous avons calculé pas à pas) s'écrit

## 8.3 Règles de Feynman

Les règles associées au calcul de l'élément de matrice précédent ont été établies par Feynman et permettent de dériver rapidement  $\mathcal{M}_{fi}$  à l'aide de diagrammes :

- Un électron initial (ou final) fait apparaître le spineur u(p,s) (ou  $\bar{u}(p,s)$ ).
- Un initial (ou final) fait apparaître le spineur  $\bar{v}(p,s)$  (ou v(p,s)).
- Un segment de ligne fermionique parcourue par l'impulsion q se décrit par le propagateur de Feynman

$$iS_F(q) = \frac{i}{\not(q-m+i\epsilon)} = \frac{i(\not(q+m))}{q^2 - m^2 + i\epsilon}.$$
 (8.23)

- Chaque vertex électromagnétique (point de contact entre une ligne de photon et deux lignes fermioniques) fait intervenir le terme  $(-ie\gamma^{\mu})$ .
- A chaque patte externe associée à un photon d'impulsion k et de polarisation  $\lambda$  est associé le quadri-vecteur  $e_{\mu}(k, \lambda)$ .
- Finalement, la ligne ondulée liant le vertex  $(-ie\gamma^{\mu})$  au vertex  $(-ie\gamma^{\nu})$  tout en transportant l'impulsion q conduit au propagateur électromagnétique

$$i\eta_{\mu\nu}G_F(q) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}.$$
(8.24)

## 8.4 Section efficace différentielle

En remarquant que

$$\mathcal{VT} = \int d^4x = (2\pi)^4 \delta^4(0),$$
 (8.25)

nous dérivons le taux de réaction (nombre de diffusions Compton-Thomson par unité de temps et par unité de volume) en fonction de la matrice de transition  $\mathcal{M}_{fi}$ ,

$$\frac{|\langle f|\mathcal{S}|i\rangle|^2}{\mathcal{VT}} = \mathcal{C}_i^2 \mathcal{C}_f^2 (2\pi)^4 \,\delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \left|\mathcal{M}_{fi}\right|^2.$$
(8.26)

Si l'on cherche maintenant à évaluer le taux de réaction en spécifiant les impulsions finales  $p_1$  et  $p_2$  à  $dp_1$  et  $dp_2$  près, on doit multiplier le résultat (??) par le nombre d'états de propagation correspondants. Ce facteur multiplicatif vaut

nombre d'états de propagation = 
$$\frac{\mathcal{V} \mathrm{d} \boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V} \mathrm{d} \boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^3}$$
, (8.27)

et un facteur  $\mathcal{V}^2$  disparaît dans le dénominateur du produit  $\mathcal{C}_i^2 \mathcal{C}_f^2.$ 

Le nombre d'événements par unité de volume et de temps dans lesquels l'état final est caractérisé

à d $p_2$  et d $k_2$  près est relié à la section efficace différentielle d $\sigma$  par

$$\frac{\left|\mathcal{S}_{fi}\right|^{2}}{\mathcal{VT}}\frac{\mathcal{V}\mathring{d}\boldsymbol{p}_{2}}{(2\pi)^{3}}\frac{\mathcal{V}\mathring{d}\boldsymbol{k}_{2}}{(2\pi)^{3}} = \mathrm{d}\sigma\left|\boldsymbol{v}_{1}-\boldsymbol{V}_{1}\right|n_{1}N_{1}, \qquad (8.28)$$

où les vitesses du photon et de l'électron incidents sont notées  $v_1$  et  $V_1$ . Dans la mesure où l'état initial ne contient qu'un seul photon et qu'un seul électron, les densités correspondants valent

$$n_1 = N_1 = \frac{1}{\mathcal{V}}.$$
 (8.29)

La section efficace différentielle se mets alors sous la forme

$$d\sigma = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}_1|} \frac{1}{2\epsilon_1} \frac{m}{E_1} d\tilde{k}_2 d\tilde{k}_2 (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + k_1 - p_2 - k_2) |\mathcal{M}_{fi}|^2.$$
(8.30)

Les relations (8.30) et (8.22) permettent de dériver la section efficace des réactions entre particules élémentaires. Le calcul complet de  $\sigma$  fait l'objet d'un autre cours.

## Exercices

## Problème 8.1

Démontrer les expressions des coéfficients de normalisation  $C_i$  and  $C_f$  données en (8.5).

### Problème 8.2

Démontrer les formules de réduction données en (8.17) en vous aidant du développement de Fourier (8.12).

## Problème 8.3

Établir l'expression donnée en (8.30) pour la section efficace différentielle.

## Chapitre 9

# Au delà de l'arbre : Calculs à boucles

Ce chapitre servira comme une introduction au calcul des diagrammes à une boucle, qui sont la première corrections par rapport au calcul dit "à l'arbre". Nous allons tout d'abord voir un exemple relativement simple en théorie scalaire, ce qui permettra d'aborder les notions de **régularisation** des **intégrales de boucles**, ainsi que la **renormalisation**.

## 9.1 Exemple d'un processus en théorie scalaire $\phi^3$

Nous allons nous placer dans une théorie scalaire simple. Le Lagrangien associé au champ $\phi$  est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda \phi^3 , \qquad (9.1)$$

où l'on reconnaît le Lagrangien libre discutée dans le Chapitre 3 ainsi qu'un terme d'interaction comprenant la paramètre réel  $\lambda$ . Nous allons par ailleurs nous intéresser au processus de diffusion

$$\phi\phi \longrightarrow \phi\phi. \tag{9.2}$$

L'amplitude associée, calculée à l'arbre, est donnée par

$$\mathcal{M}_0 = (-i\lambda)^2 \frac{i}{s-m^2} + (-i\lambda)^2 \frac{i}{t-m^2} + (-i\lambda)^2 \frac{i}{u-m^2}, \qquad (9.3)$$

où les impulsions  $p_s$ ,  $p_t$  et  $p_u$  correspondent aux impulsions transférées dans les canaux s, t et u. Les variables de **Mandelstam** sont données par :

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_s^2,$$
  

$$t = (p_a - p_1)^2 = (p_b - p_2)^2 = p_t^2,$$
  

$$u = (p_a - p_2)^2 = (p_b - p_1)^2 = p_u^2.$$
(9.4)

Au niveau d'une boucle, les diagrammes à calculer comprennent des boucles à deux points ("self-energies"), des boucles à trois points ("triangles") et des boucles à quatre points ("boxes"). Chaque boucle comprend une intégrale sur l'impulsion indéterminée dans la boucle. Nous allons par la suite nous intéresser particulièrement à ses intégrales.

Pour le processus en considération,  $\phi \phi \to \phi \phi$ , il y a environ 35 diagrammes au niveau d'une boucle, c.a.d. à l'ordre  $\lambda^4$  de la théorie de perturbation. Dans le but de l'illustration d'un tel calcul,

#### FIGURE 9.1 – Exemples de diagrammes à une boucle pour le processus $\phi \phi \rightarrow \phi \phi$ .

nous allons, dans un premier temps, nous focaliser sur les exemples de diagrammes donnés dans la Figure 9.1.

L'amplitude associé à ce diagramme s'écrit

$$\mathcal{M}_{2p} = (-i\lambda)^4 \frac{i}{p_s^2 - m^2} \frac{i}{p_s^2 - m^2} \int d^4q \, \frac{i}{\mathcal{D}_0} \, \frac{i}{\mathcal{D}_1} \,, \qquad (9.5)$$

$$\mathcal{M}_{3p} = (-i\lambda)^4 \frac{i}{p_s^2 - m^2} \int \mathrm{d}^4 q \, \frac{i}{\mathcal{D}_0} \, \frac{i}{\mathcal{D}_1} \frac{i}{\mathcal{D}_1} \,, \qquad (9.6)$$

$$\mathcal{M}_{4p} = (-i\lambda)^4 \int \mathrm{d}^4 q \, \frac{i}{\mathcal{D}_0} \, \frac{i}{\mathcal{D}_1} \frac{i}{\mathcal{D}_2} \frac{i}{\mathcal{D}_3} \,, \qquad (9.7)$$

l'intégration tenant compte du fait que l'impulsion des particules dans la boucle n'est pas déterminée. Les dénominateurs sont donnés par

$$\mathcal{D}_0 = q^2 - m^2, (9.8)$$

$$\mathcal{D}_1 = (q - p_s)^2 - m^2, \qquad (9.9)$$

$$\mathcal{D}_2 = (q - p_2)^2 - m^2, \qquad (9.10)$$

$$\mathcal{D}_3 = (q - p_3)^2 - m^2.$$
(9.11)

## 9.2 Divergences ultraviolette et régularisation

Une intégrale de boucle peut être convergente ou divergente selon sa structure exacte (fermions vs. bosons, nombre de propagateurs, structure des couplages, ...). On introduit le degré superficiel de divergence :

$$\delta = DL - 2B - F, \qquad (9.12)$$

où D est le nombre de dimensions spatio-temporelles, L est le nombre de boucles, B le nombre de propagateurs bosoniques, et F le nombre de propagateurs fermioniques. Pour une intégrale donnée, on conclut concernant sa convergence :

$$\delta > 0$$
: divergente  
 $\delta = 0$ : logarithmiquement divergente  
 $\delta < 0$ : convergente

En D = 4 dimensions, la première intégrale donnée en (9.7) est alors (logarithmiquement) divergente, tandis que les deux autres convergent. Nous allons, dans la suite, nous concentrer sur

l'intégrale divergente

$$I_2 = \int d^4q \, \frac{1}{\mathcal{D}_0 \, \mathcal{D}_1} = \int d^4q \, \frac{1}{q^2 - m^2} \, \frac{1}{(q - p)^2 - m^2} \,. \tag{9.13}$$

Une possibilité de régulariser la divergence, c.a.d. de rendre l'intégrale convergente, et de la calculer en  $D = 4 - 2\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) dimensions. En prenant la limite  $D \to 4$  ( $\epsilon \to 0$ ), la divergence se manifestera comme un pôle de la forme  $1/\epsilon$ . Nous verrons plus tard comment traiter cette divergence. Afin de préserver la dimension de l'intégrale, le passage en D dimensions se fait selon

$$\int dq^4 \longrightarrow \mu^{4-D} \int dq^D \,. \tag{9.14}$$

Le paramètre  $\mu$  porte la dimension d'une masse, est non-physique, et sera ultérieurement identifiée avec l'échelle de renormalisation.

## 9.3 Calcul explicite d'une intégrale de boucle

Nous allons commencer par l'exemple de l'intégrale donnée en (9.15). Pour des raisons de convention, nous ajustons le préfacteur. Par ailleurs, nous considérons le cas plus général avec deux masses  $m_0 \neq m_1$ ,

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \, \frac{1}{\mathcal{D}_0 \, \mathcal{D}_1} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \, \frac{1}{q^2 - m_0^2} \, \frac{1}{(q - p_1)^2 - m_1^2} \,. \tag{9.15}$$

Cet exemple nous permettra de voir la technique de calcul ainsi que de mettre en évidence la divergence contenue dans l'intégrale.

La première étape consiste à utiliser la parametrisation de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{\left[a(1-x)+bx\right]^2} \,. \tag{9.16}$$

En identifiant  $a = \mathcal{D}_0$  et  $b = \mathcal{D}_1$ , cela conduit à

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \int_0^1 dx \frac{1}{\left[(q^2 - m_0^2)(1 - x) + \left((q - p_1)^2 - m_1^2\right)x\right]^2} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{1}{\left[(q + xp_1)^2 - x^2p_1^2 + x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) - m_0^2 + i\epsilon\right]^2},$$
(9.17)

où les termes du dénominateur ont été regroupés en vue des étapes suivantes. Afin de simplifier le dénominateur, nous effectuons d'abord le changement de variables  $q \rightarrow q + xp_1$ , ce qui permets d'écrire

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int \mathrm{d}^D q \, \frac{1}{\left[q^2 - A^2 + i\epsilon\right]^2} \,, \tag{9.18}$$

avec

$$A^{2} = x^{2} p_{1}^{2} - x(p_{1}^{2} - m_{1}^{2} + m_{0}^{2}) + m_{0}^{2}.$$
(9.19)

Nous effectuons par la suite une rotation de Wick qui consiste en un changement de variable

d'intégration  $q \rightarrow q_E$ , défini par

$$q_0 \rightarrow i q_{E,0}$$
 et  $\vec{q} \rightarrow \vec{q}_E$ . (9.20)

En conséquence, nous obtenons

$$q^{2} = q_{0}^{2} - \vec{q}^{2} = -q_{E,0}^{2} - \vec{q}_{E}^{2} = -q_{E}^{2} \le 0, \qquad (9.21)$$

où le carré  $q_E^2$  a été calculé en utilisant la métrique Euclidienne au lieu de celle de Minkowski. L'intégrale devient alors

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int \mathrm{d}^D q_E \, \frac{i}{\left[q_E^2 - A^2 + i\epsilon\right]^2} \,. \tag{9.22}$$

En remarquant que l'intégrale présente maintenant une symétrique sphérique, nous passons en coordonnées sphériques,

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \int_0^1 dx \int d\Omega_D \int_0^\infty dq_E \frac{q_E^{D-1}}{\left[q_E^2 - A^2 + i\epsilon\right]^2}$$
(9.23)

où  $\Omega_D$  désigne l'angle solide en D dimensions. C'est angle solide peut s'exprimer comme

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}, \qquad (9.24)$$

avec la fonction Gamma d'Euler définie comme

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx \, x^{z-1} e^{-x} \,. \tag{9.25}$$

En utilisant en plus l'égalité

$$dq_E q_E^{D-1} = \frac{1}{2} dq_E^2 (q_E^2)^{D/2-1} \equiv \frac{1}{2} dy y^{D/2-1}, \qquad (9.26)$$

l'intégrale devient

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^1 dx \left[A^2 - i\epsilon\right]^{D/2-2} \int_0^1 dy (1-y)^{D/2-1} y^{2-D/2-1}$$
  
$$= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx \left[A^2 - i\epsilon\right]^{D/2-2}$$
  
$$= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 dx \left[A^2 - i\epsilon\right]^{D/2-2}.$$
 (9.27)

Le dernier terme (intégrale sur y) a été identifié à la fonction Beta d'Euler,

$$B(x,y) = \int dt \, t^{x-1} \, (1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
(9.28)

En se rappelant que  $D = 4 - 2\epsilon$ , on obtient finalement l'intégrale

$$I_{2p} = (4\pi)^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1+\epsilon) \mu^{2\epsilon} \int_0^1 \mathrm{d}x \left[A^2 - i\epsilon\right]^{-\epsilon} .$$
(9.29)

Inspiré par la limite  $D \to 4$  ( $\epsilon \to 0$ ), nous effectuons les développements limités

$$(4\pi)^{\epsilon} \Gamma(1+\epsilon) \simeq 1 - \gamma_E + \ln(4\pi), \qquad (9.30)$$

$$\left[A^2 - i\epsilon\right]^{-\epsilon} \mu^{2\epsilon} \simeq 1 - \epsilon \ln \frac{A^2 - i\epsilon}{\mu^2}, \qquad (9.31)$$

où  $\gamma_E = -\Gamma'(1) \approx 0.557...$  est la constante d'Euler-Mascheroni.

Dans la limite  $\epsilon \to 0$ , l'intégrale peut alors s'écrire

$$I_{2p} = \Delta_{\epsilon} - \int_0^1 \mathrm{d}x \, \ln\left(\frac{A^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right)^2, \qquad (9.32)$$

Le premier terme contient la divergence ultraviolette,

$$\Delta_{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi), \qquad (9.33)$$

tandis que l'intégrale restante sur x est convergente. Les informations relatives aux processus que l'on considère (impulsion  $p_1$ , masses  $m_0$  et  $m_1$ ) sont compris dans le terme  $A^2$  défini en (9.19).

L'intégrale convergente sur x peut se calculer en fonction de l'impulsion  $p_1$  et des masses  $m_0$  et  $m_1$ . Nous donnons ici deux exemples de cas particuliers,

$$I_{2p}(0, m_0, m_1) = \Delta_{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2}, \qquad (9.34)$$

$$I_{2p}(p_1, 0, 0) = \Delta_{\epsilon} + 2 - \ln \frac{-p_1^2}{\mu^2}.$$
(9.35)

L'intégrale correspondant au cas général valable pour  $p_1^2 \neq 0$  et  $m_1^2 \neq m_2^2$  est plus compliqué d'exprimer analytiquement, mais peut sans difficulté être évaluée numériquement.

On remarque que chaque intégrale dépend du paramètre  $\mu$ , introduit lors de la régularisation dimensionnelle. Ce paramètre est non-physique, sa valeur numérique ne peut alors pas être lié directement au processus en question. Dans la pratique, il convient de choisir une valeur proche de l'échelle du processus ( $\mu^2 \sim s$ ) ou proche d'une masse ayant un rôle important dans le processus ( $\mu^2 = m^2$ , p.ex. dans le cas d'une désintégration).

Un résultat calculé à ordre fixe (p.ex. à une boucle) dépendra dans la plupart des cas de ce paramètre non-physique, identifié avec l'échelle de renormalisation. La dépendance d'un résultat à ce paramètre est d'ordre supérieur : la variation de la section efficace à une boucle pour différentes valeurs de  $\mu$  sera comparable à la correction due aux diagrammes à deux boucles. Dans cet esprit, une variation de l'échelle de renormalisation dans un calcul peut permettre d'estimer l'incertitude théorique associé à ce résultat. Finalement, la dépendance à l'échelle de renormalisation disparaîtrait si on pourrait inclure tous les ordres dans la théorie de perturbations.

Un calcul similaire permet de calculer les intégrales à un, à trois, ou à quatre propagateurs. Après une paramétrisation de Feynman adaptée ainsi que la rotation de Wick, on arrive toujours à exprimer une éventuelle singularité comme indiqué en (9.33). La partie convergente peut contenir des fonctions plus compliquées comme p.ex. des poly-logarithmes. Dans la pratique, il existe des bibliothèques numériques pour calculer ses intégrales.

#### 9.4 Renormalisation

La présence d'une divergence dans le résultat précédent suggère que ne correspond pas à une observable physique. En conséquence, on conclut que le paramètres du Lagrangien (ici :  $\phi$ ,  $m^2$ ,  $\lambda$ ) ne sont bas les "bons" paramètres physiques. Le concept de **renormalisation** a pour but de rendre les résultats convergents en redéfinissant les paramètres du Lagrangien.

Tout d'abord, le Lagrangien donné en (9.1) est interprété comme le Lagrangien non-renormalisé,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \lambda_0 \phi_0^3, \qquad (9.36)$$

l'index "0" indiquant qu'il s'agit d'une quantité "nue" ou non-renormalisée. La renormalisation consiste à redéfinir le champ  $\phi$  selon

$$\phi_0 \rightarrow Z\phi_r , \qquad (9.37)$$

l'index "r" indiquant maintenant qu'il s'agit d'une quantité renormalisée. Le Lagrangien devient alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z^2 (\partial \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 Z^2 \phi_0^2 - \lambda_0 Z^3 \phi_0^3.$$
(9.38)

Afin d'éliminer les paramètres "nus" toujours présents, on défini les constantes de renormalisation,

$$\delta Z_{\phi} = Z^2 - 1 \qquad \delta Z_m = m_0^2 Z^2 - 1 \qquad \delta Z_{\lambda} = \lambda_0 Z^3 - 1.$$
(9.39)

Le Lagrangien peut alors se récrire comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_r^2 - \lambda \phi_r^3 + \frac{1}{2} \delta Z_{\phi} (\partial \phi_r)^2 - \frac{1}{2} \delta Z_m \phi_r^2 - \delta Z_\lambda \phi_r^3, \qquad (9.40)$$

où l'on reconnaît dans la première partie le Lagrangien donné en (9.1) exprimé en faisant appel au champ renormalisé  $\phi_r$  ainsi qu'aux paramètres physiques  $m^2$  et  $\lambda$ . La deuxième partie du Lagrangien (9.40) contient les "contre-termes" exprimés en fonction des constantes de renormalisation  $\delta Z_{\phi}$ ,  $\delta Z_m$  et  $\delta Z_{\lambda}$ , associé respectivement au champ, à la masse carrée et au couplage. Ces constantes de renormalisation peuvent être déterminées en imposant des **conditions de renormalisation** telles qu'elles annulent les divergences ultraviolettes. Un choix donné de telles conditions définit un **schéma de renormalisation**.

Le schéma de renormalisation le plus simple est celui de "Minimal Subtraction" (MS) où le contreterme ne contient que le pôle  $1/\epsilon$ . Dans la pratique, on utilise souvent le schéma "Modified Minimal Subtraction" ( $\overline{\text{MS}}$ ) où le contreterme est constitué de  $\Delta_{\epsilon} = 1/\epsilon - \gamma_E + \ln 4\pi$ . D'autres schéma consistent en une définition des paramètres renormalisés à l'aide d'observables physiques, p.ex. la masse physique (schéma "**on-shell**") d'une particule ou une largeur de désintégration.

La prédiction d'une quantité observable dépends en général du schéma choisi. La différence entre deux schémas de renormalisation est d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations (comme la dépendance à l'échelle de renormalisation  $\mu$  discutée auparavant). Si l'on tenait compte de tous les ordres de perturbation, la dépendance du schéma disparaîtrait.
Afin de donner un exemple, revenons à la boucle calculée dans la Section 9.3. La contribution à une boucle à la masse peut s'écrire

$$-iM^{2}(p^{2}) = (-i\lambda)^{2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_{E} + \ln 4\pi + I_{2p}^{\text{fin}}(p^{2}, m^{2}, \mu^{2}) \right] + i \left( p^{2} \delta Z_{\phi} + \delta Z_{m} \right), \qquad (9.41)$$

où  $I_{2p}^{\text{fin}}$  désigne la partie convergente donnée en (9.32). Dans les schémas MS ou  $\overline{\text{MS}}$ , les constantes de renormalisation sont données par

$$\delta Z_m = \lambda^2 \frac{1}{\epsilon}$$
 et  $\delta Z_m = \lambda^2 \Delta_\epsilon = \lambda^2 \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right]$ . (9.42)

Une autre façon de définir le contre-terme est d'exiger que la masse renormalisée correspond à la masse physique, c.a.d. au pôle du propagateur de Feynman. On impose alors que  $m^2$  est le pôle du propagateur et que le résidu du propagateur soit égal à i, ce qui conduit à

$$M^2(p^2 = m^2) = 0$$
 et  $\frac{\partial M^2}{\partial p^2}(p^2 = m^2) = 0.$  (9.43)

Dans notre exemple, la constante de renormalisation s'exprime alors comme

$$\delta Z_m = \lambda^2 \Delta_\epsilon + \text{fin.}, \qquad (9.44)$$

où le dernier terme est convergent, mais potentiellement difficile à exprimer analytiquement.

Nous terminons la discussion en remarquant que tous les schémas de renormalisation permettent d'annuler les divergences ultraviolettes. La différence entre deux schémas ne contient que des termes convergents qui sont d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations.

## 9.5 Corrections réelles et divergences infrarouges

Dans le cas du processus  $\phi \phi \rightarrow \phi \phi$  discuté dans le cadre de la théorie  $\phi^3$ , en plus des corrections à boucles dont l'interférence avec les diagrammes à l'arbre contribue à l'ordre suivant en théorie des perturbations, d'autres diagrammes contribuent au même ordre : les diagrammes à émission réelles. Dans un calcul complet à ordre fixe (p.ex. à une boucle) il faut alors tenir compte de ces diagrammes afin d'avoir un résultat cohérent.

Ces diagrammes d'émission réelle peuvent contenir des divergences si la particule émise est sans masse. Ces divergences peuvent être causées par une énergie tendant vers zéro de cette particule (divergence "soft") et/ou une particule sans masse qui devient collinéaire avec une autre particule externe du processus (divergence collinéaire). Physiquement, une telle situation est confondue avec le processus sans émission réelle de la particule sans masse. Cette dégénérescence physique se manifeste mathématiquement comme une singularité dans les amplitudes correspondantes.

La structure des amplitudes carrées pour les processus d'émission réelles est liée à celle des interférence entre diagrammes à boucle et les diagrammes à l'arbre. De ce fait, les mêmes singularités soft et collinéaires se retrouvent également dans les intégrales de boucles.

Selon le théorème de **Kinoshita–Lee–Nauenberg** ces **singularités infrarouges** s'annulent entre eux si l'on tient compte de tous les diagrammes contribuant au même ordre de manière consistante. La difficulté technique réside dans le traitement des pôles associés, car ils apparaissent séparément dans la partie interférence boucle-arbre ainsi que la partie émission réelle. Diverses techniques existent pour le calcul (numérique), dont la technique du "**phase-space slicing**" (introduction d'un cut-off sur l'énergie de la particule émise) ou la technique de "**dipole subtraction**" (méthode numérique pour combiner les deux éléments de matrices). Ces techniques ne seront pas discutées dans le cadre de ce cours.

## Exercices

#### Problème 9.1

Démontrer l'égalité donnée en (9.16). Établir ensuite que l'intégrale donnée en (9.15) peut s'écrire comme proposée dans la deuxième ligne de (9.17).

#### Problème 9.2

En partant de la définition (9.25) de la fonction Gamma, montrer successivement que

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \text{ (pour } n \in \mathbb{N}). \tag{9.45}$$

Bonus : Démontrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \,. \tag{9.46}$$

#### Problème 9.3

Démontrer l'égalité donnée en (9.26). Établir ensuite que l'intégrale  $I_{2p}$  prend la forme donnée en (9.27).

#### Problème 9.4

On rappelle que le Lagrangien d'interaction de l'électrodynamique quantique (QED) est donné par

$$\mathcal{L} \supset -e \,\psi \gamma^{\mu} \bar{\psi} \,A_{\mu} \,, \tag{9.47}$$

où  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  correspondent à l'électron et positron, et  $A_{\mu}$  au photon. On s'intéressera au processus

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-. \tag{9.48}$$

Trouver les diagrammes de Feynman correspondant à ce processus à l'arbre, puis à une boucle, et finalement l'émission réelle. Déterminer quelles intégrales sont divergentes dans l'ultraviolet. Identifier enfin les associations entre émission réelle et interférences arbre-boucle concernant la structure infrarouge.

# Chapitre 10

# Théories de jauge

Ce chapitre est une introduction aux théories de jauge non-abéliennes. Nous commencerons par la notion de la dérivée covariante, puis analyserons les propriétés essentielles de l'électromagnétisme afin de les généraliser à une théorie s'appuyant sur un groupe non-abélien.

## 10.1 La dérivée covariante en électromagnétisme

La notion de dérivée covariante apparaît déjà en mécanique classique dans l'étude d'une particle M de masse m plongée dans un champ électromagnétique dont le potentiel vecteur est  $A^{\mu}$  (avec  $A^0 = \Phi$  et  $A^i = \mathbf{A}$ ). Au Lagrangien  $L_0 = T$  de la particule libre, il convient de soustraire une énergie potentielle V dépendant de la position  $\mathbf{x}$  et de la vitesse  $\mathbf{v}$  de la particule M. Le Lagrangien se met sous la forme

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - q(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{A}), \qquad (10.1)$$

avec  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ . Puisque l'énergie potentielle V dépend de la vitesse, le moment conjugué de  $x^i$  n'est plus l'impulsion  $mx^i$ , mais l'impulsion généralisée

$$p^{i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i}} = \frac{\partial L}{\partial v^{i}} = m\dot{x}^{i} + qA^{i}.$$
(10.2)

La quantité de mouvement m v est donc remplacée par

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}. \tag{10.3}$$

Le Hamiltonien associé est défini par H = pv - L, ce qui conduit à

$$H = \frac{1}{2}mv^{2} + q\Phi = \frac{1}{2m}(p - qA)^{2} + q\Phi.$$
(10.4)

Le Hamiltonien est donc bien égal à l'énergie mécanique totale de la particule, c'est-à-dire à la somme de l'énergie cinétique  $mv^2/2$  et de l'énergie potentielle électrique  $q\Phi$ .

Le champ magnétique B exerce toujours une force perpendiculaire à la trajectoire. Ne travaillant pas, il n'apparaît pas dans le relation donnant le Hamiltonien. Le passage à la mécanique ondulatoire est alors immédiat. Il convient de substituer à l'impulsion généralisée p l'opérateur  $-i\hbar \nabla$ , alors que le Hamiltonien H devient  $i\hbar\partial/\partial t$ . L'équation de Schrödinger régissant le comportement de la fonction d'onde  $\psi$  qui décrit maintenant la particule M s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\Phi\right]\psi.$$
 (10.5)

En prenant  $\hbar = 1$ , nous concluons que l'effet du champ électromagnétique sur la particule Mest pris en compte via le potentiel vecteur en remplaçant les dérivées temporelles  $\partial_t$  et spatiale  $\nabla$ par

$$D_t = \partial_t + iq\Phi$$
 et  $D_i = \partial_i - iqA^i$ . (10.6)

La dérivée covariante  $D_{\mu}$  vient de faire son apparition. Elle est définie par

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqA^{\mu}. \tag{10.7}$$

Elle est formellement identique à la dérivée covariante de la relativité générale qui, appliquée au vecteur  $V^{\nu}$ , se met sous la forme

$$D_{\mu}V^{\nu} = V^{\nu}_{;\mu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{nu}_{\mu\alpha}V^{\alpha}.$$
 (10.8)

Le symbole de Christoffel  $\Gamma^{nu}_{\mu\alpha}$  y est défini en fonction du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  par

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right].$$
(10.9)

Les relations (10.7) et (10.9) sont formellement identiques. Le potentiel vecteur  $A_{\mu}$  peut être interprété comme une connexion affine et joue le même rôle que le symbole de Christoffel. Le cadre commun aux théories de jauge et à la relativité générale est fourni par la théorie des fibrés.

La généralisation de l'étude précédente au cas relativiste est tout d'abord fournie par le Lagrangien standard

$$L = -mc^{2}\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} - q(\Phi - vA). \qquad (10.10)$$

Les variables canoniques sont toujours les coordonnées  $x^{\mu}$  de la particule M et la variable temporelle qui intervient dans les équations d'Euler-Lagrange est dans la définition de l'action est le temps  $t = x^0$ . On montre que le moment conjugué à la variable  $x^i$  est égal à

$$p^{i} = \frac{mv^{i}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} + qA^{i}.$$
(10.11)

Les équations d'Euler-Lagrange se ramènent alors à la relation fondamentale de la dynamique exprimant l'action sur la particule M de la force de Lorentz,

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \qquad (10.12)$$

Le Lagrangien (1.27) du chapitre de révision permet une approche complètement relativiste dans laquelle les variables canoniques sont désormais les **quatre** coordonnées spatio-temporelles  $x^{\mu}$  alors que le rôle du temps est maintenant tenu par temps propre  $\tau$  où tout paramètre p qui lui est proportionnel. Comme il est démontré ci-dessous, le bon Lagrangien permettant de passer de la mécanique classique relativiste à la mécanique quantique est l'opposé de (1.27) avec

$$\mathcal{L} = -\frac{m}{2}U_{\mu}U^{\mu} - qU_{\mu}A^{\mu}. \qquad (10.13)$$

Le moment conjugué de la variable canonique  $x^{\mu}$  est l'impulsion généralisée

$$\Pi_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^{\mu}} = -mU_{\mu} - qA_{\mu}. \qquad (10.14)$$

La quantification canonique permet le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique en remplaçant le crochet de Poisson des deux fonctions  $\mathcal{A}(q_i, p_i, t)$  et  $\mathcal{B}(q_i, p_i, t)$  par le commutateur des opérateurs quantiques A et B correspondants selon la règle

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [A, B].$$
 (10.15)

On en déduit que les opérateurs quantiques  $\Pi_{\mu}$  et  $x^{\nu}$  associés à l'impulsion généralisée et à la position vérifient les relations de commutation

$$\left[\Pi_{\mu}, x^{\nu}\right] = -i\hbar\delta_{\mu}^{nu} = -i\hbar\eta_{\mu}^{\nu}.$$
 (10.16)

Une réalisation possible de la relation précédente consiste à considérer que  $x^{\nu}$  revient à la multiplication de la fonction d'onde  $\psi$  par la position  $x^{\nu}$  alors que l'opérateur  $\Pi_{\mu}$  appliqué à  $\psi$  est défini par la dérivée  $-i\hbar\partial_{\mu}\psi$ . On en déduit qu'en présence du potentiel vecteur  $A_{\mu}$ , l'opérateur quantique  $mU_{\mu}$  est équivalent à

$$mU_{\mu} = i\hbar\partial_{\mu} - qA_{\mu}, \qquad (10.17)$$

et que par conséquent, dans l'équation de Schrödinger décrivant le comportement de la fonction d'onde  $\psi$ , l'effet des interactions électromagnétiques revient à remplacer la dérivée partielle  $\partial_{\mu}$  par la dérivée covariante

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + i \frac{q}{\hbar} A_{\mu} . \qquad (10.18)$$

En présence d'une interaction électromagnétique, le Lagrangien de Dirac (6.7) devient

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[ i \vec{D} - m \right] \psi \,. \tag{10.19}$$

En utilisant la définition (10.7),  $\mathcal{L}$  apparaît comme la somme du Lagrangien  $\mathcal{L}_0$  de la particule libre et du Lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}_{int}$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \left[ i \vec{\partial} - m \right] \psi - q \bar{\psi} A \psi.$$
(10.20)

### 10.2 Quelques leçons de l'électromagnétisme

Dénotons par  $\psi$  un champ complexe. Il peut s'agir d'un champ scalaire chargé  $\phi$  ou encore de la composante  $\psi_{\alpha}$  d'un champ de Dirac. Nous avons déjà défini la manière dont le groupe U(1) agit sur  $\psi$  via la rotation complexe

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-iq\theta}\psi.$$
(10.21)

L'angle de rotation  $\theta$  est multiplié par la charge q que porte la particule décrite par  $\psi$ . Une transformation de jauge est de **première espèce** ou **globale** si  $\theta$  est indépendant de la position. Dans ce cas, la dérivée  $\partial_{\mu}\psi$  se transforme comme  $\psi$  avec

$$\partial_{\mu}\psi \longrightarrow \partial_{\mu}\psi' = e^{-iq\theta}\partial_{\mu}\psi.$$
 (10.22)

Il n'en va pas de même lorsque  $\theta$  dépend de la position x dans l'espace-temps. Dans ce cas, la transformation de jauge est dite de **seconde espèce** ou **locale**. La dérivée  $\partial_{\mu}\psi$  se transforme alors selon

$$\partial_{\mu}\psi' = e^{-iq\theta}\partial_{\mu}\psi - iq(\partial_{\mu}\theta)\psi' \neq e^{-iq\theta}\partial_{\mu}\psi.$$
(10.23)

Comme en relativité générale, on introduit la dérivée covariante  $D_{\mu}$  en exigeant que  $D_{\mu}\psi$  se transforme comme le champ  $\psi$  lui-même, et ce en toute généralité, donc lorsque  $\theta$  dépend de x

$$D_{\mu}\psi \longrightarrow D'_{\mu}\psi' = e^{-iq\theta}D_{\mu}\psi.$$
 (10.24)

Le potentiel vecteur  $A_{\mu}$  qui entre dans la définition (10.7) de  $D_{\mu}$  doit alors se transformer en  $'_{\mu}$  tel que

$$D'_{\mu}\psi' = \left(\partial_{\mu} + iqA'_{\mu}\right)\psi' = e^{-iq\theta}D_{\mu}\psi = e^{-iq\theta}\left(\partial_{\mu} + iqA'_{\mu}\right)\psi.$$
(10.25)

On en déduit que

$$A_{\mu} \longrightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\theta. \qquad (10.26)$$

En relativité générale, la courbure est décrite par le tenseur de Riemann-Christoffel  $R^{\beta}_{\alpha\mu\nu}$  défini à partir du commutateur des dérivées covariantes  $D_{\mu}$  et  $D_{\nu}$  avec

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V_{\alpha} = V_{\beta}R^{\beta}_{\alpha\mu\nu}. \qquad (10.27)$$

La courbure électromagnétique est définie de même. L'équivalent électromagnétique de la relation précédente se met sous la forme

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\psi = iqF_{\mu\nu}\psi, \qquad (10.28)$$

où le tenseur de courbure n'est autre que le champ électromagnétique

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial\nu A_{\mu} \,. \tag{10.29}$$

Nous retrouvons alors la définition donnée en chapitre 5.

#### 10.3 Introduction aux théories de jauge non-abéliennes

Une théorie de jauge non-abélienne est construite à partir du groupe de Lie non-commutatif  $\mathcal{G}$ dont l'algèbre  $\mathcal{A}$  de dimension D est constituée de vecteurs

$$\boldsymbol{X} = \sum_{a=1}^{D} \theta^{a} \boldsymbol{X}_{a} = \theta^{a} \boldsymbol{X}_{a}.$$
(10.30)

#### 10.3.1 Action du groupe de jauge sur le multiplet $\psi$

Le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  agit sur l'espace vectoriel V de dimension n construit sur le corps des réels  $\mathbb{R}$  ou des complexes  $\mathbb{C}$ . Les D vecteurs de base  $\mathbf{X}_a$  de l'algèbre  $\mathcal{A}$  y sont représentés par les matices  $n \times n A_a$ . Tout élément  $g = \exp(\mathbf{X})$  du groupe  $\mathcal{G}$  est représenté dans V par l'automorphisme  $\rho_g$  dont la matrice est égale à

$$\left[\rho_g\right] = \left[\exp\left(g\theta^a A_a\right)\right] = \left[\exp\left(-ig\theta^a T_a\right)\right], \qquad (10.31)$$

où les générateurs  $T_a$  remplacent  $iA_a$ . Le rôle du champ complexe  $\psi$  précédent est maintenant tenu par les n champs réels ou complexes  $\psi_i$  qui constituent les composantes du vecteur  $\psi$  appartenant à la représentation V réelle ou complexe. La transformation de jauge (10.21) se généralise en

$$\psi_i \longrightarrow \psi'_i = \left[\exp\left(-ig\theta^a T_a\right)\right]_{ij}\psi_j,$$
(10.32)

où g est la constante de couplage associé au groupe de jauge  $\mathcal{G}$  et correspond à la charge q en électromagnétisme. Les coordonnées  $\theta^a$  du vecteur X de l'algèbre  $\mathcal{A}$  généralisent l'angle  $\theta$  et dépendent de la position x dans le cas d'une transformation locale. Les indices i et j varient de 1 à n puisque le vecteur  $\psi$  vit dans la représentation V de dimension n. Une écriture plus compacte de la relation précédente est

$$\psi \longrightarrow \psi' = \mathcal{R}_{\theta}\psi = e^{-q\theta}\psi,$$
 (10.33)

dans laquelle  $\boldsymbol{\theta}$  désigne la somme  $\theta^a T_a$  et représente dans V le vecteur  $\boldsymbol{X}$  à un facteur i près. Le groupe  $\mathcal{G}$  est non-abélien dans la mesure où les générateurs  $T_a$  entretiennent les relations de commutation

$$\left[T_a, T_b\right] = iC_{ab}^c T_c \,, \tag{10.34}$$

où apparaissent les constantes de structure réelles  $C_{ab}^c$ .

#### **10.3.2** Dérivée covariante $D_{\mu}$ et potentiel vecteur $A_{\mu}$

La dérivée covariante (10.7) est définie désormais à l'aide des D potentiels vecteurs  $A^a_\mu$  par la matrice  $n \times n$  agissant dans V

$$\left[D_{\mu}\right]_{ij} = \partial_{\mu} \mathbb{I}_{ij} + ig A^a_{\mu} \left[T_a\right]_{ij}.$$

$$(10.35)$$

Cette expression se met sous la forme plus compacte

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ig \boldsymbol{A}_{\mu} \,, \tag{10.36}$$

où  $A_{\mu}$  dénote la somme  $A^a_{\mu}T_a$  portant sur les matrices  $T_a$  avec comme coefficients les D potentiels vecteurs  $A^a_{\mu}$ . La ième composante du vecteur  $D_{\mu}\psi$  est donc égale à

$$\left[D_{\mu}\psi\right]_{i} = \partial_{\mu}\psi_{i} + igA_{\mu}^{a}\left[T_{a}\right]_{ij}\psi_{j} = \partial_{\mu}\psi_{i} + ig\left[\boldsymbol{A}_{\mu}\right]_{ij}\psi_{j}.$$

$$(10.37)$$

La dérivée covariante  $D_{\mu}\psi$  se transforme sous l'effet de la transformation de jauge  $\mathcal{R}_{\theta}$  comme le vecteur  $\psi$ ,

$$D_{\mu}\psi \longrightarrow D_{\mu}\psi' = \mathcal{R}_{\theta}D_{\mu}\psi = e^{-ig\theta}D_{\mu}\psi.$$
 (10.38)

#### 10.3.3 Le champ de jauge $F_{\mu\nu}$ et ses propriétés

Dans le cas d'une théorie de jauge non-abélienne construite sur le groupe de Lie  $\mathcal{G}$ , le champ électromagnétique  $F_{\mu\nu}$  est remplacé par les D champs de jauge  $F^a_{\mu\nu}$  constituant les composantes du vecteur  $\mathbf{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a$  de l'algèbre  $\mathcal{A}$  (à un facteur i près, puisque les vecteurs de base de  $\mathcal{A}$  sont les matrices  $n \times n A_a = -iT_a$ ). En s'inspirant de la relation (10.28), le vecteur champ de force  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ est défini par

$$\left[D_{\mu}, D_{\nu}\right]\psi = ig \boldsymbol{F}_{\mu\nu}\psi = ig F^{a}_{\mu\nu}T_{a}\psi. \qquad (10.39)$$

La relation (10.29) de l'électromagnétisme se généralise dans le cas du groupe de jauge non-abélien  $\mathcal{G}$  en

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} - gC^{a}_{bc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}.$$
(10.40)

Les D champs  $F^a_{\mu\nu}$  contiennent en sus des dérivées déjà présentes en électromagnétisme un produit quadratique des potentiels vecteurs. Dans le cas de SU(2), le champ de jauge est défini par

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu} - \partial_{\nu}\boldsymbol{W}_{\mu} - g\boldsymbol{W}_{\mu} \times \boldsymbol{W}_{\nu}. \qquad (10.41)$$

Sous l'effet de la transformation de jauge caractérisée par la matrice  $\mathcal{R}_{\theta}$ , le vecteur  $\psi$  et sa dérivée covariante  $D_{\mu}\psi$  se transforment de manière identique selon

$$D'_{\mu}\psi' = \mathcal{R}_{\theta} D_{\mu}\psi = \mathcal{R}_{\theta} D_{\mu} \mathcal{R}_{\theta}^{-1}\psi'. \qquad (10.42)$$

Puisque l'égalité précédente est vérifiée pour tout vecteur  $\psi'$  de la représentation V, on en déduit

$$D'_{\mu} = \mathcal{R}_{\theta} D_{\mu} \mathcal{R}_{\theta}^{-1}.$$
(10.43)

Le commutateur  $[D_{\mu}, D_{\nu}]$  se transforme de manière similaire et, en vertu de la relation (10.39), il en va de même pour le champ  $F_{\mu\nu}$  avec

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\theta} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathcal{R}_{\theta}^{-1}.$$
 (10.44)

Au premier ordre, la transformation de jauge se développe comme

$$\mathcal{R}_{\theta} = e^{-iq\theta} = \mathbb{I} - ig\theta = \mathbb{I} - ig\theta^{a}T_{a}.$$
(10.45)

On en déduit que le champs de force  $F^a_{\mu\nu}$  varient de

$$\delta F^a_{\mu\nu} = g C^a_{bc} \theta^b F^c_{\mu\nu} \,. \tag{10.46}$$

L'utilisation de l'antisymétrie des constantes  $C^a_{ab}$  vis-à-vis des indices a et b permet d'établir pour le cas de SU(2) que

$$\delta \boldsymbol{F}_{\mu\nu} = g\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \,. \tag{10.47}$$

Dans le cas de SU(2), le vecteur  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  se comporte donc exactement comme un vecteur  $\mathbf{x}$  de l'espace physique usuel  $\mathbb{R}^3$  subissant la rotation  $g\boldsymbol{\theta}$ . Ce n'est pas étonnant, car avec ses trois composantes,  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  a été construit comme un vecteur de l'algèbre de SU(2). Or, si celle-ci engendre par exponentiation le groupe  $\mathcal{G}$ , elle peut également se concevoir comme une représentation particulière

de  ${\mathcal G}$  appelée la repésentation adjointe. Cette propriété est en fait générale.

Par définition, la **représentation adjointe** d'un groupe de Lie  $\mathcal{G}$  est son algèbre  $\mathcal{A}$  considérée pour l'occasion comme un espace vectoriel V de représentation parmi d'autres. L'algèbre  $\mathcal{A}$  agit sur la représentation adjointe via les matrices  $D \times D A_a$  dont les éléments sont donnés par

$$[A_a]_j^k = -i[T_a]_j^k = C_{aj}^k.$$
(10.48)

Cette définition des matrices  $T_a$  de l'adjointe est cohérente. En effet, on peut d'abord démontrer que les trois matrices quelconques A, B et C vérifient la relation

$$[A, big[B, C]] + [C, big[A, B]] + [B, big[C, A]] = 0/$$
(10.49)

En s'aidant de (10.34), on en déduit que

$$C^n_{am}C^m_{bc} + C^n_{cm}C^m_{ab} + C^n_{bm}C^m_{ac} = 0, \qquad (10.50)$$

ce qui s'interprète comme le produit

$$\left[T_{a}T_{b}\right]_{c}^{n} - \left[T_{b}T_{a}\right]_{c}^{n} = iC_{ab}^{m}\left[T_{m}\right]_{c}^{n}, \qquad (10.51)$$

où les matrices  $T_a$  sont définies par (10.48). Ces matrices  $D \times D$  vérifient donc les relations de structure (10.34) et représentent bien l'algèbre  $\mathcal{A}$  dans l'adjointe.

Lors d'une transformation de jauge infinitésimale, donc caractérisée par les D angles  $\theta^a$  très petits devant 1, les champs de force  $F^n_{\mu\nu}$  varient selon la prescription (10.46) et deviennent

$$F'^{n}_{\mu\nu} = F^{n}_{\mu\nu} + gC^{n}_{am}\theta^{a}F^{m}_{\mu\nu}.$$
(10.52)

Les constantes structures qui apparaissent se réinterprètent comme des éléments de matrices  $T_a$  de l'adjointe avec

$$F'^{\,n}_{\,\mu\nu} = F^{\,n}_{\mu\nu} - ig\theta^a \big[T_a\big]^n_{\,m} F^{\,m}_{\mu\nu} \,. \tag{10.53}$$

Nous voyons apparaître la matrice de rotation infinitésimale

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}} \ = \ \mathbb{I} - ig\theta^a T_a \,, \tag{10.54}$$

dont les éléments s'écrivent

$$\left[\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}\right] = \delta_m^n - ig\theta^a \left[T_a\right]_m^n.$$
(10.55)

La matrice  $\mathcal{R}_{\theta}$  agit sur le vecteur  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  de l'adjointe dont les D composantes  $F^a_{\mu\nu} = \psi_i$  se comportent comme celles du multiplet  $\psi$  d'une représentation quelconque.

La **métrique** du groupe  $\mathcal{G}$  est définie à partir des générateurs  $T_a$  de la représentation adjointe par la relation

$$g_{ab} = \operatorname{Tr}\{T_a T_b\}. \tag{10.56}$$

En s'aidant des relations précédentes, cette identité prend la forme

$$g_{ab} = -C_{am}^n C_{bn}^m . (10.57)$$

Pour les groupes simples et compacts, il existe toujours une base de l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  dans laquelle la métrique se réduit à l'identité à un facteur multiplicatif près,

$$g_{ab} = \kappa \,\delta_{ab} \,. \tag{10.58}$$

Nous sommes prêts désormais à généraliser le Lagrangien (5.16) de l'électromagnétisme classique à une théorie de jauge non-abélienne. Le Lagrangien des champs de jauge est en effet défini par

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4\kappa} \operatorname{Tr} \{ \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \boldsymbol{F}^{\mu\nu} \} = -\frac{1}{4\kappa} \operatorname{Tr} \{ T_a T_b \} F^a_{\mu\nu} F^{b\,\mu\nu} .$$
(10.59)

Les matrices  $T_a$  étant celles de la représentation adjointe, le Lagrangien se simplifie en

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4\kappa} g_{ab} F^{a}_{\mu\nu} F^{b\,\mu\nu} = -\frac{1}{4} F^{a}_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,. \qquad (10.60)$$

La rotation de jauge  $\mathcal{R}_{\theta}$  transforme le vecteur  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  et  $\mathbf{F}'_{\mu\nu}$  selon la règle (10.52). On en déduit que le Lagrangien est invariant de jauge. Dans le cas de SU(2), il se met sous la forme

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = \frac{1}{4} \left[ \partial_{\mu} \boldsymbol{W}_{\nu} - \partial_{\nu} \boldsymbol{W}_{\mu} - g \, \boldsymbol{W}_{\mu} \times \boldsymbol{W}_{\nu} \right] \left[ \partial^{\mu} \boldsymbol{W}^{\nu} - \partial^{\nu} \boldsymbol{W}^{\mu} - g \, \boldsymbol{W}^{\mu} \times \boldsymbol{W}^{\nu} \right].$$
(10.61)

Ce Lagrangien contient des produits impliquant trois ou quatre champs de jauge. Contrairement au cas de l'électromagnétisme, les champs de jauge d'une théorie non-abélienne interagissent entre eux.

#### Exercices

#### Problème 10.1

L'équation de Schrödinger pour une particule libre se met sous la forme canonique

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi. \qquad (10.62)$$

Montrer qu'en présence du potentiel vecteur  $A^{\mu}$ , elle devient

$$i\hbar \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\frac{q}{\hbar}\Phi\right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\boldsymbol{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}\right]^2 \psi. \qquad (10.63)$$

#### Problème 10.2

Déduire la relation (10.38) de la loi de transformation pour les potentiels vecteurs

$$\boldsymbol{A}_{\mu} \rightarrow \boldsymbol{A}'_{\mu} = \mathcal{R}_{\theta} \boldsymbol{A}_{\mu} \mathcal{R}_{\theta}^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_{\mu} \mathcal{R}_{\theta}) \mathcal{R}_{\theta}^{-1}.$$
(10.64)

Montrer que dans la limite où les angles  $\theta^a$  sont infiniment petits, la transformation de jauge  $\mathcal{R}_{\theta}$ engendre une variation du potentiel vecteur  $A^a_{\mu}$  égale à

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu \theta^a + g C^a_{bc} \theta^b A^c_\mu \,. \tag{10.65}$$

Le groupe SU(2) constitue une excellente illustration de la théorie générale. L'algèbre de SU(2)est l'espace vectoriel physique usuel  $\mathbb{R}^3$  muni comme seconde loi interne du produit vectoriel  $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ . Les potentiels vecteurs associés aux trois générateurs  $T_1 = \boldsymbol{T}_x$ ,  $T_2 = \boldsymbol{T}_y$  et  $T_3 = \boldsymbol{T}_z$  de l'algèbre sont notés

$$A^{a}_{\mu} = W^{a}_{\mu} = \left\{ W^{1}_{\mu}, W^{2}_{\mu}, W^{3}_{\mu} \right\} = \boldsymbol{W}_{\mu}.$$
(10.66)

Etablir alors que dans ce cas, la relation (10.65) se met sous la forme

$$\delta \boldsymbol{W}_{\mu} = \partial_{\mu} \boldsymbol{\theta} + g \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{W}. \qquad (10.67)$$

#### Problème 10.3

Etablir la relation (10.41).

#### Problème 10.4

Dans le cas de SU(2), établir que les constantes de structure  $C_{ab}^c$  sont égales à  $\epsilon_{abc}$ . En déduire que le facteur multiplicatif de la relation (10.58) vaut  $\kappa = 2$ .

# Chapitre 11

# Brisure spontanée de symétrie

Dans ce chapitre, nous aborderons la notion de **brisure spontanée de symétrie** que nous illustrerons avec le cas simple du "chapeau mexicain". L'existence d'un boson de **Nambu-Goldstone** associé au générateur cassé par le vide y apparaît déjà et une interprétation physique est possible.

Le Lagrangien d'une théorie de jauge est construit afin d'être invariant sous toute rotation  $\mathcal{R}_{\theta}$  du groupe  $\mathcal{G}$ . Cette symétrie est susceptible d'être **spontanément brisée** si l'état d'énergie minimale de la théorie, et non le Lagrangien, viole l'invariance de jauge. Le chapeau mexicain offre une illustration simple de ce mécanisme. Le potentiel V présenté dans la Figure 11.1 et bien invariant par rotation dans le plan complexe  $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ . Mais la Nature choisit comme vide une configuration d'énergie minimale localisée dans la rigole circulaire du chapeau. Dans la figure, le champ  $\phi$  s'est stabilisé en  $\varphi_1^0 = v$  et  $\varphi_2^0 = 0$ . Cette direction n'est pas invariante par rotation et la symétrie de jauge U(1) de cet exemple est brisée dès lors qu'une direction particulière du plan ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) a été choisie. Une brisure spontanée de symétrie est en définitive caractérisée par une invariance du Lagrangien, mais pas des états de la théorie.

# 11.1 Le cas pédagogique du chapeau mexicain

Afin d'illustrer simplement la notion de brisure spontanée de symétrie, considérons tout d'abord le cas du groupe de jauge abélien U(1). Le champ scalaire chargé étudié au Chapitre 4 sera décrit ici par  $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ . Le Lagrangien associé se met sous la forme

$$\mathcal{L} = \left(\partial_{\mu}\phi^{\dagger}\right) \left(\partial^{\mu}\phi\right) - V.$$
(11.1)

Il doit être invariant sous les transformations de jauge globales de  $\phi$  qui correspondent dans ce cas aux rotations complexes

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-iq\theta}\phi. \tag{11.2}$$

C'est bien le cas du terme cinétique puisque l'angle  $\theta$  est constant. Quant au potentiel, il doit être une fonction de la variable

$$\phi^{\dagger}\phi = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \frac{1}{2}\varphi^2.$$
(11.3)

Le vecteur  $\varphi$  du plan complexe, par ailleurs isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , a pour coordonnées les champs réels  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Un exemple de potentiel brisant spontanément la symétrie de rotation U(1) est présenté qualitativement dans la Figure 11.1. Le minimum de V est atteint pour une valeur R non nulle de



FIGURE 11.1 – Le chapeau mexican offre une illustration simple d'une brisure spontanée de symétrie. Le potentiel V du champ scalaire complexe  $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$  présenté ici est bien invariant par rotation autour de l'axe vertical, mais la configuration d'énergie minimale correspondant au point bleu ne l'est pas.

la norme du vecteur  $\varphi$ . La forme canonique du potentiel V fait intervenir le terme quadratique  $\phi^{\dagger}\phi$  et son carré avec

$$V = -\mu^2 \phi^{\dagger} \phi + \lambda (\phi^{\dagger} \phi)^2. \qquad (11.4)$$

Le paramètre  $\mu$  correspond à une masse et  $\lambda$  est la constante de couplage quartique du champ  $\phi.$ 

En exprimant  $\phi^{\dagger}\phi$  en fonction de la norme  $R = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2}$  du vecteur  $\varphi$ , on obtient

$$V = -\frac{\mu^2}{2}R^2 + \frac{\lambda}{4}R^4.$$
 (11.5)

Le minimum du potentiel est atteint pour

$$R = R_0 = v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$
 (11.6)

Si l'on ajoute la constante  $V_0 = \lambda v^4/4$ , nous obtenons la courbe montrée dans la Figure 11.2 associée à l'expression

$$V = \frac{\lambda}{4} \left( R^2 - v^2 \right)^2.$$
 (11.7)

Le fait que le potentiel ne dépend que de la norme R est une illustration de son invariance par rotation dans le plan ( $\varphi_1, \varphi_2$ ). La Nature choisit comme état de vide  $|0\rangle$  la configuration dans laquelle le champ  $\phi$  a l'énergie minimale. Puisque la densité de Hamiltonien associée au Lagrangien (11.1) est égale à

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^{\dagger} \dot{\phi} + \left( \nabla \phi^{\dagger} \nabla \phi \right) + V, \qquad (11.8)$$

l'état d'énergie minimale correspond à un champ scalaire  $\phi$  constant et homogène avec un potentiel



FIGURE 11.2 – Le potentiel réduit  $V/V_0$  en fonction du rapport R/v dans lequel R désigne la norme du vecteur  $\varphi$ . Le potentiel (11.7) est minimal quand il est nul. La norme R prend alors la valeur  $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ .

V aussi petit que possible. Dans la Figure 11.1, le vide  $|0\rangle$  est représenté par le point bleu associé au vecteur  $\varphi_0$  de composantes  $\varphi_1^0 = v$  et  $\varphi_2^0 = 0$ . Tout autre point de la rigole circulaire du chapeau mexicain aurait fait également l'affaire. Une simple rotation de jauge permets alors un changement des coordonnées  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  qui nous ramène au cas précédent. Dans le Chapitre 4, nous avons relié à l'invariance de jauge du Lagrangien vis à vis des rotations de jauge du groupe U(1) à la notion de charge électrique et à sa conservation. La brisure spontanée de la symétrie U(1) provoque ici l'émergence d'une direction privilégiée  $\varphi_0$  et fait apparaître un vide  $|0\rangle$  doté d'une charge électrique non nulle. De surcroît, le champ  $\varphi$  développe des excitations h autour de sa valeur dans le vide  $\varphi_0$ de sorte que

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{h} \,. \tag{11.9}$$

Une fois exprimé en fonction de  $h = (h_1, h_2)$ , le Lagrangien (11.1) perd explicitement l'invariance sous le groupe U(1). La notion même de charge électrique devient caduque et en conséquence sa conservation.

Nous allons étudier comment la brisure spontanée de U(1) conduit à l'existence d'un vide  $|0\rangle$ électriquement chargé. On peut établir tout d'abord que la transformation de jauge (11.2) revient à une rotation dans le plan ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) d'un angle égal à  $-q\theta$ . La matrice de cette rotation s'écrit alors sous la forme  $\mathcal{R}_{\theta} = e^{-i\theta Q}$ , où le générateur Q décrivant la charge électrique agit sur  $\varphi$  par l'opérateur

$$Q = q \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$
(11.10)

L'application de Q sur la configuration d'énergie minimale  $|0\rangle = \varphi_0 = (v, 0)$  conduit à

$$iQ|0\rangle = iQ\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\qv\end{pmatrix} \neq 0.$$
 (11.11)

Le vide a alors acquis une charge électrique non nulle.

L'essence même du mécanisme de brisure étudié ici réside dans l'évolution spontanée du système de l'état symétrique  $\varphi = 0$  vers la configuration d'énergie minimale  $\varphi_0$ , appelée également vide, et correspondant au nouvel état fondamental  $|0\rangle$  des excitations du champ scalaire. Ce vide dans lequel se stabilise le système n'est plus invariant par rotation. Toute transformation  $\mathcal{R}_{\theta}$  transforme  $\varphi_0 = |0\rangle$  en un nouvel état  $\varphi'_0 = |0'\rangle$  différent, d'où deux conséquences importantes :

1. Le générateur Q associé à la charge électrique ne laisse plus le vide invariant puisque

$$\boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\varphi} = (\mathcal{R}_{\theta} - \mathbb{I}_2) \boldsymbol{\varphi}_0 \simeq -i\theta Q \boldsymbol{\varphi}_0 \neq \boldsymbol{0}.$$
(11.12)

Nous retrouvons le résultat précédent. Le fait que  $Q |0\rangle$  soit non nul caractérise la brisure de la symétrie de rotation associée au générateur Q. Celui-ci est cassé par l'existence du vide  $|0\rangle$  et l'invariance sous U(1) est perdue. La conséquence physique est un vide électriquement chargé.

2. Une rotation quelconque expédie le vide  $\varphi_0$  vers le nouvel état  $\varphi'_0$  également d'énergie minimale (le potentiel est toujours invariant sous U(1)) et forcément situé dans la rigole du chapeau mexicain. En prenant toutes les rotations avec  $0 \le \theta \le 2\pi$ , celle-ci est totalement parcourue. Le générateur Q appliqué à  $\varphi_0$  permet de définir le vecteur  $iQ(\varphi_0)$  pointant le long de la vallée du potentiel. Dans le cas de la Figure 11.1 par exemple,  $iQ(\varphi_0)$  est bien parallèle à l'axe  $\varphi_2$ . Dans cette direction, qui correspond au fond de la rigole du chapeau, le potentiel ne varie pas. L'excitation  $h_2$  doit être de masse nulle.

Afin de vérifier cette importante propriété, on exprime le Lagrangien (11.1) en fonction des champs  $h_1$  et  $h_2$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h_1) (\partial^{\mu} h_1) + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h_2) (\partial^{\mu} h_2) - V. \qquad (11.13)$$

Le potentiel s'écrit désormais

$$V(h_1, h_2) = \mu^2 h_1^2 + \lambda v h_1(\mathbf{h}\mathbf{h}) + \frac{\lambda}{4} (\mathbf{h}\mathbf{h})^2, \qquad (11.14)$$

le produit scalaire hh étant une notation pour  $h_1^2 + h_2^2$ .

Le seul terme quadratique est  $\mu^2 h_1^2$ , il confère au champ scalaire neutre  $h_1$  la masse  $m_1 = \sqrt{2}\mu$ , alors que l'excitation  $h_2$  dirigée le long de la vallée du potentiel a une masse nulle comme anticipé. Le générateur Q, brisé par l'existence d'un vide qu'il ne laisse pas invariant, est associé au champ scalaire de masse nulle  $h_2$ . Nous avons ici une illustration du **théorème de Goldstone**. Celui-ci stipule que dans une théorie de jauge spontanément brisée, chaque générateur  $T_a$  ne préservant pas le vide (donc tel que  $T_a |0\rangle \neq 0$ ) est associé à un champ scalaire neutre  $h_a$  de masse nulle appelé **boson de Goldstone ou de Nambu-Goldstone**. Le paragraphe suivant confirme ce théorème dans le cas de groupes non-abéliens plus compliqués que U(1). Une démonstration générale est ensuite proposée.

# **11.2** Généralisation aux groupes SO(n) et SU(n)

#### **11.2.1** Le cas de SO(n)

Le champ scalaire  $\varphi$  est maintenant un vecteur de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Il a pour coordonnées les n scalaires neutres

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n). \tag{11.15}$$

Le Lagrangien (11.1) se généralise immédiatement sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi \right) - \frac{1}{4} \lambda v^{4} + \frac{1}{2} \mu^{2} \left( \varphi \cdot \varphi \right) - \frac{1}{4} \lambda \left( \varphi \cdot \varphi \right)^{2}.$$
(11.16)

Il est manifestement invariant sous les rotations de  $\mathbb{R}^n$ . Le potentiel V par exemple ne dépend que de la norme R du vecteur  $\varphi$ , avec une variation donnée par la relation (11.7). Le minimum de V est donc atteint pour un rayon  $R = v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$  et la rigole du chapeau mexicain est remplacée ici par la surface à n-1 dimensions d'une sphère de rayon v. Le système évolue spontanément vers une configuration d'énergie, et donc de potentiel, minimale située sur la surface de cette sphère et décrite par le vecteur  $\varphi_0 = |0\rangle$ . Dans la Figure 11.3 qui illustre le cas de SO(3), le vide correspond au point bleu qui s'est stabilisé en (v, 0, 0). Dans le cas général, les coordonnées du vides sont égales à

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \left(\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0\right). \tag{11.17}$$

Les excitations du champ scalaire  $\varphi$  autour du vide  $\varphi_0$  sont prise en compte par le vecteur

$$\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n) \tag{11.18}$$

défini par la relation (11.9). Le potentiel se développe alors autour de sa valeur minimale  $V_0 = V(\varphi_0$ en fonction des champs  $h_i$ . En poussant le calcul jusqu'au second ordre inclus, on obtient

$$V(\varphi) = V_0 + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \bigg|_0 h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \bigg|_0 h_i h_j + \mathcal{O}(h^3).$$
(11.19)

La dérivée première de V par rapport à  $\varphi_i$  est nulle en  $\varphi_0$ . La dérivée seconde s'interprète comme la matrice de masse des excitations  $h_i$ ,

$$V(\varphi) = V_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{ij} h_i h_j + \mathcal{O}(h^3).$$
 (11.20)

Dans la mesure où le potentiel V ne dépend que du rayon R, on établit

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = V'(R) \frac{\varphi_i}{R}, \qquad (11.21)$$

alors que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = V''(R) \frac{\varphi_i \varphi_j}{R^2} + \frac{V'(R)}{R} \left[ \delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{R^2} \right].$$
(11.22)

En  $\varphi_0$ , le potentiel V est minimum et V'(R = v) = 0. On peut montrer que la matrice de masse



FIGURE 11.3 – La brisure spontanée de symétrie SO(n) est illustrée dans cet exemple à trois dimensions. Le système évolue vers la configuration d'énergie minimale  $\varphi_0$  située à une distance vdu centre. Les excitations du champ scalaire  $\varphi$  autour du vide  $\varphi_0$  sont décrites parles champs  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ . Les deux derniers scalaires sont des bosons de Goldstone. Ils pointent en effet en direction de la vallée du potentiel.

des excitations est égale à

$$\mathcal{M}_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_0 = V''(v) \frac{\varphi_i^0 \varphi_j^0}{v^2} = 2\mu^2 \frac{\varphi_i^0 \varphi_j^0}{v^2}.$$
(11.23)

Si, à l'instar de la Figure 11.3, le vide se stabilise le long de l'axe  $\varphi_1$  uniquement avec

$$\varphi_0 = (v, 0, \dots, 0) \quad \leftrightarrow \quad \varphi_i^0 = \delta_{1i} v ,$$
(11.24)

la matrice de masse des excitations scalaires  $h_i$  est trivialement donnée par

$$\mathcal{M}_{ij} = 2\mu^2 \delta_{1i} \delta_{1j} \,. \tag{11.25}$$

Seul le champ  $h_1$  acquiert donc la masse  $m_1 = \sqrt{2}\mu$ . Toutes les autres excitations scalaires de  $h_2$  à  $h_n$ sont de masse nulle. Le cas de SO(n) généralise donc l'exemple du chapeau mexicain où l'opérateur Q engendrait les rotations de  $\varphi_1$  vers  $\varphi_2$ . Dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $C_n^2 = n(n-1)/2$  rotations permettant de faire pivoter l'axe  $\varphi_i$  vers l'axe  $\varphi_j$ . Parmi ces opérateurs, le générateur  $T_{1k}$  est responsable de la rotation de l'axe  $\varphi_1$  vers l'axe  $\varphi_k$  ( $k \neq 1$ ). Celle-ci transforme le vide  $\varphi_0$  en vecteur  $\varphi'_0$  légèrement différent puisque doté d'une composante dirigée selon  $\varphi_k$  et définie par

$$\varphi_0' - \varphi_0 = \left[ e^{-i\theta_{1k}T_{1k}} - \mathbb{I}_n \right] \varphi_0 \simeq -i\theta_{1k}T_{1k}\varphi_0 \neq \mathbf{0}.$$
(11.26)

Le générateur  $T_{1k}$  est brisé par le vide  $|0\rangle = \varphi_0$  qu'il ne laisse pas invariant. A un facteur multiplicatif  $\theta_{1k}$  près, il le transforme en  $-iT_{1k}(\varphi_0)$  parallèle à l'axe  $\varphi_k$ . L'excitation correspondante est le champ  $h_k$  dirigé le long de la surface de la sphère de rayon v et de potentiel minimal. Ce champ ne produisant aucune variation de V dans le voisinage de  $\varphi_0$ , il est de masse nulle. Nous retrouvons le théorème de Goldstone : aux (n-1) générateurs  $T_{1k}$  brisés par le vide correspondent les (n-1) bosons de Nambu-Goldstone  $h_k$  de masse nulle.

La symétrie associée au groupe  $\mathcal{G} = SO(n)$  est donc spontanément brisée par la stabilisation du système dans la configuration d'énergie minimale  $|0\rangle = \varphi_0$ . Le vide n'est pas invariant en effet sous une transformation quelconque de  $\mathcal{G}$ .

Quelle que soit la position de  $\varphi_0$  sur la sphère de rayon R = v, une simple rotation permet de redéfinir les axes  $\varphi_i$  tels que la relation (11.24) peut être utilisée. On peut montrer que le vide est quand même invariant sous les rotations de  $\mathcal{G}' = SO(n-1)$  qui basculent l'axe  $\varphi_i \neq \varphi_j$  vers l'axe  $\varphi_j \neq \varphi_i$ .

A l'aide du développement (11.9), le Lagrangien (11.16) se met sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \boldsymbol{h}) (\partial^{\mu} \boldsymbol{h}) - V, \qquad (11.27)$$

où le potentiel est donné par

$$V(\boldsymbol{h}) = \lambda (\boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \boldsymbol{h})^2 + \lambda (\boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \boldsymbol{h}) (\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}) + \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h})^2.$$
(11.28)

On retrouve alors la relation (11.14) lorsque le vide est aligné sur l'axe  $\varphi_1$ .

#### **11.2.2** Le cas de SU(2)

Le champ  $\phi$  est ici complexe. Il appartient à la représentation fondamentale **2** de SU(2) isomorphe à  $\mathbb{C}^2$  et possède deux composantes  $\Phi^+$  et  $\Phi^0$  qui forment le doublet

$$\phi = \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}. \tag{11.29}$$

Le Lagrangien du champ scalaire H construit sur le modèle (11.1) se met sous la forme

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu} \mathbf{H}^{\dagger}) (\partial^{\mu} \mathbf{H}) - V = (\partial_{\mu} \mathbf{H}^{\dagger}) (\partial^{\mu} \mathbf{H}) - \frac{1}{4} \lambda v^{4} + \mu^{2} \mathbf{H}^{\dagger} \mathbf{H} - \lambda (\mathbf{H}^{\dagger} \mathbf{H})^{2}.$$
(11.30)

Bien qu'apparemment très différent du cas précédent puisque la représentation de SU(2) à laquelle H appartient est complexe et non réelle, nous allons montrer que nous pouvons cependant nous ramener à SO(n). Encore mieux, le Lagrangien (11.30) cache une invariance sous SO(4) qui englobe celle associée à SU(2). Exprimons pour ce faire les composantes complexes de H en fonction de leurs parties réelles et imaginaires et posons

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4\\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{11.31}$$

Le champ scalaire  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$  appartenant à  $\mathbb{R}^4$  entre alors en scène. Puisque

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_3 - i\varphi_4, \varphi_1 - i\varphi_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 - i\varphi_4 \\ \varphi_1 - i\varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

 $\varphi \cdot \varphi$ , (11.32)le Lagrangien (11.30) se réduit à la forme (11.16) étudiée précédemment. Sous l'effet du potentiel V, le système évolue spontanément vers un vide  $\varphi_0$  situé sur la 3-sphère de rayon v de l'espace  $\mathbb{R}^4$  auquel  $\varphi$  appartient. La question essentielle désormais est de savoir si cette configuration  $\varphi_0 = |0\rangle$  brise les générateurs du groupe SU(2), ce dernier constituant un sous-groupe de SO(4). Une rotation de SU(2) transforme H en

$$H \longrightarrow H' = e^{-i\theta \cdot \sigma/2} H$$
 (11.33)

L'éventuelle constante de couplage g a été absorbée dans la définition des angles  $\theta$  et le vecteur  $\sigma$  désigne les trois matrices de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Si l'un des générateurs de SU(2) ne laisse pas le vide invariant, il est alors brisé de manière spontanée et un boson de Nambu-Goldstone lui est associé.

La configuration d'énergie minimale est ici prise égale à  $\varphi_0 = (v, 0, 0, 0)$  et correspond au doublet de SU(2)

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0\\ v \end{pmatrix} . \tag{11.34}$$

Dans la littérature, la valeur dans le vide de H est également noté  $\langle H \rangle = H_0$ . Appliquer la transformation de jauge (11.33) à  $H_0$  en considérant des angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  infiniment petits

permet d'établir que

$$\boldsymbol{H}_{0}^{\prime} - \boldsymbol{H}_{0} = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_{z} & \theta_{x} - i\theta_{y} \\ \theta_{x} + i\theta_{y} & \theta_{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$
(11.35)

On en déduit que dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  dans lequel vit le vecteur  $\varphi$ , le vide  $\varphi_0$  subit la modification

$$\delta\varphi_1^0 = 0, \quad \delta\varphi_2^0 = \frac{\theta_z}{2}v, \quad \delta\varphi_3^0 = -\frac{\theta_y}{2}v \quad \text{et} \quad \delta\varphi_4^0 = -\frac{\theta_x}{2}v. \quad (11.36)$$

Or la rotation de SO(4) qui bascule l'axe  $\varphi_1$  vers l'axe  $\varphi_2$  engendre la variation

$$\varphi_0' - \varphi_0 = \left[ e^{-i\theta_{12}T_{12}} - \mathbb{I}_4 \right] \varphi_0 \simeq -i\theta_{12}T_{12}\varphi_0 = \left( 0, \theta_{12}v, 0, 0 \right), \quad (11.37)$$

où seule la composante  $\delta \varphi_2^0 = \theta_{12} v$  est non nulle. Nous pouvons dès lors identifier l'angle de la rotation  $\theta_{12}$  de SO(4) avec le paramètre  $\theta_{12}/2$  de SU(2). Le générateur  $\sigma_z$  de SU(2) a le même effet sur la configuration d'énergie minimale  $\varphi_0$  que le générateur  $T_{12}$  de SO(4). Tout comme  $T_{12}$ ,  $\sigma_z$  est brisé par le vide qu'il ne laisse par invariant. Le boson de Goldstone associé est le champ scalaire neutre  $h_2$ . Il en va de même à un signe près pour les générateurs  $\sigma_y = T_{13}$  et  $\sigma_x = T_{14}$  puisque leur effet sur le vide est respectivement donné par

$$\delta\varphi_3^0 = -\frac{\theta_y}{2}v = \theta_{13}v \quad \text{et} \quad \delta\varphi_4^0 = -\frac{\theta_x}{2}v = \theta_{14}v. \quad (11.38)$$

Les excitations scalaires  $h_3$  et  $h_4$  sont les bosons de Goldstone associés. La brisure de SU(2)engendrée par l'évolution spontanée du système vers le vide  $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}_0$  asymétrique est donc totale. Tous les générateurs du groupe sont cassés et trois bosons de Nambu-Goldstone apparaissent comme le prévoit le théorème de Goldstone.

# 11.3 Théorème de Goldstone

Nous sommes prêtes désormais à nous attaquer au théorème de Goldstone dans le cas d'un groupe non-abélien  $\mathcal{G}$  quelconque. L'algèbre  $\mathcal{A}$  associée à pour vecteurs de base les D générateurs  $\mathbf{X}_a$ . Le champ scalaire  $\phi$  responsable de la brisure de symétrie de jauge appartient à la représentation  $\mathcal{V}$ . Son potentiel  $V(\phi)$  présente un minimum  $V_0$  pour une valeur  $\phi_0$  non nulle. Cette configuration d'énergie minimale constitue le nouvel état fondamental  $|0\rangle$  vers lequel le système évolue spontanément. Le vide  $|0\rangle = \phi_0$  casse tout générateur  $\mathbf{X}_a$  qui ne le laisse pas invariant et qui, de ce fait, vérifie

$$\{A_a\} \times \{\phi_0\} = -i\{T_a\} \times \{\phi_0\} \neq 0.$$
(11.39)

La matrice  $A_a$  représente dans l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  le générateur  $\mathbf{X}_a$  de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Nous pouvons dès lors classer les éléments de cet ensemble en deux catégories : ceux qui préservent le vide et ceux qui ne le laissent pas invariant.

Montrons tout d'abord que l'ensemble  $\mathcal{A}'$  des générateurs qui préservent le vide constituent une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ :

1. Soient  $X_a$  et  $X_b$  deux éléments de  $\mathcal{A}'$ . Ils sont représentés dans  $\mathcal{V}$  par les matrices  $A_a$  et  $A_b$ 

vérifiant par définition les égalités

$$\{A_a\} \times \{\phi_0\} = 0$$
 et  $\{A_b\} \times \{\phi_0\} = 0.$  (11.40)

Alors pour tout couple de réels  $\alpha$  et  $\beta$ , il vient

$$\{\alpha A_a + \beta A_b\} \times \{\phi_0\} = 0.$$
(11.41)

Le générateur  $\alpha A_a + \beta A_b$  appartient aussi à  $\mathcal{A}'$  de sorte que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}$ .

La seconde loi interne ★ de l'algèbre A associe à tout couple de générateurs X<sub>a</sub> et X<sub>b</sub> de A l'élément Y = X<sub>a</sub> ★ X<sub>b</sub> représenté dans V par le commutateur [A<sub>a</sub>, A<sub>b</sub>] des matrices A<sub>a</sub> et A<sub>b</sub>. En particulier si X<sub>a</sub> et X<sub>b</sub> appartiennent à A', l'action de leurs matrices A<sub>a</sub> et A<sub>b</sub> sur le vide φ<sub>0</sub> conduit à l'identité

$$[A_a, A_b] \times \{\phi_0\} = \{A_a\} \times \{A_b\} \times \{\phi_0\} - \{A_b\} \times \{A_a\} \times \{\phi_0\} = 0, \qquad (11.42)$$

en vertu de la définition (11.39). Le produit  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_a \star \mathbf{X}_b$  appartient encore au sous-espace vectoriel  $\mathcal{A}'$  vis à vis duquel la loi  $\star$  est donc interne. L'ensemble  $\mathcal{A}'$  est bien une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ . Toute base de  $\mathcal{A}$ 

$$\left\{\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_d, \boldsymbol{X}_{d+1}, \dots, \boldsymbol{X}_D\right\}$$
(11.43)

peut donc se décomposer en un ensemble de générateurs  $\{X_1, \ldots, X_d\}$  constituant la base de la sous-algèbre  $\mathcal{A}'$  ainsi que les générateurs restants  $\{X_{d+1}, \ldots, X_D\}$  formant une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{B}$  qui entre dans la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}. \tag{11.44}$$

La sous-algèbre  $\mathcal{A}'$  engendre le sous-groupe de Lie  $\mathcal{G}'$  du groupe  $\mathcal{G}$  qui décrit la symétrie résiduelle laissée intacte par le vide. Dans le cas de SO(n), les générateurs permettenant de basculer l'axe  $\varphi_i \neq \varphi_1$  vers l'axe  $\varphi_j \neq \varphi_1$  engendrent l'algèbre de SO(n-1), sous-groupe résiduel de SO(n).

La seconde étape du raisonnement consiste à faire apparaître les champs de Goldstone. En toute généralité, le champ  $\phi$  appartient à la représentation  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{G}$ . Cet espace vectoriel peut être réel comme dans le cas de SO(n). Le champ  $\phi$  est alors décrit par les  $n = \dim \mathcal{V}$  coordonnées  $\varphi_i$  que le vecteur  $\varphi$  y prend et la représentation  $\mathcal{V}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . L'alternative est une représentation  $\mathcal{V}$  complexe de dimension p. Dans ce cas,  $\phi$  est spécifié par la donnée des p nombres complexes  $\Phi_j$ . Inspiré par le cas de SU(2), nous pouvons décrire  $\phi$  à l'aide des parties réelles et imaginaires des coordonnées complexes  $\Phi_j$  en posant

$$\Phi_j = \frac{\varphi_j + i\varphi_{j+1}}{\sqrt{2}}.$$
 (11.45)

Nous sommes ramenés au cas précédent en définissant le vecteur  $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_{2p})$ . Ce vecteur appartient à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  de dimension n = 2p. Bien que cela ne soit pas évident à priori, celui-ci est également une représentation du groupe  $\mathcal{G}$ . Chaque générateur  $X_a$  de l'algèbre

 $\mathcal{A}$  y est représenté par une matrice  $n \times n$  égale à  $-i\mathcal{T}_a$  et qui traduit dans  $\mathbb{R}^n$  (au niveau des composantes  $\varphi_i$  du vecteur  $\varphi$ ) l'action des matrices  $A_a = -iT_a$  de la représentation  $\mathcal{V}$ .

Dans l'exemple de la brisure spontanée de SU(2), le doublet scalaire complexe H donne naissance à un vecteur  $\varphi$  à quatre composantes réelles et sur lequel SU(2) agit via des rotations de l'axe  $\varphi_1$  vers les autres axes. Les matrices  $T_a = \sigma_a/2$  de la représentation fondamentale  $\mathcal{V} = \mathbf{2}$  de SU(2) sont transcrites dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  auquel  $\varphi$  appartient par les matrices  $4 \times 4$ 

$$\mathcal{T}_{1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_{2} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_{3} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(11.46)

Les matrices  $T_a = \sigma_a/2$  vérifient les relations de commutation  $[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}\sigma_c$  qui traduisent la seconde loi interne  $\star$  de l'algèbre de SU(2) et la transposent comme il se doit dans la représentation  $\mathcal{V} = \mathbf{2}$ .

Le vide  $\phi_0$  de la représentation  $\mathcal{V}$  correspond au vecteur  $\varphi_0$  de  $\mathbb{R}^n$ . Les *n* champs scalaires  $h_i$ apparaissent dans le développement (11.9) de  $\varphi$  autour de  $\varphi_0$ . Nous allons considérer maintenant l'application *f* de l'algèbre  $\mathcal{A}$  dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  précédemment défini qui, à tout générateur  $X_a$  de  $\mathcal{A}$ , associe le vecteur  $\{-i\mathcal{T}_a\}\varphi_0$  de  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons que la matrice  $-i\mathcal{T}_a$  traduit dans  $\mathbb{R}^n$ l'action de la matrice  $-iT_a = A_a$  qui représente dans  $\mathcal{V}$  le générateur  $X_a$ . Dans la mesur où, pour tout couple de réels  $\alpha$  et  $\beta$ , il vient

$$f(\alpha \mathbf{X}_{a} + \beta \mathbf{X}_{b}) = \left\{ -i(\alpha \mathcal{T}_{a} + \beta \mathcal{T}_{b}) \right\} \varphi_{0}$$
  
=  $\alpha \left( \left\{ -i\mathcal{T}_{a} \right\} \varphi_{0} \right) + \beta \left( \left\{ -i\mathcal{T}_{b} \right\} \varphi_{0} \right) = \alpha f(\mathbf{X}_{a}) + \beta f(\mathbf{X}_{b}),$  (11.47)

l'application f est linéaire. Elle transporte l'algèbre  $\mathcal{A}$  considérée comme un espace vectoriel de dimension D construit sur  $\mathbb{R}$  vers l'espace vectoriel image  $\mathbb{R}^n$  de dimension n. Le **théorème du rang** s'applique conduisant à la relation

$$\dim \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$
(11.48)

Le noyau  $\operatorname{Ker}(f)$  de l'application f est l'ensemble des éléments X de algèbre  $\mathcal{A}$  qui laissent le vide inchangé. Cet ensemble n'est autre que la sous-algèbre  $\mathcal{A}'$  de dimension d, définie plus haut, qui engendre le sous-groupe résiduel  $\mathcal{G}'$ .

L'image de  $\mathcal{A}$  par f est le sous-espace  $\mathbf{Im}(f)$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et doté du même nombre de dimension que  $\mathcal{B}$  puisque

$$\dim \mathbf{Im}(f) = \dim \mathcal{A} - \dim \mathcal{A}' = \dim \mathcal{B} = D - k = K.$$
(11.49)

C'est dans cet espace  $\mathbb{R}^K$  que vivent les K bosons de Goldstone associés aux K générateurs brisés constituant la base de  $\mathcal{B}$ .

Le troisième acte de la démonstration consiste à prouver l'assertion précédente. Considérons un élément  $X_b$  quelconque appartenent à  $\mathcal{B}$ . Ce générateur ne laisse pas invariant le vide et nous savons que  $\{-i\mathcal{T}_b\}\varphi_0$  est un vecteur non nul de  $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}^K$  que nous noterons

$$\boldsymbol{h} = \{-i\mathcal{T}_b\}\boldsymbol{\varphi}_0 = f(\boldsymbol{X}_b). \tag{11.50}$$

Ce vecteur possède les coordonnées  $h_i$  et est différent du vecteur nul. A l'aide du générateur  $X_b$  et de sa représentation  $\{-i\mathcal{T}_b\}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , construisons la rotation

$$\mathcal{R}_b = e^{-i\epsilon \mathcal{T}_b} = \mathbb{I}_n - i\epsilon \mathcal{T}_b, \qquad (11.51)$$

où l'angle  $\epsilon$  est infiniment petit. Une telle rotation agit également sur le vide  $\phi_0$  de la vraie représentation  $\mathcal{V}$  en le transformant en

$$\left\{\phi_0'\right\} = \left\{e^{-i\epsilon\mathcal{T}_b}\right\} \times \left\{\phi_0\right\},\tag{11.52}$$

auquel correspond le vecteur  $\varphi'_0$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le potentiel V est invariant de jauge et ne change pas entre  $\phi_0$  et  $\phi'_0$ , donc entre  $\varphi_0$  et  $\varphi'_0$ . Ces deux points de  $\mathbb{R}^n$  infiniment voisins sont au fond de la vallée de potentiel, là où V est localement minimal. Le gradient du potentiel étant nul aussi bien en  $\varphi_0$  qu'en  $\varphi'_0$ , il vient

$$0 = \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_0'} = \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_0} + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0.$$
(11.53)

La rotation  $\mathcal{R}_{\theta}$  bascule  $\varphi_0$  en  $\varphi'_0$ , engendrant la variation

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}'_0 - \boldsymbol{\varphi}_0 \simeq \left\{ -i\epsilon \mathcal{T}_a \right\} \boldsymbol{\varphi}_0 = \epsilon \boldsymbol{h} \,. \tag{11.54}$$

La matrice de masse  $\mathcal{M}_{ij}$  des excitations  $h_j$  du champ scalaire  $\varphi$  autour du vide étant définie par la dérivée seconde du potentiel en  $\varphi_0$ , la relation (11.53) conduit à

$$\mathcal{M}_{ij}(\epsilon h_j) = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 = 0.$$
(11.55)

Le vecteur h est alors de masse nulle puisqu'en simplifiant par  $\epsilon$ , on obtient

$$\mathcal{M}_{ij}h_j = 0. \tag{11.56}$$

Tout élément  $X_b$  de  $\mathcal{B}$  a pour image par f un vecteur de masse nulle. L'ensemble des images des éléments de  $\mathcal{B}$  est l'espace vectoriel  $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}^K$  possédant K degrés de liberté réels. Ces excitations du champ  $\varphi$  ont toutes une masse nulle. Ce sont les bosons de Nambu-Goldstone associés aux K générateurs brisés de l'algèbre  $\mathcal{A}$  qui forment une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{B}$ .

# Exercices

### Problème 11.1

Établir l'expression du potentiel donnée en (11.14).

# Problème 11.2

Démontrer les expressions données en (11.21) et (11.22). Démontrer ensuite l'expression pour la matrice de masse donnée en (11.23).

### Problème 11.3

Démontrer la relation (11.35) ainsi que la relation (11.36).

# Chapitre 12

# Le méchanisme de Brout-Englert-Higgs

Nous allons maintenant compliquer la situation en considérant désormais des théories invariantes sous les transformations de jauge **locales** engendrées par un groupe non-abélien  $\mathcal{G}$ . Cette invariance est cependant spontanément brisée par un champ scalaire  $\phi$  dont les configurations classiques d'énergie minimale violent la symétrie de jauge. Ce champ évolue en effet vers un état fondamental  $\phi_0 \neq 0$  qui casse certains générateurs du groupe. Le cas le plus simple est celui du champ scalaire chargé étudié dans le du potentiel en forme du chapeau mexicain. Le Lagrangien (11.1) doit maintenant faire intervenir une dérivée covariante et non plus simple. Le champ de jauge associé entre également en jeu,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} = \left( D_{\mu} \phi \right)^{\dagger} \left( D^{\mu} \phi \right) - V - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \qquad (12.1)$$

où la dérivée covariante de  $\phi$  a été définie par  $D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi + iqA_{\mu}\phi$  et où le champ électromagnétique est égal à  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ . Le potentiel (11.7) conduit le champ scalaire à évoluer vers une configuration non nulle qui se ramène, par rotation des axes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , à  $\varphi_0 = (v, 0)$ .

On développe  $\phi$  autour du vide  $\phi_0$  en introduisant les excitations scalaires  $h_1$  et  $h_2$  définies par

$$\phi = \frac{(v+h_1)+h_2}{\sqrt{2}}.$$
(12.2)

En calculant le terme cinétique du champ scalaire, on établit que

$$(D_{\mu}\phi)^{\dagger}(D^{\mu}\phi) = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h)(\partial^{\mu}h) + q(v+h_1)A^{\mu}\partial_{\mu}h_2 - qh_2A^{\mu}\partial_{\mu}h_1$$
(12.3)

$$+\frac{1}{2}q^{2}A_{\mu}A^{\mu}\left[v^{2}+2vh_{1}+\boldsymbol{h}\boldsymbol{h}\right].$$
(12.4)

Force est de constater que ce seul terme cinétique est déjà bien compliqué avec un drôle de couplage entre le photon  $A^{\mu}$  et les champs  $h_1$  et  $h_2$ . Beaucoup plus excitante est la présence das la seconde ligne de l'expression du terme

$$\mathcal{L}_{\text{gauge mass}} = \frac{1}{2} q^2 v^2 A_{\mu} A^{\mu} = \frac{1}{2} m_{\gamma}^2 A_{\mu} A^{\mu} . \qquad (12.5)$$



FIGURE 12.1 – En tout point x de l'espace-temps, le champ scalaire  $\phi$  est décrit par le vecteur  $\varphi$  du plan ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) et donc par les coordonnées  $h_1$  et  $h_2$  de celui-ci par rapport au vide  $\varphi_0$ . Une simple rotation de jauge d'un angle  $\theta = \alpha/q$  rabat le vecteur  $\varphi$  sur l'axe  $\varphi_1$  et conduit au vecteur  $\varphi'$  qui, lui, ne dépend plus que de la seule composante réelle h.

Le boson vecteur  $A^{\mu}$  (introduit pour rendre locale l'invariance de jauge) acquiert une masse lorsque cette symétrie est spontanément brisée. Cette masse dépend du couplage de jauge q (ici la charge électrique) et de la norme v de  $\varphi_0$  (appelée valeur dans le vide du champ scalaire).

# 12.1 Illustration dans un cas simple

Les physiciens **Peter Higgs**, **Robert Brout** et **François Englert** ont remis de l'ordre dans le Lagrangien précédent. Celui-ci décrit la situation compliquée d'un champ scalaire  $\phi$  dont l'invariance locale par rapport à un groupe de jauge est brisée spontanément. Leur remarque est illustrée dans la Figure 12.1. Elle tient en ce que la symétrie de jauge étant justement locale, elle va nous permettre de simplifier considérablement la description du champ scalaire  $\phi$  que l'on peut faire tourner dans le plan complexe ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) sans que le Lagrangien 12.1 ne soit affecté.

En chaque point x de l'espace-temps, le champ scalaire complexe  $\phi$  s'exprime en fonction des scalaires neutres  $h_1$  et  $h_2$  grace à la relation (12.2). Il correspond au vecteur  $\varphi$  dans le plan ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) de la Figure ??. Les composantes de  $\varphi$  par rapport au vide  $\varphi_0$  dépendent donc en toute généralité de la position x. Celle-ci étant fixée, la Figure 12.1 suggère qu'une simple rotation dans le plan complexe du champ  $\phi$  permet de rabattre le vecteur  $\varphi$  sur l'axe horizontale  $\varphi_1$  en l'amenant en  $\varphi' = (v + h_1, h_2)$  puisque

$$\phi' = e^{-iq\theta}\phi = e^{-iq\theta}e^{i\alpha}\frac{v+h}{\sqrt{2}} = \frac{v+h}{\sqrt{2}}, \qquad (12.6)$$

pour peu que  $\theta = \alpha/q$ . L'angle  $\theta$  dépend de la position x dans l'espace-temps, mais comme le Lagrangien (12.1) est invariant sous les transformations de jauge locales, donc sous les rotations dont l'angle  $\theta$  dépend de x, il s'exprime exactement de la même manière en fonction de  $\phi'$  qu'en

fonction de  $\phi$ . La rotation de jauge permettant de substituer  $\phi'$  à  $\phi$  transforme le potentiel vecteur  $A_{\mu}$  en  $A'_{\mu}$ . L'expression du Lagrangien en fonction de  $\phi'$ ,  $A'_{\mu}$  et de la dérivée covariante  $D'_{\mu}\phi'$  est rigoureusement identique à celle de la relation (12.1). La dernière étape consiste à gommer les primes sur les champs  $\phi$  et  $A_{\mu}$ . On peut dès lors utiliser le Lagrangien (12.1) en prenant pour champ scalaire  $\phi = (v+h)/\sqrt{2}$ . Les calculs sont alors considérablement simplifiés. La grande question est désormais de savoir où est passé le second degré de liberté puisqu'on se retrouve avec un seul champ scalaire h appelé **boson de (Brout-Englert-)Higgs** alors qu'on était parti avec les deux champs  $h_1$  et  $h_2$ .

Un calcul du terme cinétique montre que

$$(D_{\mu}\phi)^{\dagger}(D^{\mu}\phi) = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h)(\partial^{\mu}h) + \frac{1}{2}q(v+h)^{2}A_{\mu}A^{\mu}.$$
(12.7)

Cette relation est d'une grande simplicité. Outre le terme cinétique du champ de Higgs h, nous reconnaissons le terme de masse du photon ainsi que deux termes de couplage entre le boson h et le photon  $A_{\mu}$ . Nous confirmons la propriété essentielle trouvée précédemment. Au cours de la brisure spontanée de la symétrie de jauge U(1) (rendue locale par l'introduction du potentiel vecteur  $A_{\mu}$ ) le photon acquiert la masse  $m_{\gamma} = qv$ . Se comportant désormais comme un champ vectoriel massif, il est caractérisé par trois degrés de liberté correspondant aux deux états d'hélicité transverse de la théorie de Maxwell auxquels s'ajoute un troisième état de polarisation longitudinale. Celui-ci correspond au degré de liberté qui nous faisait défaut. En devenant massif, le photon a avalé le boson de Goldstone engendré par la brisure spontanée de la symétrie de jauge. Le champ  $\varphi$  de la Figure ?? est aussi bien décrit par les deux champs  $h_1$  et  $h_2$  que par le champ de Higgs h et l'angle  $\theta = \alpha/q$ . Lorsqu'il est infiniment petit, ce dernier correspond à la direction  $\varphi_2$  associée au boson de Goldstone puisque

$$\phi = e^{iq\theta} \frac{v+h}{\sqrt{2}} \simeq \frac{v+h}{\sqrt{2}} + iq\theta \frac{v+h}{\sqrt{2}} = h_1 + ih_2.$$
 (12.8)

La transformation locale de jauge permettant de rabattre le champ  $\phi$  sur l'axe réel absorbe l'angle  $\theta$  qui réapparaît comme état d'hélicité longitudinale du photon devenu massif.

Le développement du Lagrangien (12.1) une fois que le boson de Goldstone a été avalé par le photon permet d'établir que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} h \partial^{\mu} h - \frac{1}{2} \left( \sqrt{2} \mu \right)^{2} h^{2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( qv \right)^{2} A_{\mu} A^{\mu}$$
(12.9)

$$+ q^{2}vhA_{\mu}A^{\mu} + \frac{1}{2}q^{2}h^{2}A_{\mu}A^{\mu} - \lambda vh^{3} - \frac{\lambda}{4}h^{4}. \qquad (12.10)$$

La première ligne correspond au Lagrangien libre du boson de Higgs h et du photon  $A_{\mu}$ , tous deux massifs. La deuxième ligne décrit les couplages du photon au boson de Higgs ainsi que les interactions de celui-ci avec lui-même.

# **12.2** Généralisation au groupe de jauge SU(2)

La transposition de l'étude précédente à SU(2) est immédiate. Le champ scalaire complexe  $\phi$  est remplacé par le doublet H appartenant à la représentation fondamentale 2 de spin 1/2. Le

Lagrangien (12.1) devient

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} = (D_{\mu} \boldsymbol{H})^{\dagger} (D^{\mu} \boldsymbol{H}) - V + \mathcal{L}_{SU(2)}, \qquad (12.11)$$

où le potentiel a été écrit sous la forme désormais canonique

$$V(\boldsymbol{H}) = \frac{1}{4}\lambda v^4 - \mu^2 \boldsymbol{H}^{\dagger} \boldsymbol{H} + \lambda \left(\boldsymbol{H}^{\dagger} \boldsymbol{H}\right)^2.$$
(12.12)

le Lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  rend compte des bosons vecteurs  $W_{\mu}$  et se met sous la forme (11.30) notée  $\mathcal{L}_{SU(2)}$  dans un paragraphe précédent. Les rotations de jauge basculent H en

$$\mathbf{H}' = \mathcal{R}\mathbf{H} = e^{-ig\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}/2}\mathbf{H}, \qquad (12.13)$$

où g est la constante de couplage du groupe SU(2). La même transformation s'applique à la dérivée covariante définie comme

$$D_{\mu}\boldsymbol{H} = \partial_{\mu}\boldsymbol{H} + ig\boldsymbol{W}_{\mu}(\boldsymbol{\sigma}/2)\boldsymbol{H}. \qquad (12.14)$$

Le système évolue spontanément vers la configuration d'énergie minimale  $H_0 \neq 0$  qui n'est pas invariante sous les transformations de SU(2). Au vide  $H_0$  correspond le vecteur  $\varphi_0$  de  $\mathbb{R}^4$  dont le module est v. Nous pouvons définir les axes  $\varphi_i$  tels que  $\varphi_0 = (v, 0, 0, 0)$ .

La généralisation au groupe SU(2) du mécanisme de Higgs discuté précédemment dans le cadre de U(1) revient à montrer qu'en tout point x de l'espace-temps il existe une rotation de jauge permettant de transformer H quelconque en un doublet H' aligné sur le vide et dont la seule composante non-nulle est  $\varphi'_1 = v + h$ . Le problème réside donc dans la construction d'une matrice  $\mathcal{R}$  de SU(2) vérifiant l'égalité

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}\boldsymbol{H}' = \begin{pmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}, \quad (12.15)$$

les composantes  $\varphi_i$  de H étant quelconques. La rotation  $\mathcal{R}$  préserve la norme hermetienne

$$H^{\dagger}H = \frac{1}{2}\varphi\varphi = \frac{R^2}{2} = \frac{(v+h)^2}{2}.$$
 (12.16)

Les nombres complexes a et b peuvent s'écrire

$$a = \cos(\theta/2) e^{i\alpha}$$
 et  $a = \sin(\theta/2) e^{i\beta}$ . (12.17)

Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont compris entre 0 et  $2\pi$  alors que  $\theta$  appartient à l'intervalle allat de 0 à  $\pi$  tel que  $\cos(\theta/2)$  et  $\sin(\theta/2)$  sont les modules des nombres complexes a et b.

En supposant que v + h = R est positif, on peut montrer que

$$e^{i\alpha} = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}} \quad \text{et} \quad e^{i\beta} = \frac{\varphi_3 + i\varphi_4}{\sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_4^2}}, \quad (12.18)$$

alors que

$$\cos(\theta/2) = \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}{R} \quad \text{et} \quad \sin(\theta/2) = \frac{\sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_4^2}}{R}.$$
(12.19)

La relation (12.15) permet d'exprimer une valeur quelconque du champ  $\boldsymbol{H}$ , qui dépend à priori des quatre composantes  $\varphi_i$  du vecteur  $\boldsymbol{\varphi}$ , en fonction du champ de Higgs h et des trois paramètres entrant dans la définition de la matrice de rotation  $\mathcal{R}$  ( $\alpha, \beta, \theta$ ). La matrice  $\mathcal{R}$  peut également être définie à partir du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  décrivant la rotation dans  $\mathbb{R}^3$  dont les angles d'Euler permettent la reconstruction de a et de b. Le doublet  $\boldsymbol{H}$  peut donc s'exprimer sous la forme

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = e^{-i\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}.$$
(12.20)

Il dépend de h est des trois angles  $\theta_i$ . Lorsque ceux-ci sont petits, le doublet H acquiert une composantes perpendiculaire à l'axe  $\varphi_1$  sur lequel le vide  $H_0$  est aligné. Nous savons que l'effet des matrices de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  sur un vecteur  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^4$  parallèle à  $\varphi_0$  est identique à celui des rotations  $-T_{13}$ ,  $-T_{14}$  et  $T_{12}$  de SO(4). Les angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  sont donc respectivement associés aux bosons de Goldstone  $h_4$ ,  $h_3$  et  $h_2$ . Le mécanisme de Higgs s'applique encore dans le cas de SU(2). La transformation de jauge locale  $\mathcal{R}^{-1}$  permet de remplacer H par le doublet H' sans que le Lagrangien (12.11) ne soit affecté. Cette rotation de jauge modifie également les bosons  $W_{\mu}$  en  $W'_{\mu}$  et la dérivée covariante  $D_{\mu}H$  en  $D'_{\mu}H'$ . La dernière étape est la même que pour U(1) : on gomme les primes et on se retrouve avec le Lagrangien (12.11) dans lequel le doublet H se met simplement sous la forme

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0\\ v+h \end{pmatrix}. \tag{12.21}$$

Les trois degrés de liberté de H associés aux bosons de Goldstone ont disparu comme dans le cas précédent. Ils ont été mangés par les trois bosons de jauge  $W^i_{\mu}$  qui ont acquis une masse que nous allons déterminer. En effet, en calculant l'effet de la dérivée covariante  $D_{\mu}$  sur le champ de Higgs, on obtient

$$D_{\mu}\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \partial_{\mu}\mathbb{I}_{2} + i\frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_{\mu}^{3} & W_{\mu}^{1} - iW_{\mu}^{2} \\ W_{\mu}^{1} + iW_{\mu}^{2} & -W_{\mu}^{3} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}.$$
(12.22)

Cette expression se met sous la forme

$$D_{\mu}\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} i(g/2)(W_{\mu}^{1} - iW_{\mu}^{2})(v+h) \\ \partial_{\mu}h - i(g/2)W_{\mu}^{3}(v+h) \end{pmatrix}.$$
 (12.23)

On en déduit que le terme cinétique du Lagrangien est égal à

$$\left(D_{\mu}\boldsymbol{H}\right)^{\dagger}\left(D^{\mu}\boldsymbol{H}\right) = \frac{1}{2}\partial_{\mu}h\partial^{\mu}h + \frac{g^{2}}{8}\boldsymbol{W}_{\mu}\boldsymbol{W}^{\mu}\left(v+h\right)^{2}.$$
(12.24)

On en déduit que les trois bosons de jauge de SU(2) acquierent chacun une masse  $m_W = gv/2$ .

Nous obtenons le même comportement que dans le cas de U(1). La brisure spontanée de symétrie de jauge conduit, dans le cas où elle est locale, à des bosons vecteurs rendus massifs après avoir mangé les bosons de Goldstone associés aux générateurs brisés. Une théorie initialement invariante sous SU(2) et spontanément brisée contient trois bosons vecteurs  $W^i_{\mu}$ . Ceux-ci absorbent les trois bosons de Goldstone  $h_i$  qui apparaissent avec les trois générateurs brisés  $T^i = \sigma_i/2$ .