2021/22

MATHÉMATIQUES I

Björn Herrmann

bj.herrmann@univ-smb.fr
Bureau G-358

Contenu du cours

I. Fonctions et dérivées
II. Différentielle et calcul de variation
III. Trigonométrie
IV. Nombres complexes
V. Vecteurs et géométrie dans l'espace
VI. Intégration
VII. Équations différentielles

Une participation active lors de parties à travailler en autonomie ainsi que les sessions de TD en présentiel est indispensable pour la réussite dans ce module !

En cas de questions, n'hésitez pas à vous rapprocher de votre enseignant de groupe ou des enseignants responsables du module !

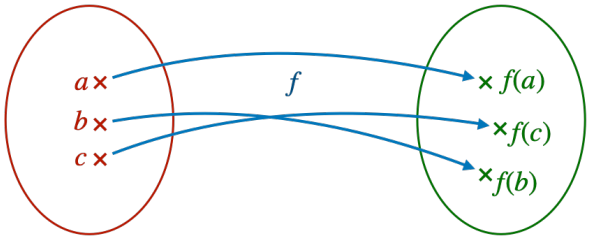
Évaluation

Test 1 : 6 octobre 2021 – portant sur les Chapitres I et II.
Test 2 : 17 novembre 2021 – portant sur les Chapitres III, IV et V.
Test 3 : 5 janvier 2022 – portant sur les Chapitres VI et VII.

La note du module sera la moyenne des trois tests.

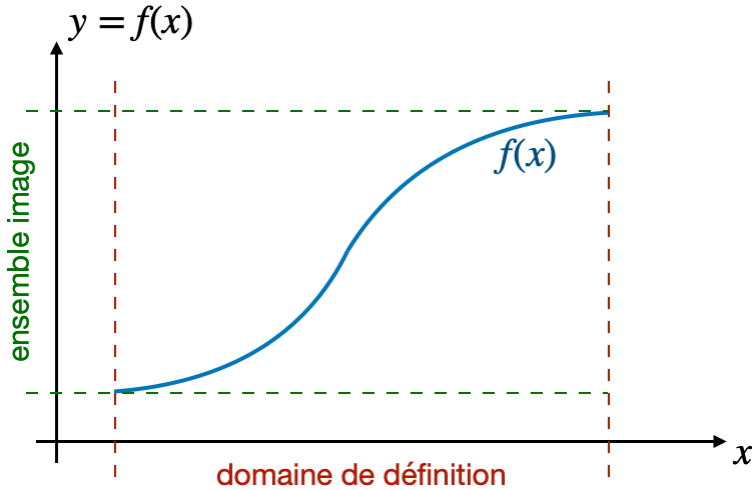
Chap. I – FONCTIONS et DÉRIVÉES

Une fonction fait correspondre à chaque nombre appartenant à un ensemble de départ un nombre dans un ensemble cible. En physique, une quantité physique qui dépend de certains paramètres est décrite par une fonction.



L'ensemble des valeurs, pour laquelle la fonction est définie, est appelé le domaine de définition de la fonction f, noté D_f. L'ensemble des valeurs obtenues par f est appelé l'ensemble image de f, notée I_f ou $f(D_f)$.

Typiquement, une fonction est représentée dans un repère orthonormé :



Exemples :

- $f(x) = x$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = e^x$
- $I(t) = I_0\, e^{-t}$
- $P(V) = nR\frac{T}{V}$

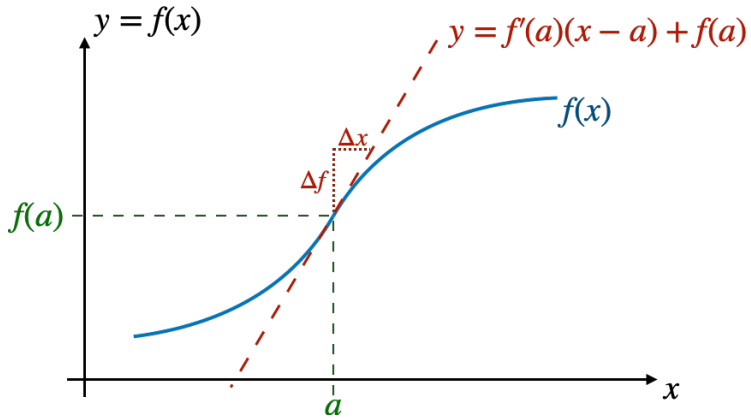
I. La dérivée d'une fonction à une variable

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie ℓ en a, c'est-à-dire lorsque :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Dans ce cas, ℓ est appelé nombre dérivé de f en a. On note $f'(a) = \ell$.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est le coefficient directeur (pente) de la tangente à la courbe de f en a.



Autrement dit, l'équation de la droite tangente à la courbe est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Pour une fonction f dérivable en a, on a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Δx et Δf sont appelés les accroissements de x et f.
On note souvent :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \text{et} \qquad f'(a) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$$

Cette notation est surtout utilisée en physique ! Elle a l'avantage d'éviter des confusions dans le cas de plusieurs variables (voir Chapitre II du cours).

<u>*Exemple :*</u> $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable pour tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction notée f' définie sur I qui à tout $x \in I$ associe le nombre réel $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

Le tableau suivant résume les dérivées des fonctions usuelles :

Domaine définition	$f(x)$	Domaine dérivabilité	$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}_+^*$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$si $n < 0$	$f(x) = x^n$ avec $n \neq 0$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$\mathbb{R}_+^*$	$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

<u>Remarque importante :</u>
Beaucoup de cas ci-dessus sont des cas particuliers de $f(x) = x^n$!

<u>Exemples :</u>

2. Dérivées : Règles de calcul

Pour deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, les règles suivantes s'appliquent concernant leurs dérivées :

$$(u+v)' = u' + g'$$
$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \qquad \text{pour } k \in \mathbb{R}$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

<u>*Exemples :*</u> $f(x) = x^2 e^x$

$g(x) = \frac{e^x}{x}$

Une fonction de la forme $f(x) = g\big(u(x)\big)$ est appelée composée de g par u. Dans ce cas, on note $f = g \circ u$ (on lit « g rond u », attention à l'ordre !).

<u>*Exemples :*</u> $f(x) = e^{\sin(x)}$

$f(x) = \cos(x^2)$

$f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et g une fonction dérivable sur un intervalle J. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) \in J$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = g'\big(u(x)\big) \cdot u'(x) \quad \Leftrightarrow \quad (g \circ u)' = (g' \circ u) \cdot u'$$

<u>*Exemples :*</u> $f(x) = e^{\sin(x)}$

En utilisant la règle générale de la composition, on peut trouver des nouvelles règles particulières (voir aussi formulaire distribué), p.ex. :

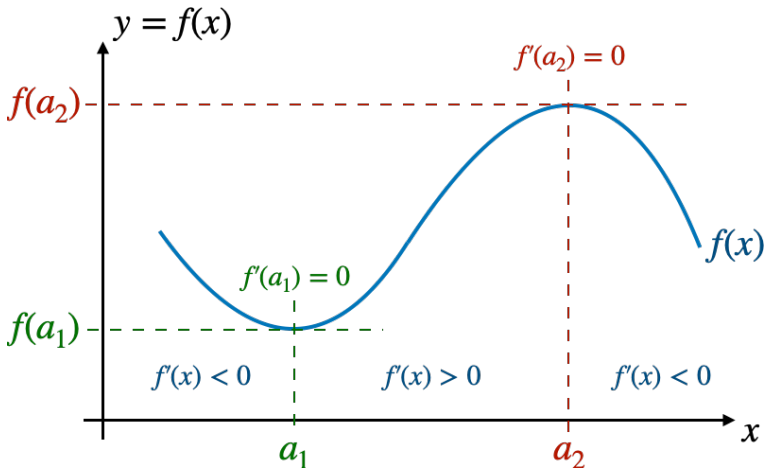
$$\sin\big(u(x)\big)' = \cos\big(u(x)\big)\, u'(x) \qquad \ln\big(u(x)\big)' = \frac{1}{\ln\big(u(x)\big)} u'(x)$$
$$\cos\big(u(x)\big)' = -\sin\big(u(x)\big)\, u'(x) \qquad \big(e^{u(x)}\big)' = e^{u(x)}\, u'(x)$$

3. Variations et extrema

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f' est nulle, alors f est constante sur I.
Si f' est strictement positive/négative sur I, alors f est strictement croissante/décroissante sur I.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f possède un extremum local en f dont la valeur est $f(a)$.

<u>*Exemple :*</u>



Il convient d'exploiter ces propriétés afin d'établir un tableau de variations dans le but de produire un graphe d'une fonction donnée.

<u>*Exemple :*</u> $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

4. Limites

Souvent, il est intéressant de connaître le comportement d'une fonction au voisinage d'une valeur interdite et/ou pour le cas où son argument tend vers l'infini. Il convient alors d'évaluer une limite :

Cette information, en complément du tableau de variations discutées juste avant, peut s'avérer utile afin de comprendre le comportement d'une fonction donnée et de tracer le graphe associé.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

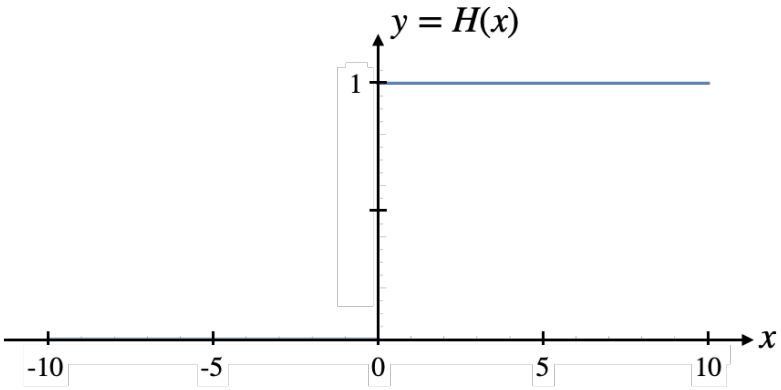
Exemple : $I(t) = I_0\, e^{-t} \quad (t > 0)$

5. La fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside, notée H (parfois aussi Θ), est définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, elle n'est alors pas dérivable sur $\mathbb{R}$.



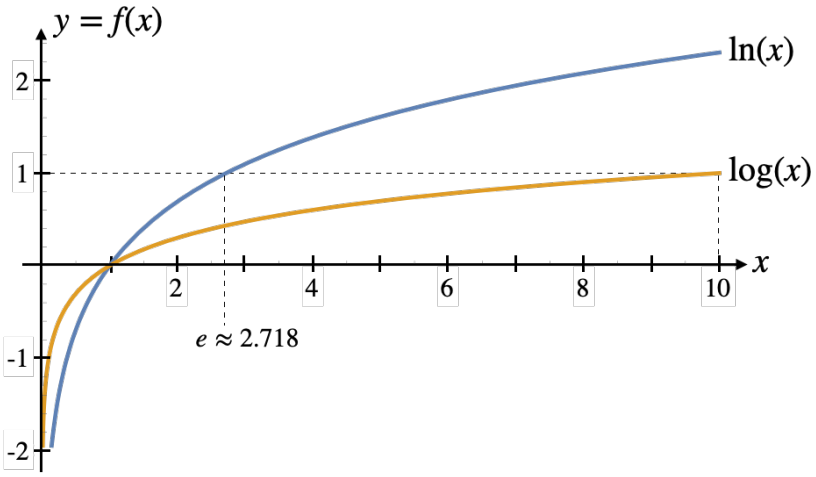
La fonction de Heaviside trouve de nombreuses applications en physique et les disciplines voisines telles que l'électronique, le traitement du signal, etc.

6. La fonction logarithme décimal

Pour $x > 0$, la fonction logarithme décimal, notée $\log$, est définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Les fonctions $\log$ et $\ln$ sont proportionnelles et ont le même sens de variation.



Attention de ne pas confondre $\log$ et $\ln$!
Parfois, on note $\log_{10}$ afin d'éviter une confusion.

Pour tout $x > 0$, on a : $\log(10^x) = x$ et $\ln(e^x) = x$

Exemples numériques :

Rappels : Règles de calculs des logarithmes (et exponentielles/puissances) :

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
$\ln(a^x) = (\ln(a))^x = x\ln(a)$	$\log(a^x) = (\log(a))^x = x\log(a)$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

$x^a x^b = x^{a+b}$	$x^0 = 1$ (aussi : $0^0 = 1$)
$(x^a)^b = x^{ab}$	$e^1 = e \approx 2.718$
$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

$\log(10^x) = x$	$10^{\log(x)} = x$ si $x > 0$
$\ln(e^x) = x$	$e^{\ln(x)} = x$ si $x > 0$

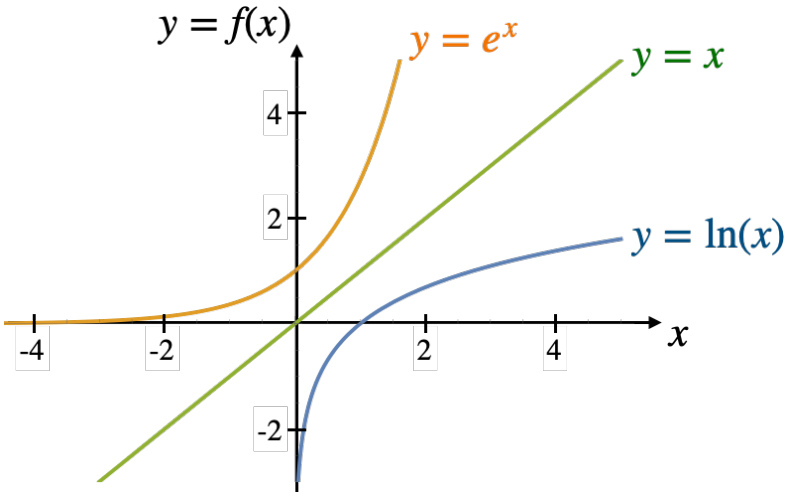
7. Fonction réciproque

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone (c.a.d. strictement croissante ou strictement décroissante) sur I, alors f admet une fonction réciproque notée f^{-1}.
Cette fonction réciproque est définie sur l'intervalle $f(I)$.

Pour tout $x \in I$: $\quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$

Pour tout $y \in f(I)$: $\quad (f \circ f^{-1})(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = y$

La fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et de même sens de variation que la fonction f sur I.
Dans un repère orthonormé du plan, les courbes des fonction f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $x = y$.



Si une fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}, et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et sa dérivée est donnée par :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

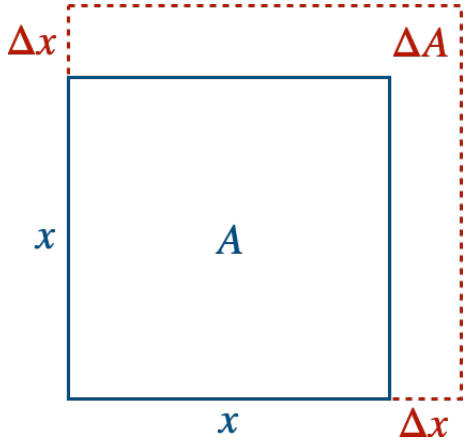
Exemple : Les fonctions $\exp$ et $\ln$ (voir graphe ci-dessus)

Exemple : La fonction carrée $f(x) = x^2$

Exemple : La fonction $\arccos$

Chap. II – DIFFÉRENTIELLE et VARIATIONS

Exemple introductif :
Soit $A(x)$ l'aire d'un carré (en cm^2) de côté x (en cm).
Si le côté x varie de Δx, de combien varie $A(x)$?



Ce type de question trouve de nombreuses applications en physique !
Plus généralement, la fonction en question peut dépendre de plusieurs variables.

Exemples :
- la tension en fonction du courant et de la résistance

$$U(R, I) = RI$$

- la pression en fonction de la température et du volume

$$PV = nRT \quad \Longrightarrow \quad P(V, T) = nR\frac{T}{V}$$

- une grandeur physique en fonction de la position et du temps, p.ex. la température ou le potentiel électrique :

$$T(x, y, t), \quad \phi(x, y, t), \quad \ldots$$

Dans ce Chapitre, nous allons d'abord discuter le cas d'une variable, puis le généraliser au cas de fonctions de plusieurs variables.
Nous allons finalement discuter des applications typiques en physique.

1. Différentielle d'une fonction à une variable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La dérivée f' donne une approximation locale linéaire (polynôme de degré 1) de la fonction f (penser à la tangente !).

Pour Δx assez petit, on a :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + b\,(\Delta x)^2 + \cdots$$

On en déduit :

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + b\,(\Delta x)^2 + \cdots$$

La partie linéaire est appelée la différentielle de la fonction f, notée $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

Pour $\mathrm{d}x$ assez petit, $\mathrm{d}f$ donnera une approximation de la variation Δf.
Il s'agit d'une approximation de premier ordre (les termes $(\Delta x)^2 + \cdots$ ont été négligés).

<u>*Exemples :*</u> $f(x) = 2x^2$

$$g(x) = 5e^{3x^2+1}$$

$$P(V) = nR\frac{T}{V}$$

En physique, on utilise beaucoup la différentielle pour le calcul d'erreurs ou d'incertitudes.

<u>Exemple :</u> *La mesure du rayon d'une sphère est de 20 cm à 1 cm près.*

1) Déterminer le volume de la sphère.

2) Quels sont les imprécisions absolues et relatives sur cette détermination du volume ?

Quand on cherche à calculer les variations relatives, il convient d'utiliser la différentielle logarithmique, si la fonction f est à valeurs strictement positives. Pour une fonction f, la différentielle logarithmique est obtenue comme suit :

$$g(x) = \ln\big(f(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}g = \mathrm{d}(\ln f) = g'(x)\mathrm{d}x = \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{f}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{d}(\ln f) = \frac{\mathrm{d}f}{f}$$

<u>Pour l'exemple précédent :</u>

2. Fonctions à plusieurs variables : Dérivées partielles

Une fonction à deux variables, notée $f(x, y)$, peut être dérivée par rapport à chacune de ces deux variables, x et y.
Les dérivées correspondantes sont appelées « dérivées partielles ».
On adopte la notation suivante pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>*Exemple :*</u> $f(x, y) = x^2 + 2xy + e^y$

Attention à la notation avec le « ∂ rond » !
Cette notation a l'avantage de clairement indiquer qu'il s'agit d'une dérivée partielle (c.a.d. les autres variables sont traitées comme des constantes) et par rapport à quelle variable on dérive.

De manière analogue au cas d'une fonction à une variable, les dérivées partielles secondes sont obtenues en dérivant les dérivées partielles d'ordre un par rapport aux variables x et y. On les note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

Attention à l'ordre des dérivations !

<u>*Pour l'exemple précédent :*</u> $f(x, y) = x^2 + 2xy + e^y$

<u>*Théorème de Schwarz[1] :*</u>
Si une fonction f, à deux variables x et y, admet des dérivées partielles secondes continues, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

[1] en France parfois appelé « Théorème de Clairaut »

Toute la discussion de cette Section se généralise sans difficulté aux fonctions de trois ou encore plus de variables, ainsi qu'aux dérivées partielles d'ordre trois et supérieur.

<u>*Exemple :*</u> $\Phi(x, y, t) = xt + yt - xy$

3. Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Soit f une fonction de deux variables x et y.
De la même manière que pour les fonctions d'une variable, on essaie d'approximer f par une fonction polynôme.

Pour des variations Δx et Δy assez petits, on a :

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \Delta f \\ &\approx f(x, y) + a\,\Delta x + b\,\Delta y + c\,(\Delta x)^2 \\ &\qquad + d\,(\Delta y)^2 + e(\Delta x)(\Delta x) + \cdots \end{aligned}$$

De manière analogue au cas d'une variable, la différentielle est la partie linéaire de l'approximation polynômiale de Δf :

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

Pour $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ assez petits, $\mathrm{d}f$ donnera une approximation de Δf (au premier ordre).

Attention à la notation : « ∂ rond » pour la dérivée partielle, mais « d droit » pour les différentielles !

Ce résultat se généralise sans difficulté à des fonctions à trois ou encore plus de variables $f(x, y, z, \ldots)$:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}z + \cdots$$

<u>*Exemple :*</u> $f(x,y) = 2x^2y + 3xy$

<u>*Exemple :*</u> $g(x,y,z) = x^2z^5 + 2xyz - 5z^2$

4. Applications : Calcul de variation et d'incertitudes

Comme déjà mentionné dans l'introduction du présent Chapitre, la différentielle est utilisée dans des calculs liés à la variation de certains paramètres (p.ex. paramètres d'un système physique) ainsi que dans les calculs liés aux incertitudes.

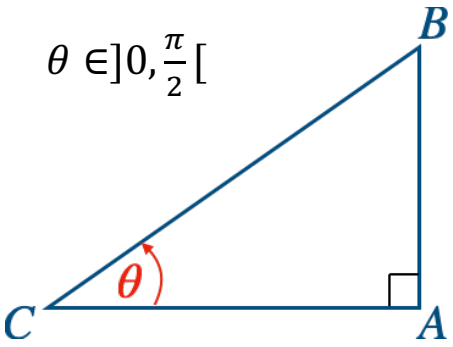
<u>Exemple :</u> *La pression d'un gaz idéal dépend du volume et de la température. Pour un gaz donné, pour une température de 20°C et un volume de 2ℓ, on mesure une pression de 10 bar. Si on augmente la température de 0,2 °C et on augmente en même temps le volume de 0,1ℓ, est-ce que la pression augmente ou diminue ?*

<u>Exemple :</u> *Si les trois côtés d'un parallélépipède rectangle augmentent de 1%, de combien augmentent son volume et sa surface ?*

Chap. III – TRIGONOMÉTRIE

Dans un triangle rectangle, les côtés sont liés comme indiqué ci-dessous :

$\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

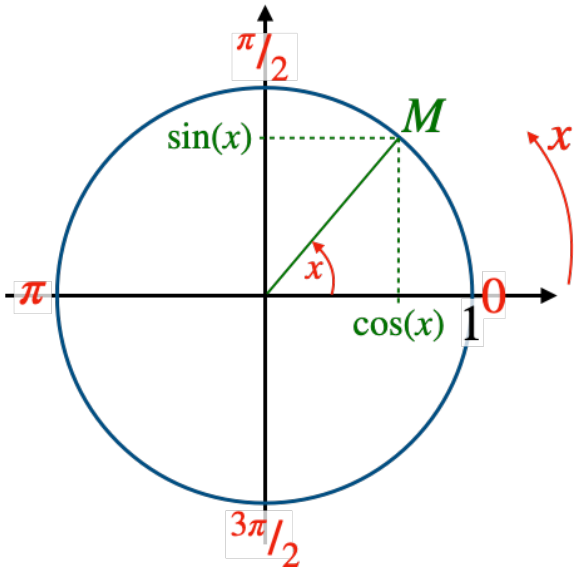


$$\cos(\theta) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$

I. Les fonctions sinus et cosinus

Dans un repère orthonormé direct, soit M l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 autour de l'origine du repère).

L'abscisse de M est le cosinus de x.
L'ordonnée de M est le sinus de x.
Le point M a pour coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$.



De cette définition des fonctions sinus et cosinus, on déduit les propriétés suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

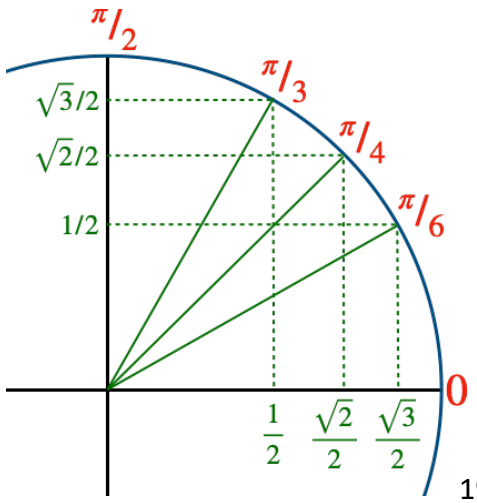
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Le tableau ci-dessous indique quelques valeurs remarquables de sin et cos :

x (en radians)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x (en degrés)	0	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

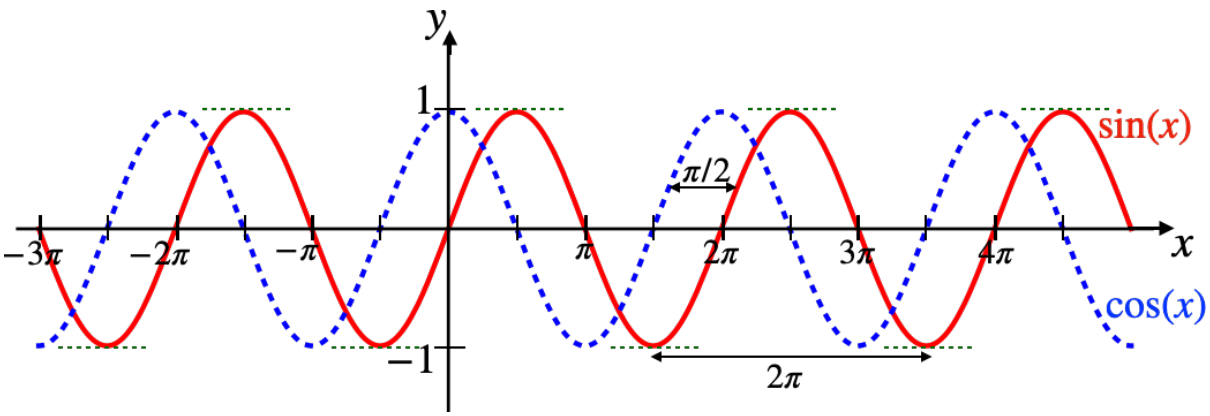


Les fonctions sinus et cosinus sont périodique de période 2π, on peut alors se contenter de les étudier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

La fonction cosinus est paire :

La fonction sinus est impaire :

Les courbes de ces deux fonctions sont appelées sinusoïdes.



Il existe de nombreuses relations entre les fonctions trigonométriques. Vous en trouvez les plus importantes sur le formulaire distribué en début de ce cours.

Exemples :

2. La fonction tangente

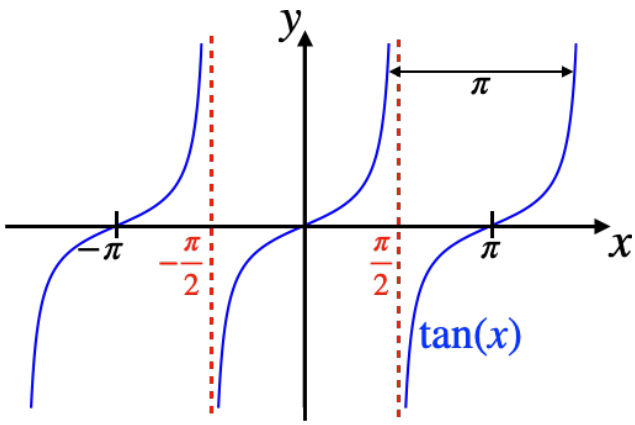
La fonction tangente est définie par : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, elle est une fonction impaire.

La fonction tangente est π-périodique.

Sa dérivée est donnée par :

$$\tan'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

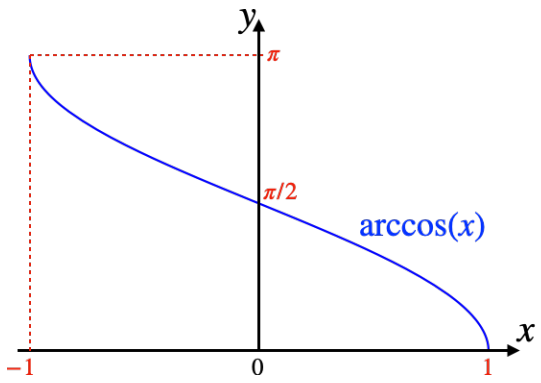


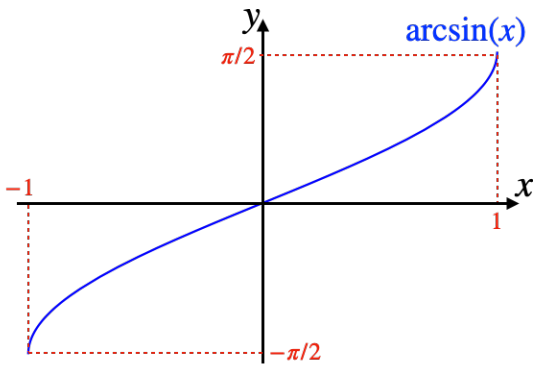
3. Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques réciproques sont les fonctions arc sinus ($\arcsin$) et arc cosinus ($\arccos$) déjà rencontrées lors de la discussion des fonction réciproques.

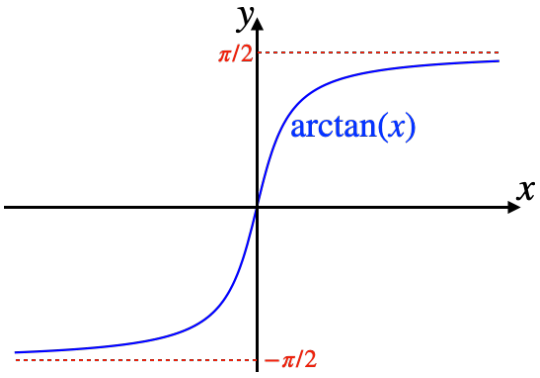
<u>Rappel : arc cosinus</u>
La restriction de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0;\ \pi]$ est strictement croissante et l'image correspondant est l'intervalle $[-1; 1]$. Alors la fonction cosinus (restreinte à l'intervalle $[0; \pi]$) admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[-1; 1]$.
Elle est appelée arc cosinus, notée $\arccos$.

<u>Rappel : arc sinus</u>
La restriction de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi/2;\ \pi/2]$ est strictement croissante et l'image correspondant est l'intervalle $[-1; 1]$. Alors la fonction sinus (restreinte à l'intervalle $[-\pi/2;\ \pi/2]$) admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[-1; 1]$.
Elle est appelée arc sinus, notée $\arcsin$.





<u>La fonction arc tangente</u>
La restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $[-\pi/2;\ \pi/2]$ est strictement croissante et l'image correspondant est tout $\mathbb{R}$.
Alors la fonction tangente (restreinte à l'intervalle $[-\pi/2;\ \pi/2]$) admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est appelée arc tangente, notée $\arctan$.

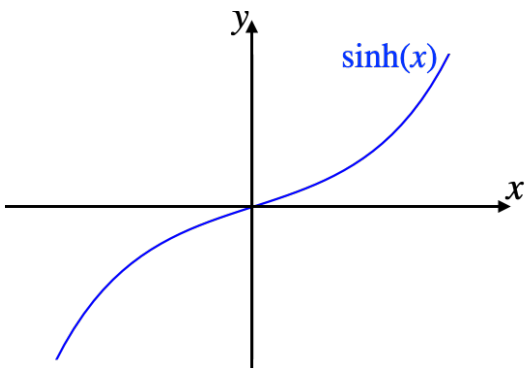


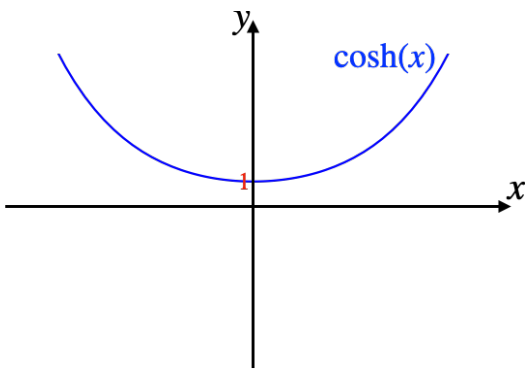
Les fonctions ci-dessus satisfont aux propriétés suivantes :

4. Les fonctions hyperboliques

Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, notées $\sinh$ et $\cosh$ (ou parfois simplement sh et ch), sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$





Ces fonctions sont respectivement impaire et paire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions hyperboliques satisfont à la propriété :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Les dérivées des fonctions hyperboliques sont :

$$\cosh'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x) \qquad \sinh'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x)$$

On remarque une certaine analogie avec les fonctions sinus et cosinus, qui deviendra encore plus claire lors du prochain chapitres sur les nombres complexes.

Chap. IV – NOMBRES COMPLEXES

Exemple introductif :
Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant de l'équation.
Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle :

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

Pas de solution réelle pour $\Delta < 0$… généralisation des nombres réelles !

I. Définition et vocabulaire

On admet qu'il existe un ensemble de nombres, appelé les nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$
- tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels

Remarques :
$z = x + iy$ est appelé la forme algébrique de z.
x est appelé la partie réelle de z, y est appelé la partie imaginaire de z.
On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, z est un nombre réel.
Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, z est appelé imaginaire.

Interprétation graphique :
Dans un repère orthonormé, à tout nombre complexe $z = x + iy$ (écrit sous forme algébrique), on associe un point M avec coordonnées (x, y).

2. Les opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

Pour calculer dans $\mathbb{C}$, on applique les règles de calcul « habituelles » des nombres réels, et on remplace :

Exemples :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
On appelle le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ le nombre conjugué de z.

Exemples :

Propriétés :
Pour un nombre complexe $z = x + iy$, on a :

Pour deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, on a :

3. Équations du second degré (revisitées)

L'extension des nombres réels aux nombres complexes permet de résoudre toute équation $ax^2 + bx + c = 0$ du second degré quelque soient ses coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjugées :

4. Forme trigonométrique et notation exponentielle

Pour un nombre complexe $z = x + iy$ (écrit sous forme algébrique), on appelle module de z, noté $|z|$, le réel positif :

<u>Remarques :</u>
Le produit de z avec son conjugué est égal au module carré :

Dans le repère orthonormé, le module correspond à la distance entre l'origine et le point $M(x, y)$.

A la place des parties réelles et imaginaires, le point M peut être défini en fonction du module $|z|$ et de l'angle θ comme indiqué dans le schéma. Cet angle est appelé argument du nombre complexe z. Plus généralement, toute mesure de cet angle est appelée argument de z. On note $\theta = \arg(z)$.

On a alors (voir graphe ci-dessus) :

En conséquence, le nombre complexe z peut s'écrire :

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

Exemple : $z = -1 + i\sqrt{3}$

Propriétés :
Pour deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls on a :

On pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Le module de $e^{i\theta}$ est 1, et θ est un argument de $e^{i\theta}$.
On peut alors écrire :

Cette dernière forme est appelée écriture exponentielle de z.

Exemples :

Propriétés :
Pour deux nombres complexes $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ non nuls écrits sous forme exponentielle on a :

Remarque :
La forme exponentielle est très pratique pour effectuer des produits ou des quotients (penser aux propriétés de la fonction exponentielle !).

Exemples :

Finalement, de l'égalité $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$, on obtient les relations suivantes (appelées relations d'Euler) :

On obtient également la formule de Moivre :

5. Racine n-ièmes d'un nombre complexe

Pour un entier $n \geq 1$, l'équation $z^n = 1$ admet n solutions dans $\mathbb{C}$:

Ces solutions sont appelées racines n-ièmes de l'unité.

<u>*Exemple :*</u> *Déterminer les racines 4 èmes de l'unité.*
Calculer ensuite la somme de ces racines.

<u>Propriété :</u>
Pour un entier $n \geq 1$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à zéro.

Pour un nombre complexe $a = re^{i\theta}$ et un nombre entier $n \geq 1$, l'équation $z^n = a$ admet n solutions dans $\mathbb{C}$:

Ces solutions sont appelées racines n-ièmes du nombre complexe a.

<u>*Exemple :*</u> *Déterminer les racines cubiques de* $a = 1 - i\sqrt{3}$