Examen Théorie Quantique des Champs

Master PSC
Univ. Grenoble Alpes / Univ. Savoie Mont Blanc

6 février 2023

Durée: 3 heures

Documents autorisés:
Polycopié et notes manuscrites associées au cours et aux exercices du module TQC.

Partie 1 – Théorie de Stueckelberg

La théorie de Stueckelberg permet de décrire aussi bien un champ vectoriel de masse M qu'un champ électromagnétique de masse nulle. Son Lagrangien inclut un terme de masse pour le potentiel vecteur A_μ de sorte que

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \;+\; \frac{M^2}{2}\,A_\mu A^\mu \;-\; \frac{\lambda}{2}\,(\partial A)^2 \;-\; J^\mu A_\mu \;\; . \tag{1}$$

On rappelle que le tenseur électromagnétique est lié au champ par $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Le dernier terme du Lagrangien contient le terme de couplage au courant J^μ. On rappelle que ce dernier se conserve et sa quadri-divergence est ainsi nulle.
Nous commençons notre étude par une analyse classique.

1. Dériver les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

2. Pour le cas $\lambda = 0$, montrer que le potentiel vecteur A^μ vérifie dans le vide une équation de Klein-Gordon dont la masse associée est M.

3. Calculer la quadri-divergence de l'expression obtenue en 1. et montrer que

$$\Big[\lambda\Box + M^2\Big]\big(\partial A\big) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

4. Justifier alors que, dans le cas général où $\lambda \neq 0$, la quadri-divergence $\big(\partial A\big)$ se comporte comme un champ scalaire vérifiant l'équation de Klein-Gordon avec masse associée

$$m^2 \;=\; \frac{M^2}{\lambda}\,. \tag{3}$$

   Dans la suite, on choisira $\lambda > 0$ afin que l'on traite des états physiques ayant $m^2 > 0$.

La relation (2) conduit à une décomposition du potentiel vecteur,

$$A^\mu \;=\; A^\mu_S + A^\mu_T\,. \tag{4}$$

La partie dite scalaire A^μ_S est proportionnelle au gradient de la divergence ∂A, alors que la partie dite transverse A^μ_T se comporte comme un champ vectoriel de masse M.

5. Montrer que la partie scalaire, définie par

$$A^\mu_S \;=\; -\frac{1}{m^2}\partial^\mu\big(\partial A\big)\,, \tag{5}$$

   vérifie l'équation de Klein-Gordon avec masse m.

6. Montrer ensuite que la partie transverse A^μ_T, définie par la relation (4), a une quadri-divergence nulle, exactement comme le champ vectoriel massif de la question 2.

7. Montrer finalement que la partie transverse A^μ_T vérifie l'équation de Klein-Gordon avec masse M.

Partie 2 – Brisure de symétrie dans un modèle simplifié

Dans cette partie, nous allons étudier un modèle simplifié pour la brisure de symétrie et la physique associée au mécanisme de Brout-Englert-Higgs. Ce modèle simplifié, basé sur la symétrie de jauge $U(1)$, partage en effet beaucoup de points avec le Modèle Standard de la physique des particules.

Le modèle simplifié contient un champ de jauge A_μ, un champ scalaire complexe ϕ, ainsi que des champs fermioniques ψ_L et ψ_R correspondant aux fermions de chiralité gauche et droite, respectivement. Le Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_{\text{jauge}} + \mathcal{L}_{\text{scalaire}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} \,. \tag{6}$$

Le Lagrangien associé au champ de jauge est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} \;=\; -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{7}$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Le Lagrangien associé au champ scalaire est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{scalaire}} \;=\; \big(D_\mu \phi\big)^* \big(D^\mu \phi\big) - V(\phi) \,, \tag{8}$$

où le potentiel scalaire est donné par

$$V(\phi) \;=\; -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda \big(\phi^* \phi\big)^2 \,. \tag{9}$$

On rappelle l'expression de la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, avec la charge électrique q. Finalement, le Lagrangien fermionique s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} \;=\; i\, \bar{\psi}_L \, D_\mu \gamma^\mu \, \psi_L + i\, \bar{\psi}_R \, \partial_\mu \gamma^\mu \, \psi_R - y \, \big(\bar{\psi}_L \, \phi \, \psi_R + \bar{\psi}_R \, \phi \, \psi_L \big) \,. \tag{10}$$

Ici, y est un paramètre réel dont on examinera le rôle dans la suite. On note la différence entre le terme liant $\bar{\psi}_L$ et ψ_L et celui liant $\bar{\psi}_R$ et ψ_R. Le premier contient la dérivée covariante, alors que le second contient la dérivée simple. Ceci peut être vu comme une analogie à la situation en théorie électrofaible, où le boson W ne couple qu'aux fermions de chiralité gauche.

Pour commencer, examinons le champs scalaire complexe ϕ, que l'on pourra écrire comme

$$\phi \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\varphi_1 + i \varphi_2 \big) \,. \tag{11}$$

Nous nous intéressons en particulier à la situation lors de la brisure de la symétrie de jauge.

1. Justifier que lors de la brisure de symétrie de jauge, le champ scalaire peut être développé selon

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(v + h(x) + i g(x) \Big) \,, \tag{12}$$

   où v est la valeur dans le vide. Justifier que h peut être interprété comme le boson de Higgs, et g comme un boson de Goldstone.

2. Déterminer la masse du champ h, p.ex. en développant le(s) terme(s) approprié(s) du Lagrangien.

Ensuite, nous allons nous intéresser au champ de jauge A_μ.

3. En vous basant sur le Lagrangien ci-dessus, quelle est la masse de A_μ avant la brisure de la symétrie de jauge?

4. Donner le terme de masse pour le champ A_μ après la brisure de la symétrie de jauge. Donner la valeur de la masse m_A en fonction des autres paramètres physiques.

5. Justifier que le champ $g(x)$ peut être absorbé par le champ $A_\mu(x)$ à l'aide d'une transformation de jauge appropriée.

Maintenant, nous allons nous intéresser aux états fermioniques.

6. En partant du Lagrangien, justifier que la brisure de symétrie (et donc le mécanisme de Brout-Englert-Higgs) génère également un terme de masse pour les fermions et donner son expression.

7. Basé sur le résultat de la question précédente, justifier qu'un état massif fermionique n'est jamais purement gauche ou droit. Autrement dit, justifier qu'un état physique de masse non nulle est un mélange des deux états de jauge ψ_L et ψ_R.

Finalement, nous allons nous intéresser aux termes d'interactions contenus dans le Lagrangien du modèle.

8. Justifier que le boson de Higgs interagit avec une paire de fermions. Donner le terme d'interaction associé et donner la règle de Feynman associée à cette interaction.

9. En déduire l'amplitude associée à la désintégration d'un boson de Higgs h en une paire de fermions. Donner le diagramme associé. Montrer par un calcul simple que l'amplitude de cette désintégration est proportionelle à la masse des fermions dans l'état final.

10. Basé sur les réponses aux questions précédentes, pour un boson de Higgs avec masse $m_h =$ 125 GeV, quelles seraient à priori les voies de désintégration fermionique privilégiées?

11. Quel est alors le rôle du paramètre y?
    Remarque: ce paramètre est appelé couplage de Yukawa.

Dans la dernière partie, nous allons considérer des corrections d'ordre supérieur pour la désintégration discutée ci-dessus.

12. En vous basant sur les termes d'interactions du Lagrangien (après la brisure de symétrie), donner les diagrammes à une boucle associés à la désintégration du boson de Higgs en une paire fermionique (voir question 9).

13. Parmi les diagrammes trouvés à la question précédente, lesquels contiennent une divergence ultra-violette? Lesquels sont convergeants?

14. Donner les diagrammes correspondants aux corrections réelles, c.a.d. des diagrammes à l'arbre qui contribuent au même ordre que les boucles identifiées à la question 12.