Examen Théorie Quantique des Champs

Master PSC / Master MQ
Univ. Grenoble Alpes / Univ. Savoie Mont Blanc

15 février 2022

Partie 1 – Boson vecteur massif et champ de Proca

Le potentiel vecteur A^μ décrit un champ vectoriel réel. Il est associé au Lagrangien

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A^\mu \,, \tag{1}$$

qui diffère de celui de l'électromagnétisme par le terme de masse $\mu^2 A^2/2$, où le paramètre μ sera pris strictement positif. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini par

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{2}$$

1. Dériver les équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right] \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} \,, \tag{3}$$

   associées au Lagrangien (1) que l'on pourra mettre sous la forme

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mu^2\eta^{\mu\alpha}A_\mu A^\alpha \,. \tag{4}$$

2. Calculer la quadri-divergence de l'expression ainsi obtenue. En déduire que les équations de Proca se mettent sous la forme

$$\left[\Box + \mu^2\right] A_\mu \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \,. \tag{5}$$

3. Le champ de Proca est susceptible de se propager dans le vide en l'absence de source. Il est alors décrit par le potentiel vecteur

$$A^\mu \;=\; \epsilon^\mu \, e^{-ikx} \,, \tag{6}$$

   où le quadri-vecteur $k = (\omega_{\vec{k}} > 0, \vec{k})$. Calculer l'énergie $\omega_{\vec{k}}$ en fonction de la masse μ et de l'impulsion $\vec{k}$. Quelle relation le quadri-vecteur d'onde k et la polarisation ϵ entretiennent-ils?

4. En déduire l'existence de trois états de polarisation $\epsilon(\vec{k}, \lambda)$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ orthogonaux entre eux associé à l'onde plane précédente de vecteur d'onde $\vec{k}$. Ces vecteurs vérifient la relation d'orthonormalité

$$\epsilon(\vec{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\vec{k}, \sigma) \;=\; \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \;=\; \eta_{\lambda\sigma} \,. \tag{7}$$

   Que valent-ils dans le cas où $\vec{k} = \vec{0}$ (champ de Proca au repos) et lorsque $\vec{k}$ est aligné le long de l'axe Oz?

En théorie quantique des champs, le développement de Fourier du potentiel vecteur précédent A^μ en une somme d'ondes planes se met sous la forme

$$A_\mu(x) \;=\; \int \mathrm{d}\tilde{k} \sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \left[a(\vec{k}, \lambda)e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda)e^{ikx} \right] \tag{8}$$

avec

$$\mathrm{d}\tilde{k} \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \,. \tag{9}$$

Les opérateurs d'annihilation et de création vérifient la condition

$$\left[a(\vec{k}, \lambda), a^\dagger(\vec{p}, \sigma)\right] \;=\; (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^3(\vec{k} - \vec{p})\delta_{\lambda\sigma} \,, \tag{10}$$

tous les autres commutateurs étant nuls.

5. Calculer la valeur dans le vide du T-produit

$$T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\} \;=\; \theta(x^0-y^0)A_\mu(x)A_\nu(y)+\theta(y^0-x^0)A_\nu(y)A_\mu(x)\,. \tag{11}$$

On établira que

$$T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\} \;=\; -\int \mathrm{d}\tilde{k}\,\left[\theta(x^0-y^0)e^{-ik(x-y)}+\theta(y^0-x^0)e^{ik(x-y)}\right]\left[\eta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right]. \tag{12}$$

On remarquera avec profit que la composante temporelle du quadri-vecteur k^μ de l'expression précédente est égale à l'énergie $\omega_{\vec{k}}$.

6. Le propagateur de Feynman $G_{\mu\nu}(k)$ du champ vectoriel massif est défini par

$$G_{\mu\nu}(k) \;=\; -\,\frac{\eta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\epsilon}\,, \tag{13}$$

dans l'espace des quadri-vecteurs k. Le propagateur de Feynman spatio-temporel $G_{\mu\nu}(x)$ est sa transformée de Fourier

$$G_{\mu\nu}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k e^{-ikx}G_{\mu\nu}(k)\,. \tag{14}$$

Démontrer l'égalité

$$\langle 0|\,T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}\,|0\rangle \;=\; iG_{\mu\nu}(x-y)-\frac{i}{\mu^2}\delta^0_\mu\delta^0_\nu\delta^4(x-y)\,. \tag{15}$$

On pourra commencer par établir la relation précédente pour les composantes espace-espace puis espace-temps du tenseur $G_{\mu\nu}$. Dans le calcul plus délicat de la composante temps-temps, le contour d'intégration ne peut être rebouclé dans le plan complexe de la variable $k^0 = k'^0 + ik''^0$ que si l'integrand tend vers 0 lorsque k'^0 tend vers $\pm\infty$.

Remarque: L'expression (15) indique que la valeur dans le vide du T-produit de $A_\mu(x)$ avec $A_\nu(y)$ n'est pas covariante de Lorentz à cause du second terme du membre de droite. Cette contribution non-covariante au T-produit est cependant une distribution localisée au point de contact $x = y$ où de toute manière le produit chronologique (en fait la fonction $\theta(x^0-y^0)$) n'est pas défini. La régularisation du produit chronologique consiste à éradiquer purement et simplement ce terme non-covariant et à poser désormais

$$\langle 0|\,T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}\,|0\rangle \;=\; iG_{\mu\nu}(x-y)\,, \tag{16}$$

en sorte que le terme correspondant au propagateur du champ vectoriel massif joignant deux vertex dans un diagramme de Feynman est simplement donné par $iG_{\mu\nu}(k)$.

Partie 2 – Règles de Feynman avec un scalaire

Nous nous intéressons dans cette partie à une théorie scalaire mettant en scène des électrons et des positrons interagissant entre eux par l'échange d'une particule scalaire neutre qui pourrait incarner le boson de Higgs par exemple. Le Lagrangien de ce modèle est donné par

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I\,, \tag{17}$$

où les deux contributions sont données par

$$\mathcal{L}_0 \;=\; \bar{\psi}\big(i\partial\!\!\!/ - m\big)\psi \;+\; \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2\,, \tag{18}$$

$$\mathcal{L}_I \;=\; \lambda\,\bar{\psi}\psi\phi\,. \tag{19}$$

On s'intéresse à la diffusion élastique d'un électron sur un positron via le Lagrangien précédent,

$$e^-(\boldsymbol{p_a}, s_a) + e^+(\boldsymbol{p_b}, s_b) \;\longrightarrow e^-(\boldsymbol{p_1}, s_1) + e^+(\boldsymbol{p_2}, s_2)\,. \tag{20}$$

Le champ fermionique ψ se développe en fonction des opérateurs b et $d^\dagger$, alors que $\bar{\psi}$ s'exprime en fonction de $b^\dagger$ et d (voir Chapitre VI du cours). Le champ scalaire neutre est une fonction des opérateurs a et $a^\dagger$ (voir Chapitre III du cours).

On rappelle que la matrice S est liée au Lagrangien d'interaction comme suit:

$$\mathcal{S} \;=\; T\left\{\exp\left(i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_I(x)\right)\right\}\,. \tag{21}$$

1. Calculer l'élément de matrice

$$\mathcal{S}_{fi} \;=\; \langle 0|\,d(p_2,s_2)\,b(p_1,s_1)\,\mathcal{S}\,b^\dagger(p_a,s_a)\,d^\dagger(p_b,s_b)\,|0\rangle \tag{22}$$

   Montrer que

$$\mathcal{S}_{fi} \;=\; (2\pi)^4\,\delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2)\,\mathcal{M}_{fi}\,. \tag{23}$$

2. Calculer $\mathcal{M}_{fi}$ de manière à faire apparaître les diagrammes de Feynman qui président à la diffusion (20) et établir les règles de Feynman correspondantes.

Partie 3 – Mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Dans cette dernière partie, nous allons étudier le mécanisme de Brout-Englert-Higgs dans le cadre de la théorie électrofaible basée sur le groupe de jauge $SU(2)$.

On considère le doublet de $SU(2)$

$$H \;=\; \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \;=\; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

qui peut être identifié avec le vecteur de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{\varphi} \;=\; \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\big)\,. \tag{25}$$

Une transformation de jauge de groupe $SU(2)$ transforme le doublet H ainsi que le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ selon

$$H \;\longrightarrow\; H' \;=\; U\,H\,, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\varphi} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{\varphi}' \;=\; U\,\boldsymbol{\varphi}\,, \tag{27}$$

où la matrice U peut s'écrire

$$U \;=\; \begin{pmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \;=\; e^{-i\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}/2}\,. \tag{28}$$

Ici, le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ contient les trois matrices de Pauli liées aux générateurs du groupe $SU(2)$ par $\tau_k = -i\sigma_k/2$ ($k = 1, 2, 3$). Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ contient les trois “angles” θ_1, θ_2 et θ_3. Les matrices de Pauli peuvent être exprimées comme

$$\sigma_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Le Lagrangien de la théorie s'écrit

$$\mathcal{L} \;=\; \big(D_\mu H\big)^\dagger \big(D^\mu H\big) - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\boldsymbol{W}^{\mu\nu} - V \tag{30}$$

où le vecteur $\boldsymbol{W}_\mu = (W^1_\mu, W^2_\mu, W^3_\mu)$ contient les trois bosons de jauge et le tenseur $\boldsymbol{W}_{\mu\nu}$ est défini par

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu - g\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu\,, \tag{31}$$

g étant la constante de couplage associée au groupe $SU(2)$. Le dernier terme dans l'équation précédente désigne un produit vectoriel. La dérivée covariante D_μ est donnée par

$$D_\mu \;=\; \partial_\mu + ig\boldsymbol{W}_\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\,. \tag{32}$$

Finalement, le potentiel est donné par

$$V \;=\; \frac{\lambda}{4}v^4 - \mu^2 H^\dagger H + \lambda\big(H^\dagger H\big)^2 \;=\; \frac{\lambda}{4}\big(\boldsymbol{\varphi}^2 - v^2\big)^2\,. \tag{33}$$

On rappelle que le Lagrangien (30) est invariant sous la transformation de jauge donnée en (27).

Nous avons montré en cours que, lors de la brisure spontané de la symétrie $SU(2)$ (symétrie électrofaible), le vide $H_0 \equiv \boldsymbol{\varphi}_0$ peut s'écrire

$$\boldsymbol{\varphi}_0 \;=\; \big(v, 0, 0, 0\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad H_0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Ici, v est la valeur dans le vide du doublet H.

1. En évaluant une variation $\delta H_0 = H_0' - H_0$ du vide suite à une transformation de jauge $SU(2)$, justifier que le vide casse les trois générateurs $-i\sigma_k/2$ $(k = 1, 2, 3)$ du groupe $SU(2)$.

2. Conclure concernant le nombre de bosons de Goldstone présents après la brisure spontanée de la symétrie $SU(2)$.

Pour un champ de Higgs H donné, nous allons maintenant considérer une transformation de jauge U de $SU(2)$ telle que

$$H \;=\; UH' \qquad \text{avec} \;\; H' \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}\,, \tag{35}$$

où h est l'excitation du champ autour du vide (boson de Higgs). On remarque que le vecteur associé s'écrit alors $\boldsymbol{\varphi}' = (v + h, 0, 0, 0)$.

3. Justifier qu'une telle transformation de jauge existe en considérant la structure de sa matrice associée donnée en (28).

4. Justifier que le Lagrangien peut alors s'écrire

$$\mathcal{L} \;=\; \big(D_\mu H\big)^\dagger \big(D^\mu H\big) - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\boldsymbol{W}^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4}\big(2vh + h^2\big)^2 \tag{36}$$

Nous allons finalement considérer le terme cinétique du Lagrangien.

8. Évaluer la dérivée covariante $D_\mu H$ après la brisure spontanée de symétrie $SU(2)$, c.a.d. pour $H = 1/\sqrt{2}(0, v + h)$.

9. En explicitant le terme cinétique du Lagrangien (36), justifier que les trois bosons de jauge obtiennent en effet une masse grâce au méchanisme de Brout-Englert-Higgs et donner le terme de masse associé.

10. Donner aussi le terme de masse associé au boson de Higgs h.

11. Finalement, donner les termes d'interaction du boson de Higgs h et schématiser ces interactions sous forme de diagramme simple.