Chapitre 9 – Exercices

Exercice 9.1

Déduire la relation (9.33) de la loi de transformation pour les potentiels vecteurs

$$\boldsymbol{A}_\mu \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{A}'_\mu \;=\; \mathcal{R}_\theta \boldsymbol{A}_\mu \mathcal{R}_\theta^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu \mathcal{R}_\theta)\mathcal{R}_\theta^{-1} \,. \tag{9.57}$$

Montrer que dans la limite où les angles θ^a sont infiniment petits, la transformation de jauge $\mathcal{R}_\theta$ engendre une variation du potentiel vecteur A_μ^a égale à

$$\delta A_\mu^a \;=\; \partial_\mu \theta^a + g C_{bc}^a \theta^b A_\mu^c \,. \tag{9.58}$$

Le groupe $SU(2)$ constitue une excellente illustration de la théorie générale. L'algèbre de $SU(2)$ est l'espace vectoriel physique usuel $\mathbb{R}^3$ muni comme seconde loi interne du produit vectoriel $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$. Les potentiels vecteurs associés aux trois générateurs $T_1 = \boldsymbol{T}_x$, $T_2 = \boldsymbol{T}_y$ et $T_3 = \boldsymbol{T}_z$ de l'algèbre sont notés

$$A_\mu^a \;=\; W_\mu^a = \left\{W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3\right\} \;=\; \boldsymbol{W}_\mu \,. \tag{9.59}$$

Etablir alors que dans ce cas, la relation (9.58) se met sous la forme

$$\delta \boldsymbol{W}_\mu \;=\; \partial_\mu \boldsymbol{\theta} + g\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{W} \,. \tag{9.60}$$

Exercice 9.2

Etablir la relation (9.36).