Examen Théorie Quantique des Champs

Master PSC
Univ. Grenoble Alpes / Univ. Savoie Mont Blanc

19 février 2024

Durée: 3 heures (tiers-temps: 4 heures)

Documents autorisés:
Polycopié et notes manuscrites associées au cours et aux exercices du module TQC.

L'argumentation ainsi que la présentation des démarches et résultats prennent une part importante dans l'évaluation!

Partie 1 – Annihilation de matière noire dans un modèle de type "Higgs portal"

Nous considérons le modèle suivant contenant un candidat pour la matière noire: En plus des fermions f du modèle standard et le boson de Higgs h (après brisure de symétrie électrofaible), il contient un champ scalaire réel ϕ. Le Lagrangien d'interaction du modèle contient les termes

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \supset y\, h\, \bar{f} f \;+\; \lambda\, h\, \phi\phi\,, \tag{1}$$

où les couplages sont y pour l'interaction de Yukawa entre le boson de Higgs et λ pour l'interaction trilinéaire entre le boson de Higgs et une paire de scalaires. On suppose que le scalaire ϕ est un candidat à la matière noire présente dans l'Univers.

Dans la suite, on s'intéressera au processus d'annihilation de matière noire en une paire de fermions,

$$\phi\,\phi \;\longrightarrow\; f\,\bar{f}\,. \tag{2}$$

Ce processus joue un rôle important dans le calcul de la densité relique de matière noire, c.a.d. la quantité de matière noire présente aujourd'hui dans notre Univers. Il peut aussi être considéré dans le cadre de la détection indirecte de matière noire (pour p.ex. $f = e^-$ et $\bar{f} = e^+$).

On notera p_a et p_b les impulsions des scalaires de l'état initial. Pour l'état final, on utilisera p_1 (p_2) pour l'impulsion du fermion f (anti-fermion $\bar{f}$) ainsi que s_1 et s_2 pour leur spin respectif.

1. Basé sur le Lagrangien d'interaction donné ci-dessus, trouver le(s) diagramme(s) de Feynman à l'arbre associé(s) au processus $\phi\phi \longrightarrow f\bar{f}$. D'après vous, pourquoi ce modèle est-il surnommé "Higgs portal" ("portail de Higgs")?

2. Écrire l'expression de la matrice $\mathcal{S}$ associée au Lagrangien d'interaction et développer à l'ordre 2 en $\mathcal{L}_{\text{int}}$.

3. Paramétrer l'état initial $|i\rangle$ ainsi que l'état final $|f\rangle$ en utilisant des opérateurs de création appliqués sur le vide $|0\rangle$.

4. Donner l'expression de l'élément de matrice S_{fi} associé au processus $\phi\phi \longrightarrow f\bar{f}$. On ignorera les coefficients de normalisation (appelés C_i et C_f dans le cours) et on se concentrera uniquement sur l'élément de matrice $\langle f|\, S\, |i\rangle$.

5. Justifier que les ordres 0 et 1 de l'expression obtenue lors de la question précédente ne contribuent pas au processus $\phi\phi \longrightarrow f\bar{f}$.

6. Évaluer ensuite le terme d'ordre 2. Identifier les termes non nuls et dériver les formules de réduction nécessaires.

7. En utilisant les formules de réduction obtenues, et en introduisant le propagateur de Feynman, en déduire finalement l'amplitude associée au processus $\phi\phi \longrightarrow f\bar{f}$.

8. Basé sur le Lagrangien d'interaction donné, trouver les diagrammes représentant les corrections à une boucle au processus $\phi\phi \longrightarrow f\bar{f}$. On se contentera de la représentation des diagrammes de Feynman sans calcul des amplitudes associées.

Partie 2 – Champ scalaire dans un espace à 4+1 dim.

Dans les théories de Kaluza et Klein, l'espace contient une dimension supplémentaire de longueur totale $L = 2\pi R$ se rebouclant sur elle–même, exactement comme la boucle phonique. Tout point de l'espace–temps est alors décrit par ses coordonnées

$$x^A = \left(x^0 \equiv t\ ,\ \vec{x} \equiv \{x, y, z\}\ ,\ x^4 \equiv u\right) \quad , \tag{3}$$

où l'indice A se substitue à l'indice μ et prend les valeurs allant de 0 à 4. La longueur L de la dimension supplémentaire est constante. L'espace physique peut se voir comme le produit direct $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{U}(1)$ dont la géométrie plate est décrite par la métrique diagonale $\eta_{AA} = (+1, -1, -1, -1, -1)$.

On considère le champ scalaire neutre φ se déployant dans cet espace. Son Lagrangien s'écrit en généralisant la forme étudiée en cours

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\,\eta^{AB}\,\partial_A\varphi\,\partial_B\varphi \;-\; \frac{1}{2}\,m^2\,\varphi^2 \quad . \tag{4}$$

1. Écrire l'équation d'Euler–Lagrange que le champ φ vérifie et montrer qu'il s'agit de l'équation de Klein–Gordon à 4+1 dimensions.

2. Quelle condition l'impulsion $p \equiv k^4$ le long de la quatrième dimension spatiale vérifie–t–elle ? Cette condition fait apparaître l'entier relatif n. Montrer alors que dans l'espace–temps usuel, tout se passe comme si le champ φ avait une infinité de masses possibles m_n dont on donnera l'expression en fonction de m, du rayon R et de l'entier n. Cette série infinie d'états excités le long de la dimension supplémentaire s'appelle **la tour de Kaluza–Klein**.

3. En 4+1 dimensions, le développement de Fourier du champ quantique φ en une somme d'ondes planes se met sous la forme

$$\varphi\left(x^A \equiv \{t, \vec{x}, u\}\right) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\,\omega}\, \left\{a_n(\vec{k})\, e^{-\,ikx} \;+\; a_n^\dagger(\vec{k})\, e^{ikx}\right\} \quad . \tag{5}$$

   La penta–impulsion k a pour composantes

$$k^A = \left(k^0 \equiv \omega\ ,\ \vec{k} \equiv \{k_x, k_y, k_z\}\ ,\ k^4 = p\right) \quad , \tag{6}$$

   de sorte que le produit scalaire kx se développe en

$$kx \;=\; \eta_{AB}\, k^A x^B = \omega\, t \;-\; \vec{k}\cdot\vec{x} \;-\; p\, u \quad . \tag{7}$$

   On exprimera l'énergie ω en fonction du vecteur $\vec{k}$, de la masse m, de l'entier n et du rayon R.

4. Le champ φ et son moment conjugué Π entretiennent entre eux la relation de commutation

$$\left[\varphi(t, \vec{x}, u), \Pi(t, \vec{y}, v)\right] \;=\; i\,\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\;\delta(u - v) \quad , \tag{8}$$

   qui traduit la procédure de quantification canonique. En déduire la relation de commutation entre les opérateurs $a_n(\vec{k})$ et $a_m^\dagger(\vec{p})$. Les annihilateurs $a_n(\vec{k})$ et $a_m(\vec{p})$ commutent–ils entre eux ?