

Introduction à la Théorie Quantique des Champs

Master Physique Subatomique et Cosmologie
Univ. Grenoble Alpes – Univ. Savoie Mont Blanc

Björn Herrmann
Laboratoire d'Annecy de Physique Théorique (LAPTh)
Univ. Savoie Mont Blanc – CNRS

herrmann@lapth.cnrs.fr

Dernière mise à jour : 17 août 2026

Site web associé au cours : <https://lapth.cnrs.fr/~herrmann/TQC>

❖ Révisions : Rappels, révisions et prérequis

Mécanique Lagrangienne

La mécanique classique, au départ basée sur la loi de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (0.1)$$

est reformulée à l'aide du concept du **Lagrangien**. Ce dernier est défini comme la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système considéré,

$$\mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = T - V. \quad (0.2)$$

Ici, q_i sont les coordonnées généralisées, et $\dot{q}_i$ leurs dérivées respectives par rapport au temps t (vitesses généralisées). Dans la pratique, on a souvent

$$T = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2, \quad (0.3)$$

alors que l'énergie potentielle V ne dépend que des coordonnées q_i et non des vitesses $\dot{q}_i$.

L'action sur un chemin partant de $A = \{q_i(t_A)\}$ et arrivant à $B = \{q_i(t_B)\}$ est calculée en tant qu'intégrale sur le Lagrangien,

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t]. \quad (0.4)$$

On demande que l'action soit extrême pour toute variation de chemin partant de $A = \{q_i(t_A)\}$ et arrivant à $B = \{q_i(t_B)\}$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{t_A}^{t_B} dt \delta \mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = \int_{t_A}^{t_B} dt \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0. \end{aligned} \quad (0.5)$$

Le passage à la deuxième ligne s'explique par une intégration par parties, basée sur l'égalité

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i, \quad (0.6)$$

sachant que le premier terme s'annule car $\delta q_i(t_A) = \delta q_i(t_B) = 0$.

Comme l'Éq. (0.5) doit être valable pour tout ensemble de variations $\{\delta q_i\}$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}} \quad (0.7)$$

pour tout i . Ces équations sont connues sous le nom d'**Équations d'Euler-Lagrange** et constituent les équations du mouvement du système considéré.

Mécanique Hamiltonienne

On considère un système décrit par un ensemble de variables canoniques $\{q_i\}$ ($i = 1, \dots, r$). Les **moments conjugués** sont définis par

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (0.8)$$

En partant du Lagrangien $\mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t]$, le **Hamiltonien** $\mathcal{H}[q_i, p_i, t]$ est obtenu via une transformation de Legendre,

$$\mathcal{H}[q_i, p_i, t] = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = T + V. \quad (0.9)$$

Le Hamiltonien exprime l'énergie totale du système, la somme de l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V .

La différentielle du Hamiltonien ci-dessus peut s'écrire comme

$$d\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) dq_i + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) dp_i + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) dt = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) dq_i + \dot{q}_i dp_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) dt. \quad (0.10)$$

En utilisant les Équations d'Euler-Lagrange (0.7), on en déduit les **équations canoniques du mouvement** :

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.} \quad (0.11)$$

De plus, les dépendances au temps du Lagrangien et de l'Hamiltonien sont liées par

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (0.12)$$

Oscillateur harmonique classique et quantique

Considérons un point matériel de masse m accroché à un ressort de raideur k . La force de rappel étant donnée par $F = -kx$, le principe fondamental de la dynamique mène à l'équation différentielle

$$F = m\ddot{x} = -kx, \quad (0.13)$$

dont la solution peut s'écrire

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (0.14)$$

avec la pulsation $\omega^2 = k/m$, l'amplitude initiale x_0 et la phase ϕ_0 .

Le Lagrangien associé à cette situation est donné par

$$\mathcal{L}[x, \dot{x}] = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2, \quad (0.15)$$

et mène aux équations du mouvement (0.13). Le moment conjugué à la coordonnée x est

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (0.16)$$

on retrouve l'impulsion classique. Le Hamiltonien s'écrit alors

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2. \quad (0.17)$$

Passant à la description quantique, les variables position x et impulsion p deviennent des opérateurs, notés ici X et P . Le Hamiltonien quantique s'écrit alors

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2. \quad (0.18)$$

En représentation spatiale, l'opérateur position X correspond à une multiplication par la coordonnée x , tandis que l'opérateur impulsion P correspond à une dérivée par rapport à la position,

$$X = x, \quad P = -i\partial_x. \quad (0.19)$$

Le commutateur entre les deux opérateurs est donné par

$$[X, P] = i\partial_x x = i. \quad (0.20)$$

Une redéfinition des opérateurs selon

$$\hat{X} = \sqrt{m\omega} X \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{P}{\sqrt{m\omega}}, \quad (0.21)$$

où la pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ a été introduite, permet de réécrire le Hamiltonien comme

$$H = \frac{\omega}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2). \quad (0.22)$$

De plus, le commutateur entre les opérateurs position et impulsion devient

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (0.23)$$

Basé sur les opérateurs définis en (0.21), on introduit les opérateurs d'*annihilation* et de *création* comme suit :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}). \quad (0.24)$$

Leur commutateur est donné par

$$\boxed{[a, a^\dagger] = 1.} \quad (0.25)$$

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique peut alors s'exprimer en fonction des opérateurs a et $a^\dagger$,

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad (0.26)$$

avec la définition $N = a^\dagger a$. Les commutateurs entre cet opérateur N et les opérateurs d'annihilation et de création sont donnés par

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (0.27)$$

Les états propres de l'opérateur N sont notés $|n\rangle$ avec $n \geq 0$. L'état de plus basse excitation $|0\rangle$ est annulé par l'opérateur d'annihilation,

$$a |0\rangle = 0. \quad (0.28)$$

Cet état $|0\rangle$ est appelé le *vide quantique*. Chaque état propre est associé à l'énergie propre E_n ,

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (0.29)$$

avec l'énergie propre

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (0.30)$$

Les actions des opérateur de création et d'annihilation sont respectivement données par

$$a^\dagger |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} |n+1\rangle, \quad (0.31)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (0.32)$$

pour $n \geq 1$. Les préfacteurs proviennent de la normalisation des états. À partir du vide $|0\rangle$, les états $|n\rangle$ sont alors construits en appliquant successivement l'opérateur de création selon

$$|n\rangle = \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (0.33)$$

L'ensemble des états $\{|n\rangle, n \geq 0\}$ est appelé *espace de Fock*.

Quadrivecteurs et tenseur métrique

Un quadrivecteur x^μ est un vecteur dans l'espace-temps à quatre dimensions,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x}). \quad (0.34)$$

Il est à noter que, bien que – strictement parlant – x seul désigne le quadri-vecteur et x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) ses composantes, souvent les deux notation sont confondues dans la pratique tel que x^μ est assimilé avec le quadri-vecteur *covariant* ci-dessus. En revanche, le vecteur *contravariant* associé est défini par

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\vec{x}) = (t, -\vec{x}). \quad (0.35)$$

En relativité, l'élément de longueur est donné par le temps propre,

$$d\tau^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (0.36)$$

où on somme sur des indices répétés selon la **convention d'Einstein** et où nous avons introduit la **métrie de Minkowski**,

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (0.37)$$

Il est à noter que la convention de métrique peut varier selon la référence consultée! Ce tenseur métrique permet d'écrire la relation entre vecteur covariant et contravariant,

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \iff x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (0.38)$$

Par ailleurs, le produit scalaire entre deux quadrivecteurs s'écrit

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = t_x t_y - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (0.39)$$

On peut introduire la quadri-vitesse,

$$\dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu = (c, \vec{v}), \quad (0.40)$$

ainsi que la quadri-impulsion,

$$p^\mu = m \dot{x}^\mu = (E, \vec{p}), \quad (0.41)$$

avec

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (0.42)$$

Lagrangien d'une particule relativiste

Le Lagrangien classique d'une particule libre, c.a.d. sans interaction et ainsi sans énergie potentielle, s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{classique}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (0.43)$$

où on somme sur les indices i et j . Ce Lagrangien se généralise afin d'obtenir une formulation quadri-dimensionnelle covariante selon

$$\mathcal{L}_{\text{relativiste}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu. \quad (0.44)$$

On rappelle la convention d'Einstein impliquant la somme sur les indices répétés.

Dans le cas relativiste, les équations d'Euler-Lagrange deviennent

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}} \quad (0.45)$$

Pour la particule libre décrite par le Lagrangien (0.44), on obtient

$$\frac{d}{d\tau} m \dot{x}^\mu = 0, \quad (0.46)$$

correspondant à la conservation de la quadri-impulsion $p^\mu = m \dot{x}^\mu$.

En présence d'un couplage de la particule avec un champ électromagnétique, le Lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + J_\mu A^\mu = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + q \dot{x}_\mu A^\mu, \quad (0.47)$$

où le courant électromagnétique est donné par $J^\mu = q \dot{x}^\mu$. Les Équations d'Euler-Lagrange associées s'écrivent

$$\frac{d}{d\tau} (m \dot{x}^\mu + q A^\mu) = \frac{d}{d\tau} (p^\mu + q A^\mu) = J^\alpha \partial^\mu A_\alpha. \quad (0.48)$$

Ceci suggère une généralisation de l'impulsion p^μ introduit ci-dessus. On définit alors l'impulsion généralisée conjuguée à la coordonnée x^μ comme

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = p^\mu + q A^\mu. \quad (0.49)$$

Nous allons retrouver cette impulsion généralisée dans le formalisme Hamiltonien, mais également plus tard dans le cadre de la dérivée covariante dans la discussion de théories de jauge.

Schéma de Schrödinger et schéma de Heisenberg

Considérons une théorie libre décrite par l'Hamiltonien $H_{0,S}$. Dans le *schéma de Schrödinger*, les états évoluent avec le temps,

$$i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = H_{0,S}(t) |\psi, t\rangle. \quad (0.50)$$

La solution de cette équation peut s'écrire en faisant appel à l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$,

$$|\psi, t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\psi, t_0\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}(t, t_0) = e^{-H_{0,S}(t-t_0)}. \quad (0.51)$$

L'opérateur d'évolution satisfait aux propriétés

$$\mathcal{U}(t, t) = 1, \quad (0.52)$$

$$\mathcal{U}^\dagger(t, t_0) = \mathcal{U}^{-1}(t, t_0), \quad (0.53)$$

$$\mathcal{U}(t_1, t_2) = \mathcal{U}^{-1}(t_2, t_1), \quad (0.54)$$

$$\mathcal{U}(t_1, t_3) = \mathcal{U}(t_1, t_2) \mathcal{U}(t_2, t_3) \quad \text{pour } t_1 > t_2 > t_3. \quad (0.55)$$

Dans le *schéma de Heisenberg*, les états sont gélés et l'évolution temporelle est portée par les opérateurs. La relation entre un opérateur exprimé dans le schéma de Heisenberg et ce même opérateur exprimé dans le schéma de Schrödinger est donnée par

$$\mathcal{A}_H(t) = \mathcal{U}^{-1}(t, t_0) \mathcal{A}_S \mathcal{U}(t, t_0), \quad (0.56)$$

en supposant que l'évolution démarre à $t = t_0$. À cet instant, on a l'égalité $\mathcal{A}_H(t_0) = \mathcal{A}_S$. On peut montrer que

$$\dot{\mathcal{A}}_H(t) = \frac{d\mathcal{A}_H}{dt} = \frac{\partial \mathcal{A}_H}{\partial t} + i [H_H, \mathcal{A}_H], \quad (0.57)$$

où H_H est l'Hamiltonien exprimé dans le schéma de Heisenberg.

Équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation de Schrödinger, décrivant une particule de spin zéro et de masse m , représentée par le champ scalaire ϕ . En représentation d'impulsion elle s'écrit

$$(p^2 - m^2) \phi(x) = 0. \quad (0.58)$$

Passant en représentation spatiale, où l'opérateur impulsion est représenté par la dérivée par rapport à la position,

$$p^2 = (-i\partial_x)^2 = -\partial_x^2 = -\square, \quad (0.59)$$

l'équation de Klein-Gordon devient

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0. \quad (0.60)$$

Spineurs et équation de Dirac

L'équation de Dirac décrit le comportement de particules massives de spin demi-entier. Une telle particule est représentée par un spineur

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (0.61)$$

À partir du spineur ψ on définit les objets

$$\psi^\dagger = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \psi_3^* \ \psi_4^*), \quad (0.62)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ -\psi_3^* \ -\psi_4^*). \quad (0.63)$$

Le spineur ψ obéit à l'*équation de Dirac*

$$(\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi(x) = (i\cancel{\partial} - m) \psi(x) = 0, \quad (0.64)$$

tandis que le spineur conjugué $\bar{\psi}$ obéit à l'équation

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu + m) = \bar{\psi}(x) (i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + m) = 0. \quad (0.65)$$

On démontre facilement, en appliquant l'opérateur $(i\cancel{\partial} - m)$ une deuxième fois, que l'équation de Dirac implique l'équation de Klein-Gordon.

L'équation de Dirac admet des solutions à énergie positive au repos,

$$u(\vec{0}, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(\vec{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (0.66)$$

ainsi que des solutions à énergie négative au repos,

$$v(\vec{0}, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v(\vec{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (0.67)$$

Les solutions de quadri-impulsion k à énergie positive et négative s'écrivent alors

$$u(\vec{k}, \alpha) = \frac{k + m}{\sqrt{2m(m + E_k)}} u(\vec{0}, \alpha) \quad \text{et} \quad v(\vec{k}, \alpha) = \frac{-k + m}{\sqrt{2m(m + E_k)}} v(\vec{0}, \alpha) \quad (0.68)$$

pour $\alpha = 1, 2$. Ces spineurs vérifient les égalités

$$u^\dagger(\vec{k}, \alpha) u(\vec{k}, \beta) = \frac{E_k}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad (0.69)$$

$$v^\dagger(\vec{k}, \alpha) v(\vec{k}, \beta) = \frac{E_k}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad (0.70)$$

$$v^\dagger(-\vec{k}, \alpha) u(\vec{k}, \beta) = 0, \quad (0.71)$$

$$u^\dagger(-\vec{k}, \alpha) v(\vec{k}, \beta) = 0. \quad (0.72)$$

Matrices γ

Les matrices γ (γ^μ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$) sont des matrices de dimension 4×4 obéissant à la relation d'anti-commutation associée à l'*algèbre de Clifford*,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (0.73)$$

On en déduit que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad \text{pour } \mu \neq \nu. \quad (0.74)$$

Dans la *représentation de Dirac* les matrices γ s'expriment comme suit :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad (0.75)$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice d'identité de dimension 2×2 et σ^i ($i = 1, 2, 3$) sont les *matrices de Pauli*,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.76)$$

Par commodité, on définit une cinquième matrice

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (0.77)$$

que l'on trouve par exemple dans les projecteurs d'hélicité des fermions. Il est à noter que γ_5 n'est pas une matrice γ dans le sens stricte, c.a.d. elle n'obéit pas à la relation d'anti-commutation ci-dessus. En particulier, γ_5 anti-commute avec les quatres matrices γ ,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (0.78)$$

Les matrices γ satisfont aux propriétés suivantes :

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad \gamma_5 = \gamma^5, \quad (0.79)$$

Les identités de contraction suivantes peuvent s'avérer utiles lors de calculs :

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\mathbb{1}, \quad (0.80)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha, \quad (0.81)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4\eta^{\alpha\beta} \mathbb{1}, \quad (0.82)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho. \quad (0.83)$$

Finalement, les matrices γ obéissent aux identités de trace suivantes :

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0, \quad (0.84)$$

$$\text{Tr}\{\gamma_5\} = 0, \quad (0.85)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5\} = 0, \quad (0.86)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4\eta^{\mu\nu}, \quad (0.87)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta\} = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}), \quad (0.88)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\alpha\} = \text{Tr}\{\gamma^\alpha \dots \gamma^\nu \gamma^\mu\}. \quad (0.89)$$

De plus, la trace de tout produit comportant un nombre impair de matrices γ est nulle. Également, la trace d'un produit de γ_5 avec un nombre impair de matrices γ est nulle.

Finalement, pour la contraction d'un quadri-vecteur q avec les matrices γ , on introduit la notation du *Feynman slash*,

$$\gamma^\mu q_\mu = \gamma_\mu q^\mu = \not{q}. \quad (0.90)$$

On peut montrer que

$$\not{q}^2 = \not{q} \not{q} = q_\mu q^\mu = q^2. \quad (0.91)$$

Théorème de Parseval

Ce théorème est une relation fondamentale de la théorie des séries de Fourier et peut être interprété comme une généralisation du théorème de Pythagore pour des séries dans les espaces de Hilbert.

Dans sa version discrète, le théorème de Parseval dit que, pour deux fonctions f et g , complexes et périodiques avec la même période T , développées en séries de Fourier selon

$$f(x) = \sum_k f_k e^{ikx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_k g_k e^{ikx}, \quad (0.92)$$

on a l'égalité

$$\frac{1}{T} \int_0^T dx g^*(x) f(x) = \sum_k g_k^* f_k. \quad (0.93)$$

Dans sa version continue, le théorème de Parseval dit que, pour deux fonctions f et g de la variable spatiale $\vec{x}$ avec développements en série de Fourier

$$f(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} F(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (0.94)$$

nous avons l'égalité

$$\int d\vec{x} g^*(\vec{x}) f(\vec{x}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} G^*(\vec{k}) F(\vec{k}). \quad (0.95)$$

Théorème des résidus

Certaines intégrales réelles peuvent être évaluées en prolongeant l'intégrand en une fonction holomorphe dans le plan complexe, et en étendant l'axe réel à une courbe fermée en lui attachant un demi-cercle dans le demi-plan supérieur ($\Im z > 0$) ou inférieur ($\Im(z) < 0$). Souvent, grâce au **Lemme de Jordan**, la partie de l'intégrale sur le demi-cercle tend vers zéro quand le rayon de ce dernier tend vers l'infini. L'intégral peut alors être évaluée en utilisant le théorème des résidus. Le calcul revient alors à l'évaluation des **résidus** de la fonction holomorphe à l'intérieur du contour d'intégration.

Soit l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (0.96)$$

avec une fonction f ayant un ensemble de points singuliers isolés z_i ($i = 1, \dots, k$) purement complexes. Si $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$ et si I converge, alors

$$I = 2\pi i \sum_{\Im\{z_k\} > 0} \text{Res}\{f(z); z_k\} = -2\pi i \sum_{\Im\{z_k\} < 0} \text{Res}\{f(z); z_k\}. \quad (0.97)$$

Pour le cas d'une intégrale impropre s'écrivant

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx \quad (0.98)$$

avec $a \in \mathbb{R}$, nous avons

$$I = 2\pi i \sum_{\Im\{z_k\} > 0} \text{Res}\{f(z)e^{iaz}; z_k\} \quad \text{si } a > 0, \quad (0.99)$$

$$I = -2\pi i \sum_{\Im\{z_k\} < 0} \text{Res}\{f(z)e^{iaz}; z_k\} \quad \text{si } a < 0. \quad (0.100)$$

Le **résidu** est un nombre complexe décrivant le comportement de l'intégrale curviligne aux alentours d'une singularité. Pour un pôle d'ordre n en $z = z_0$, le résidu se calcule comme

$$\text{Res}\{f(z); z_0\} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[(z - z_0) f(z) \right]. \quad (0.101)$$

Dans le cas d'un pôle de l'ordre 1, cette expression se simplifie à

$$\text{Res}\{f(z); z_0\} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (0.102)$$

❖ Chapitre 1 : Quantification de la boucle continue

1.1 Prélude : Réseau d'oscillateurs harmoniques et phonons

On considère un réseau uni-dimensionnel d'atomes de masse m placés en $x_n = na$ ($n = -\infty \dots +\infty$, a : pas du réseau) et liés par des ressorts de raideur k . Les positions x_n correspondent aux positions d'équilibre des atomes. Chaque atome peut osciller autour de cette position d'équilibre, on note l'élongation correspondante φ_n .

Le Lagrangien de ce système s'écrit

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_n \frac{m}{2} \dot{\varphi}_n^2 - \sum_n \frac{k}{2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2. \quad (1.1)$$

Les équations du mouvement associées – équations d'Euler-Lagrange, voir Éq. (0.7) – sont alors données par

$$\ddot{\varphi}_n = -\omega_0^2 (2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}), \quad (1.2)$$

avec $\omega_0^2 = k/m$.

Les **modes de Fourier** associées, notées φ_k et définies par

$$\varphi_n(t) = \varphi_k(t) e^{-ikna}, \quad (1.3)$$

obéissent à des équations d'**oscillateur harmonique**,

$$\ddot{\varphi}_k + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \varphi_k = 0. \quad (1.4)$$

On en déduit que les atomes vibrent selon des modes collectifs, interprétés comme des ondes sonores qui se propagent dans les deux sens. La **relation de dispersion** associée est donnée par

$$\omega_k = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|, \quad (1.5)$$

la longueur d'onde associée est $\lambda = 2\pi/k$.

Évoquant la solution générale de l'équation ci-dessus, les modes de Fourier φ_k peuvent s'exprimer comme ¹

$$\varphi_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t}. \quad (1.6)$$

On en déduit que les élongations φ_n peuvent s'écrire comme

$$\varphi_n(t) = \varphi_k(t) e^{ikna} = a_k e^{-i(\omega_k t - kna)} + b_k e^{i(\omega_k t + kna)}. \quad (1.7)$$

1. Les coefficients a_k et b_k anticipent le rôle des opérateurs d'annihilation et de création lors de la quantification canonique.

Les deux termes s'interprètent respectivement comme une propagation "vers la droite" (c.a.d. vers x positif) et une propagation "vers la gauche" (c.a.d. vers x négatif). La vitesse de propagation de l'onde sonore est donnée par $c_s = \omega_k/k = a\sqrt{k/m}$.

Plus généralement, en sommant sur tous les vecteurs d'onde, l'élongation de l'atome n s'écrit

$$\varphi_n(t) = \sum_k \left[a_k e^{-i(\omega_k t - k n a)} + b_k e^{i(\omega_k t + k n a)} \right] \quad (1.8)$$

La **quantification** de ce système peut se réaliser dans le **schéma de Heisenberg** – l'évolution temporelle est alors portée par les opérateurs – en prenant comme opérateurs quantiques l'élongation φ_i de l'atome i ainsi que son moment conjugué $P_i = m\dot{\varphi}_i$. À temps égal, la **relation de commutation** associée est

$$[\varphi_i(t), P_j(t)] = i\delta_{ij}. \quad (1.9)$$

1.2 Ligne continue : Approche classique

Suite au réseau discret d'atomes discuté ci-dessus, nous allons nous intéresser au cas d'un continuum, qui va naturellement nous amener vers la notion du **champ**. Concrètement, à partir d'un réseau discret de N sites de distance ℓ , nous allons réaliser la limite continue

$$N \rightarrow \infty, \quad \ell \rightarrow 0, \quad \text{telle que } L_0 = N\ell = \text{const.}, \quad (1.10)$$

où L_0 correspond à la longueur du système considéré, c.a.d. $x \in [0; L_0]$. De plus, nous supposons que la ligne reboucle sur elle même, c.a.d. le point $x = L_0$ est identifié avec $x = 0$.

Dans cette limite continue, les élongations individuelles des atomes (situés en $x = \ell n$) prennent la forme d'un champ dépendant de la coordonnée spatiale x , la somme sur les sites présente dans l'expression (1.1) devient une intégrale sur la variable spatiale x , et le terme apparaissant dans l'énergie potentielle sera identifié à une dérivé spatiale du champ $\varphi(t, x)$. Concrètement, on trouve les remplacements

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t, x), \quad (1.11)$$

$$\sum_{n=1}^N \ell f(x = n\ell) \xrightarrow[\text{limite continue}]{N \rightarrow \infty, \ell \rightarrow 0} \int_0^{L_0} dx f(x), \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\ell} (\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)) \rightarrow \varphi'(t, x). \quad (1.13)$$

En introduisant la masse linéique $\mu = m/\ell$ et la module de Young $\alpha = k\ell$, la limite continue du Lagrangien (1.1) s'écrit alors

$$L(t) = \int_0^{L_0} dx \left[\frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(t, x) - \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(t, x) \right] = \int_0^{L_0} dx \mathcal{L}(t, x). \quad (1.14)$$

Le Lagrangien $L(t)$ peut s'écrire comme l'intégrale spatiale sur la **densité de Lagrangien** $\mathcal{L}(t, x)$. L'évaluation des équations du mouvement mène à l'**équation d'Alembert**,

$$\mu \ddot{\varphi} - \alpha \varphi'' = 0. \quad (1.15)$$

Cette équation décrit la propagation d'une onde sonore avec vitesse $c_s = \sqrt{\alpha/\mu}$ le long de la ligne continue,

$$\ddot{\varphi} - c_s^2 \varphi'' = 0. \quad (1.16)$$

Le Hamiltonien correspondant au Lagrangien (1.1) est donné par

$$H(t) = \sum_{n=1} p_n \dot{\varphi}_n - L(t), \quad (1.17)$$

ce qui donne dans la limite continue

$$H(t) = \int_0^{L_0} dx \left[\Pi(t, x) \dot{\varphi}(t, x) - \mathcal{L}(t, x) \right] = \int_0^{L_0} dx \mathcal{H}(t, x), \quad (1.18)$$

où $\Pi(t, x) = \mu \dot{\varphi}(t, x)$ est le moment conjugué de $\varphi(t, x)$. On en déduit la **densité spatiale d'Hamiltonien**,

$$\mathcal{H}(t, x) = \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(t, x) + \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(t, x). \quad (1.19)$$

1.3 Ligne continue : Développement en modes de Fourier

La fonction $\varphi(t, x)$ est périodique dans l'espace à tout instant t . On peut alors la développer en **série de Fourier** selon

$$\varphi(t, x) = \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} = \sum_n \varphi_k(t) e^{ink_0 x}, \quad (1.20)$$

avec $k = nk_0$ et $k_0 = 2\pi/L_0$. Les **coefficients de Fourier** φ_k obéissent alors à une équation différentielle d'oscillateur harmonique,

$$\ddot{\varphi}_k + \omega_k^2 \varphi_k = 0, \quad (1.21)$$

avec $\omega_k^2 = c_s^2 |k|^2$. La solution générale de cette équation s'écrit

$$\varphi_k(t) = \alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t}, \quad (1.22)$$

où α_k et β_k sont des coefficients réels². Selon (1.20), le champ $\varphi(t, x)$ s'exprime alors comme

$$\varphi(t, x) = \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} = \sum_k \left[\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx}. \quad (1.23)$$

Sachant que la fonction $\varphi(t, x)$ est réelle, les égalités suivantes doivent être satisfaites :

$$\varphi^*(t, x) = \sum_k \varphi_k^*(t) e^{-ikx} = \varphi(t, x) = \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} = \sum_k \varphi_{-k}(t) e^{-ikx}, \quad (1.24)$$

où la dernière égalité est due au changement de variable $k \rightarrow -k$. On en déduit que, à chaque instant t ,

$$\varphi_k^*(t) = \alpha_k^* e^{i\omega_k t} + \beta_k^* e^{-i\omega_k t} = \varphi_{-k}(t) = \alpha_{-k} e^{-i\omega_k t} + \beta_{-k} e^{i\omega_k t}, \quad (1.25)$$

2. Ces coefficients seront ultérieurement identifiés comme opérateurs de créations et annihilation.

et, par la suite,

$$\alpha_k^* = \beta_{-k} \quad \text{et} \quad \beta_k^* = \alpha_{-k}. \quad (1.26)$$

Le coefficient β_k peut alors être éliminé en faveur de α_{-k}^* , puis de α_k^* ,

$$\varphi(t, x) = \sum_k \left[\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \alpha_{-k}^* e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx} = \sum_k \left[\alpha_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + \alpha_k^* e^{i(\omega_k t - kx)} \right], \quad (1.27)$$

où nous avons de nouveau changé $k \rightarrow -k$ dans le deuxième terme.

Finalement, en anticipant l'utilisation du **théorème de Parseval** dans la prochaine section, nous introduisant l'opérateur $A_k = \alpha_k / \sqrt{L_0}$. Le champ $\varphi(t, x)$ s'écrit alors

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_k \left[A_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + A_k^* e^{i(\omega_k t - kx)} \right], \quad (1.28)$$

où les coefficients A_k et A_k^* sont données par

$$A_k = \frac{1}{2\sqrt{L_0}} \int_0^{L_0} e^{-ikx} \left[\varphi(0, x) + \frac{i}{\mu\omega_k} \Pi(0, x) \right] dx. \quad (1.29)$$

1.4 Boucle continue : Quantification

Lors de la quantification, les coefficients introduits ci-dessus sont promus opérateurs. Les **opérateurs canoniques** sont l'élongation $\varphi(t, x)$ ainsi que son impulsion canonique associée $\Pi(t, x)$. Leurs commutateurs sont donnés par

$$[\varphi(t, x), \Pi(t, y)] = i \delta(x - y), \quad (1.30)$$

$$[\varphi(t, x), \varphi(t, y)] = [\Pi(t, x), \Pi(t, y)] = 0. \quad (1.31)$$

On en déduit les relations de commutation pour les opérateurs A_k et $A_k^\dagger$,

$$[A_k, A_p^\dagger] = \frac{\delta_{kp}}{2\mu\omega_k}, \quad (1.32)$$

$$[A_k, A_p] = [A_k^\dagger, A_p^\dagger] = 0. \quad (1.33)$$

Une nouvelle (et dernière) redéfinition des opérateurs,

$$a_k = \sqrt{2\mu\omega_k} A_k, \quad (1.34)$$

permet d'obtenir le commutateur

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta_{kp}. \quad (1.35)$$

L'expression correspondante pour le champ φ est alors

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k}} \left[a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - kx)} \right], \quad (1.36)$$

où les coefficients a_k sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2L_0}} \int_0^{L_0} e^{-ikx} \left[\sqrt{\mu\omega_k} \varphi(0, x) + \frac{i}{\sqrt{\mu\omega_k}} \Pi(0, x) \right] dx. \quad (1.37)$$

Dans ce qui suit, nous allons écrire l'Hamiltonien en fonction des opérateurs a_k et $a_k^\dagger$. Tout d'abord, l'élongation $\varphi(t, x)$ et ses dérivées peuvent s'écrire

$$\varphi(t, x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k L_0}} \left(a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) e^{ikx}, \quad (1.38)$$

$$\dot{\varphi}(t, x) = -i \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2\mu\omega_k L_0}} \left(a_k e^{-i\omega_k t} - a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) e^{ikx}, \quad (1.39)$$

$$\varphi'(t, x) = i \sum_k \frac{k}{\sqrt{2\mu\omega_k L_0}} \left(a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) e^{ikx}. \quad (1.40)$$

L'Hamiltonien est donné par l'intégrale spatiale de la densité d'Hamiltonien,

$$H(t) = \int_0^{L_0} dx \mathcal{H}(t, x) = \int_0^{L_0} dx \left[\frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^2(t, x) + \frac{\alpha}{2} \varphi'^2(t, x) \right] \quad (1.41)$$

$$= \int_0^{L_0} dx \left[\frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^\dagger(t, x) \dot{\varphi}(t, x) + \frac{\alpha}{2} \varphi'^\dagger(t, x) \varphi'(t, x) \right], \quad (1.42)$$

qui peut être évaluée à l'aide du **théorème de Parseval**. En appliquant la prescription donnée en Éq. (0.93) aux produits $\dot{\varphi}^\dagger(t, x) \dot{\varphi}(t, x)$ et $\varphi'^\dagger(t, x) \varphi'(t, x)$, on obtient alors des produits des opérateurs a_k et $a_k^\dagger$ selon le schéma

$$\int_0^{L_0} dx \dot{\varphi}^\dagger(t, x) \dot{\varphi}(t, x) \rightsquigarrow \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger), \quad (1.43)$$

$$\int_0^{L_0} dx \varphi'^\dagger(t, x) \varphi'(t, x) \rightsquigarrow \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger). \quad (1.44)$$

En tenant compte des préfacteurs respectifs, l'Hamiltonien s'exprime finalement comme

$$H(t) = \sum_k \frac{\omega_k}{2} (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (1.45)$$

où la dernière égalité repose sur la relation de commutation entre a_k et $a_k^\dagger$.

Cette expression de l'Hamiltonien est similaire à celle de l'oscillateur harmonique, voir Éq. (0.26). L'interprétation des opérateurs a_k et $a_k^\dagger$ est alors la suivante : L'**opérateur de création**, $a_k^\dagger$, crée un quantum d'excitation supplémentaire sur le mode de vecteur d'onde k et fait croître l'énergie du système de ω_k . L'**opérateur d'annihilation**, a_k , a l'effet opposé, c.a.d. la destruction d'un quantum d'excitation et diminution de l'énergie de ω_k .

1.5 Ligne continue : Vide et espace de Fock

L'état caractérisé par l'absence de toute excitation est appelé le **vide**. Cet état est annulé par l'opérateur d'annihilation,

$$a_k |0\rangle = 0. \quad (1.46)$$

Un état $|n_1 n_2 \dots n_p\rangle$ correspond à l'existence de n_1 excitations sur le mode k_1 , n_2 excitations sur le mode k_2 , etc. Il est construit à partir du vide selon

$$|n_1 n_2 \dots n_p\rangle = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a_{k_i}^\dagger)^{n_i} |0\rangle . \quad (1.47)$$

On peut maintenant s'intéresser à l'énergie associée au vide de la théorie. Basé sur le Hamiltonien donné ci-dessus, on obtient

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_k \frac{\omega_k}{2} | 0 \rangle = \sum_k \frac{\omega_k}{2} \langle 0 | 0 \rangle = \infty . \quad (1.48)$$

Ce résultat – qui peut paraître surprenant à la première vue – ne contient aucune difficulté d'interprétation. En effet, seules des différences d'énergie sont observables, et dans le présent cas seulement le “niveau zéro” est mal défini. Cela peut être résolu grâce à une redéfinition du zéro des énergies telle que

$$E_0 = \sum_k \frac{\omega_k}{2} = \infty \longrightarrow E_0 = 0 . \quad (1.49)$$

Une telle **renormalisation de l'énergie** peut, techniquement parlant, être effectuée en introduisant le **produit normal** entre opérateurs de création et d'annihilation,

$$: a^\dagger a : = a^\dagger a , \quad : a a^\dagger : = a^\dagger a . \quad (1.50)$$

Le produit normal ordonne les opérateurs tels que les opérateurs de création se trouvent “à gauche” et les opérateurs d'annihilation se trouvent “à droite”. En appliquant le produit normal à l'Hamiltonien,

$$H(t) = \sum_k \frac{\omega_k}{2} : (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) : = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k , \quad (1.51)$$

le terme divergeant disparaît et l'énergie du vide devient bien

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = 0 . \quad (1.52)$$

Chapitre 1 – Exercices

Exercice 1.1

Démontrer que les modes de Fourier φ_k obéissent à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (1.4).

Exercice 1.2

Démontrer l'équation d'Alembert (1.15).

Exercice 1.3

Inverser la relation (1.28) afin de démontrer l'expression des coefficients A_k donnée en (1.29).

Exercice 1.4

En partant des relations de commutation (1.9), établir que

$$[\varphi(t, x), \Pi(t, y)] = i \delta(x - y), \quad (1.53)$$

alors que

$$[\varphi(t, x), \varphi(t, y)] = [\Pi(t, x), \Pi(t, y)] = 0. \quad (1.54)$$

Expliquer la raison pour laquelle les opérateurs φ et Π sont pris au même instant t dans les commutateurs précédents.

Exercice 1.5

En utilisant le théorème de Parseval, en partant de l'intégrale (1.42) ainsi que les expressions (1.39) et (1.40), démontrer l'expression (1.45) du Hamiltonien en fonction des opérateurs a_k et $a_k^\dagger$.

❖ Chapitre 2 : Quantification du champ scalaire réel

Dans les prochains chapitres, nous allons nous intéresser à la quantification des champs libres, c.a.d. sans considérer leur interaction. L'interaction de champs sera discutée ensuite dans la seconde partie du cours, à partir du Chapitre 6.

Nous allons commencer notre discussion par le cas le plus simple, notamment le champs scalaire de spin nul (Chapitres 2 et 3) avant de nous intéresser aux champs électromagnétique (Chapitre 4) et fermionique (Chapitre 5).

2.1 Analyse classique : Lagrangien

Le Lagrangien de la boucle continue, voir Éq. (??), peut se réécrire comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2, \quad (2.1)$$

si l'on redéfinit le champ selon $\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{\alpha}$ et en utilisant la convention $c = 1$. Le passage d'une à trois dimensions spatiale, et donc à 1+3 dimensions de l'espace temps, mène à

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi). \quad (2.2)$$

A ce stage, nous abandonnons définitivement l'image de l'élongation et de l'oscillateur harmonique, en considérant seulement qu'une quantité $\varphi \in \mathbb{R}$ est "attachée" à chaque point de l'espace-temps.

En présence d'un potentiel scalaire $V(\varphi)$, ce Lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - V(\varphi). \quad (2.3)$$

On rappelle que, par abus de langage, l'expression ci-dessus est strictement parlant la densité de Lagrangien, et que le Lagrangien proprement dit s'obtient en intégrant sur l'espace,

$$L(t) = \int d\vec{x} \mathcal{L}(t, \vec{x}). \quad (2.4)$$

Dans le cas considéré ici, c.a.d. pour un champ libre sans interactions, le potentiel scalaire contient uniquement le terme de masse,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (2.5)$$

De manière plus générale, le potentiel scalaire peut également inclure des termes d'interaction.

2.2 Équation de Klein-Gordon

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation du mouvement du champ scalaire libre,

$$\square\varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (2.6)$$

Pour le présent cas avec seulement un terme de masse dans le potentiel scalaire, cela donne

$$(\square + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.7)$$

On obtient alors bien l'équation de Klein-Gordon, caractéristique d'une particule libre et massive de spin nul.

2.3 Hamiltonien et tenseur énergie-impulsion

Le moment conjugué au champ φ est donné par

$$\Pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(t, \vec{x}). \quad (2.8)$$

Le Hamiltonien s'écrit alors

$$H(t) = \int d\vec{x} \Pi(t, \vec{x}) \dot{\varphi}(t, \vec{x}) - L(t) = \int d\vec{x} \mathcal{H}(t, \vec{x}), \quad (2.9)$$

avec la densité de Hamiltonien

$$\mathcal{H}(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi). \quad (2.10)$$

Si l'on considère un changement de coordonnées,

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \quad (2.11)$$

il faut imposer une redéfinition du champ,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x), \quad (2.12)$$

telle que – à un endroit M donné – la physique reste inchangée,

$$\varphi(M) = \varphi(x^\mu) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}^\mu). \quad (2.13)$$

La variation du champ peut alors s'exprimer comme

$$\delta\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) = \varphi(x - \epsilon) - \varphi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi \quad (2.14)$$

où nous avons utilisé le développement $\varphi(x - \epsilon) = \varphi(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi$. De la même manière, la variation associée du Lagrangien ainsi que sa dérivée peuvent s'exprimer comme

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(x - \epsilon) - \mathcal{L}(x) = -\epsilon^\mu (\partial_\mu \mathcal{L}), \quad (2.15)$$

$$\partial_\mu (\delta \mathcal{L}) = \partial_\mu (-\epsilon^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L}) = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha (\partial_\mu \mathcal{L}) = \delta (\partial_\mu \mathcal{L}). \quad (2.16)$$

Par calcul explicite, cette même variation peut également s'écrire

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) \quad (2.17)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right] - \delta \varphi \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \quad (2.18)$$

$$= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right] = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (-\epsilon_\alpha \partial^\alpha \varphi) \right] = -\epsilon_\alpha \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\alpha \varphi \right], \quad (2.19)$$

où le passage à la deuxième ligne a été effectué en utilisant une intégration par partie, et les équations d'Euler-Lagrange permettent ensuite d'annuler deux termes. En combinant les deux expressions,

$$\delta \mathcal{L} = -\epsilon_\alpha \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\alpha \varphi \right] = -\epsilon^\mu (\partial_\mu \mathcal{L}) = -\eta^{\alpha\mu} \epsilon_\alpha (\partial_\mu \mathcal{L}) = -\epsilon_\alpha \partial_\mu (\eta^{\mu\alpha} \mathcal{L}), \quad (2.20)$$

ce qui implique que, pour tout ϵ_α ,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\alpha \varphi - \eta^{\mu\alpha} \mathcal{L} \right] = 0, \quad (2.21)$$

est alors que la quantité

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.22)$$

est conservée, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Cette dernière est appelée le **tenseur énergie-impulsion**. Sa composante temporelle correspond à la densité de Hamiltonien, $T^{00} = \mathcal{H}$.

La densité de Hamiltonien est identifiée avec la composante temporelle de ce tenseur,

$$\mathcal{H} = T^{00} = \Pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}. \quad (2.23)$$

L'impulsion P^μ , exprimée par l'intégrale

$$P^\mu = \int d\vec{x} T^{0\mu} \quad (2.24)$$

est conservée, à condition que le champ scalaire $\varphi(t, \vec{x})$ s'annule rapidement à l'infini.

Le tenseur énergie-impulsion peut également s'écrire

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.25)$$

ce qui implique

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial^\nu \varphi) \left[\square \varphi + \frac{dV}{d\varphi} \right] = 0, \quad (2.26)$$

si le champ satisfait à l'équation de Klein-Gordon.

2.4 Quantification canonique

Nous allons maintenant procéder à la quantification canonique du champ scalaire réel libre de masse m . On rappelle que, dans ce cas, le potentiel scalaire est donné par l'Éq.

(2.5). La procédure de quantification est fortement inspirée par celle déployée dans le cadre de boucle continue, discutée dans le Chapitre précédent. Afin de décrire le champ scalaire relativiste, un passage en 1+3 dimensions d'espace-temps est requise. De plus, nous allons relâcher la contrainte d'un espace bouclé sur lui-même, ce qui correspond à la limite $L_0 \rightarrow \infty$ et $k_0 = 2\pi/L_0 \rightarrow 0$.

Effectuant cette limite $L_0 \rightarrow \infty$ d'abord dans le cadre de la boucle continue, l'expression (1.36) devient

$$\varphi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2\omega_k} \left[\tilde{a}_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + \tilde{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t + kx)} \right], \quad (2.27)$$

si l'on redéfinit les opérateurs une nouvelle fois selon $\tilde{a}_k = \sqrt{2\omega_k L_0} a_k$. Dans ce cas, le commutateur associé est donné par

$$[\tilde{a}_k, \tilde{a}_p^\dagger] = 2\omega_k L_0 \delta_{kp}. \quad (2.28)$$

Le passage en 1+3 dimensions se fait ensuite naturellement,

$$\varphi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a_{\vec{k}} e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega_k t + \vec{k}\vec{x})} \right] = \int d\tilde{k} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (2.29)$$

où dans la dernière expression $kx = k^\mu x^\mu = \omega_k t - \vec{k}\vec{x}$, et – par commodité pour la suite – nous avons introduit la mesure

$$d\tilde{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} = \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \theta(\omega_k) \delta(k^2 - m^2). \quad (2.30)$$

Les relations de commutation associées non-triviales sont

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 2\omega_k (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (2.31)$$

ce qui implique

$$[\varphi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.32)$$

2.5 Hamiltonien et opérateur impulsion

Pour rappel, le Hamiltonien associé au champ scalaire réel est donné par

$$H(t) = \int d\vec{x} \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right], \quad (2.33)$$

le potentiel scalaire ne comportant que le terme de masse. Cette intégrale peut de nouveau être évaluée en utilisant le **théoreme de Parseval**, cette fois dans sa version continue donnée en Éq. (0.95). Avec l'expression de $\varphi(x)$ dérivée précédemment, on arrive à l'expression du Hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation :

$$H(t) = \int d\tilde{k} \frac{\omega_k}{2} \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right]. \quad (2.34)$$

Après renormalisation de l'énergie du vide – même argument et procédure que dans le cas de la boucle continue – à l'aide du produit normal, le Hamiltonien devient

$$H(t) = \int d\vec{k} \frac{\omega_k}{2} : \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right] : = \int d\vec{k} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (2.35)$$

Finalement, on peut s'intéresser à l'opérateur *impulsion*, $P = (H, \vec{P})$. Cet opérateur est donné par

$$P^\mu = \int d\vec{x} T^{0\mu}, \quad (2.36)$$

d'où on déduit

$$\vec{P} = - \int d\vec{x} \dot{\varphi} (\vec{\nabla} \varphi). \quad (2.37)$$

Cela s'exprime – suite à une nouvelle utilisation du théorème de Parseval – en fonction des opérateurs $a_{\vec{k}}$ et $a_{\vec{k}}^\dagger$ comme

$$\vec{P} = \int d\vec{k} \frac{\vec{k}}{2} \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right]. \quad (2.38)$$

Basé sur cette expression, l'impulsion du vide diverge. En conséquence, une renormalisation de l'impulsion est nécessaire, ce qui peut être réalisé par le produit normal, de la même manière que pour l'énergie. Nous allons alors réécrire l'opérateur impulsion comme

$$\vec{P} = - \int d\vec{x} \dot{\varphi} : (\vec{\nabla} \varphi) : = \int d\vec{k} \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (2.39)$$

Les opérateur de création entretiennent avec l'opérateur impulsion les relations de commutation

$$[P^\mu, a_{\vec{k}}^\dagger] = k^\mu a_{\vec{k}}^\dagger. \quad (2.40)$$

En conclusion, l'opérateur $a_{\vec{k}}^\dagger$ crée un quantum d'excitation associé à l'onde plane dont le vecteur d'onde est $\vec{k}$, interprété comme la présence d'une particule de masse m se propageant avec l'impulsion $\vec{k}$. L'application de $a_{\vec{k}}^\dagger$ sur le vide $|0\rangle$ engendre une particule de quadri-impulsion l^μ . L'excitation multiple d'une onde plane est possible, les particules correspondantes peuvent alors occuper le même état quantique de propagation : il s'agit de *bosons*.

Finalement, le vide de la théorie est détruit par tous les opérateurs d'annihilation $a_{\vec{k}}$,

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \vec{k}. \quad (2.41)$$

L'espace de Fock de la théorie comprend alors tous les états de la forme $|0\rangle, |\vec{k}_1\rangle, |\vec{k}_1 \vec{k}_1\rangle$, etc.

Chapitre 2 – Exercices

Exercice 2.1

Pour le cas du champ scalaire réel massif, démontrer que les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme donnée en Éq. (2.7).

Exercice 2.2

Démontrer que la relation (2.23) conduit à la relation (2.10).

Exercice 2.3

À partir du développement (2.29), démontrer que le champ φ satisfait à l'équation de Klein-Gordon.

Exercice 2.4

Démontrer les relations (2.32) à partir de relations (2.31).

Exercice 2.5

Démontrer – en utilisant le théorème de Parseval dans sa forme continue, puis en introduisant le produit normal – l'expression (2.35) de l'Hamiltonien associé au champ scalaire réel.

Même exercice pour l'expression de l'impulsion donnée en (2.39).

Exercice 2.6

Démontrer les relations de commutation (2.40).

❖ Chapitre 3 : Quantification du champ scalaire complexe

Dans ce chapitre, nous allons généraliser la discussion précédente à un champ scalaire complexe, et nous allons montrer que ce dernier correspond à une particule scalaire chargée. Un champ scalaire complexe $\varphi(t, \vec{x})$ est l'association de deux champs scalaires réels,

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(t, \vec{x}) + i \varphi_2(t, \vec{x}) \right). \quad (3.1)$$

Son champ conjugué s'écrit alors

$$\varphi^*(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(t, \vec{x}) - i \varphi_2(t, \vec{x}) \right). \quad (3.2)$$

Nous allons alors pouvoir réutiliser les résultats obtenus lors du Chapitre précédent pour les composantes φ_1 et φ_2 .

3.1 Lagrangien et tenseur énergie-impulsion

Le Lagrangien du champ scalaire complexe peut alors être exprimé – en premier lieu – comme la somme des Lagrangiens individuels associés aux champs φ_1 et φ_2 ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1) (\partial^\mu \varphi_1) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2) (\partial^\mu \varphi_2) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_2^2. \quad (3.3)$$

Sachant que $\varphi^* \varphi = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)/2$, ce Lagrangien peut se réécrire

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi = (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) + V(\varphi^* \varphi), \quad (3.4)$$

où nous avons de nouveau introduit le potentiel scalaire $V(\varphi^* \varphi) = m^2 \varphi^* \varphi$, qui ne contient que le terme de masse pour le champ libre considéré ici. Les variables canoniques décrivant le champ scalaire complexe peuvent alors être choisies comme φ et φ^* . Les équations d'Euler-Lagrange associées correspondent aux équations de Klein-Gordon pour φ et φ^* ,

$$(\square + m^2) \varphi = 0 \quad \text{et} \quad (\square + m^2) \varphi^* = 0. \quad (3.5)$$

Le tenseur énergie-impulsion se calcule selon la prescription donnée en Éq. (2.22), sachant qu'il faut maintenant sommer sur les champs canoniques compris dans le Lagrangien. Pour le champ scalaire complexe, on obtient

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} (\partial^\nu \varphi_i) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi) (\partial^\nu \varphi^*) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial^\nu \varphi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

3.2 Hamiltonien et quantification canonique

Les développements en séries de Fourier des champs scalaires réels φ_1 et φ_2 sont donnés par

$$\varphi_1(x) = \int d\tilde{k} \left[a_{\vec{k}_1} e^{-ikx} + a_{\vec{k}_1}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (3.7)$$

$$\varphi_2(x) = \int d\vec{k} \left[a_{\vec{k}_2} e^{-ikx} + a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (3.8)$$

avec les opérateurs de création et d'annihilation associés aux deux champs. Le champ complexe se décompose alors comme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(x) + i \varphi_2(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\vec{k} \left[(a_{\vec{k}_1} + i a_{\vec{k}_2}) e^{-ikx} + (a_{\vec{k}_1}^\dagger + i a_{\vec{k}_2}^\dagger) e^{ikx} \right]. \quad (3.9)$$

Cela permet d'écrire des opérateurs de création et d'annihilation pour le champ complexe φ ,

$$a_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_{\vec{k}_1} + i a_{\vec{k}_2} \right] \quad \text{et} \quad b_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_{\vec{k}_1} - i a_{\vec{k}_2} \right] \quad (3.10)$$

tels que le champ scalaire complexe s'écrit

$$\varphi(x) = \int d\vec{k} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + b_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (3.11)$$

$$\varphi^*(x) = \int d\vec{k} \left[b_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right]. \quad (3.12)$$

Il est à noter que – contrairement au champ scalaire réel – nous avons ici deux opérateurs dans la décomposition en série de Fourier. En particulier il est à noter que $b_{\vec{k}}^\dagger \neq a_{\vec{k}}$. Les relations de commutation associées sont

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = [b_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (3.13)$$

$$[a_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^\dagger] = [b_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 0. \quad (3.14)$$

Le Hamiltonien s'obtient en intégrant la composante temporelle du tenseur énergie-impulsion donné en Éq. (3.6),

$$H(t) = \int d\vec{x} : \left[\dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + (\vec{\nabla} \varphi^*)(\vec{\nabla} \varphi) + V(\varphi^* \varphi) \right] :, \quad (3.15)$$

où nous avons directement écrit le produit normal afin de tenir compte de la renormalisation de l'énergie du vide nécessaire. Comme pour le champ scalaire réel, l'intégrale peut être réécrit en utilisant le théorème de Parseval, ce qui donne

$$H(t) = \int d\vec{k} \omega_k : \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right] : = \int d\vec{k} \omega_k \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right]. \quad (3.16)$$

Finalement, l'impulsion correspond à l'intégrale de la composante T^{0i} du tenseur énergie-impulsion,

$$\vec{P}(t) = - \int d\vec{x} : \left[(\vec{\nabla} \varphi^*) \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^* (\vec{\nabla} \varphi) \right] : = \int d\vec{k} \vec{k} \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right]. \quad (3.17)$$

Les opérateurs $a_{\vec{k}}^\dagger$ et $b_{\vec{k}}^\dagger$ correspondent alors tous les deux à la création d'un quantum d'excitation associé à une onde plane d'énergie ω_k et de vecteur d'onde $\vec{k}$, c.a.d. une particule de quadri-impulsion $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$ avec $\omega_k^2 = m^2 + \vec{k}^2$. Quelle est alors la différence entre ces deux opérateurs ?

3.3 Invariance de jauge et charge électrique

Afin de répondre à la question ci-dessus, nous allons nous appuyer sur le concept d'*invariance de jauge*. Plus précisément, nous allons considérer une transformation de jauge de groupe $U(1)$. Lors d'une telle rotation complexe, le champ φ se transforme comme

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi e^{iq\theta}, \quad (3.18)$$

$$\varphi^* \rightarrow \tilde{\varphi}^* = \varphi^* e^{-iq\theta}, \quad (3.19)$$

avec une constante q et le paramètre θ associé à la rotation. Nous supposons pour le moment que θ ne dépend pas de l'endroit x , c.a.d. $\partial_\mu \theta = 0$, on parle alors d'une *transformation globale* de jauge. On montre facilement que

$$\tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} = \varphi^* \varphi \quad \text{et} \quad (\partial_\mu \tilde{\varphi}^*)(\partial^\mu \tilde{\varphi}) = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi). \quad (3.20)$$

Nous pouvons alors conclure que le Lagrangien du champ scalaire complexe – voir Éq. (3.4) – est invariante sous une transformation de jauge $U(1)$ globale. Il est à noter que la situation serait différente dans le cas d'une transformation locale où $\theta = \theta(x)$ et $\partial_\mu \theta \neq 0$.

Afin d'explorer plus en détail cette invariance, nous allons considérer une transformation infinitésimale,

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi e^{iq\theta} \simeq \varphi (1 + iq\theta), \quad (3.21)$$

$$\varphi^* \rightarrow \tilde{\varphi}^* = \varphi^* e^{-iq\theta} \simeq \varphi^* (1 - iq\theta), \quad (3.22)$$

où les termes d'ordre q^2 et supérieur ont été négligés. Ce même comportement est retrouvé pour les dérivées du champ,

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \tilde{\varphi} = \partial_\mu \varphi e^{iq\theta} \simeq \partial_\mu \varphi (1 + iq\theta), \quad (3.23)$$

$$\partial_\mu \varphi^* \rightarrow \partial_\mu \tilde{\varphi}^* = \partial_\mu \varphi^* e^{-iq\theta} \simeq \partial_\mu \varphi^* (1 - iq\theta). \quad (3.24)$$

Les variations de φ et $\partial_\mu \varphi$ sont alors données par

$$\delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi = iq\theta \varphi, \quad (3.25)$$

$$\delta\varphi^* = \tilde{\varphi}^* - \varphi^* = -iq\theta \varphi^*, \quad (3.26)$$

$$\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu \tilde{\varphi} - \partial_\mu \varphi = iq\theta \partial_\mu \varphi, \quad (3.27)$$

$$\delta(\partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \tilde{\varphi}^* - \partial_\mu \varphi^* = -iq\theta \partial_\mu \varphi^*. \quad (3.28)$$

Sachant que la variation du Lagrangien est nulle, nous pouvons alors écrire

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} \delta\varphi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \delta(\partial_\mu \varphi^*) = 0, \quad (3.29)$$

L'utilisation de l'égalité

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right] = \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta\varphi) \quad (3.30)$$

ainsi que les équations d'Euler-Lagrange mènent alors à

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \delta \varphi^* \right] = iq \partial_\mu \left[\varphi^* (\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \varphi^*) \varphi \right] = 0. \quad (3.31)$$

Basé sur ce résultat, nous définissons

$$J^\mu = iq \left[\varphi^* (\partial^\mu \varphi) - (\partial^\mu \varphi^*) \varphi \right] = iq \left(\varphi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \varphi \right), \quad (3.32)$$

interprété comme *quadri-courant électrique*, qui se conserve

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.33)$$

La *charge électrique* correspond à l'intégrale sur la partie temporelle du courant,

$$Q(t) = \int d\vec{x} J^0(t, \vec{x}) = iq \int d\vec{x} : \left[\varphi^* \overleftrightarrow{\partial}^0 \varphi \right] : , \quad (3.34)$$

où de nouveau nous avons introduit le produit normal afin de correctement renormaliser la charge électrique du vide. L'utilisation du théorème de Parseval permet d'exprimer la charge en fonction des opérateurs $a_{\vec{k}}$ et $b_{\vec{k}}$,

$$Q(t) = \int d\vec{k} \left[(+q) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + (-q) b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right]. \quad (3.35)$$

La différence entre les deux opérateurs est alors liée à la charge électrique : l'opérateur $a_{\vec{k}}^\dagger$ crée une *particule* de charge $(+q)$, tandis que $b_{\vec{k}}^\dagger$ crée une *antiparticule* de charge opposée $(-q)$.

3.4 Propagateur de Feynman et T-produit

En présence d'une source, l'équation de Klein-Gordon est modifiée afin d'inclure le terme de source,

$$(\square + m^2) \varphi(x) = S(x). \quad (3.36)$$

Afin de résoudre cette équation, on pose

$$\varphi(x) = \int d^4y G(x-y) S(y), \quad (3.37)$$

où $G(x-y)$ est la *fonction de Green* ou le *propagateur* de y vers x . La combinaison des deux équations donne l'égalité suivante pour le terme de source,

$$S(x) = \int d^4y (\square_x + m^2) G(x-y) = \int d^4y \delta^4(x-y) S(y), \quad (3.38)$$

d'où on obtient une équation différentielle pour le propagateur,

$$(\square_x + m^2) G(x-y) = \delta^4(x-y). \quad (3.39)$$

Le propagateur associé au champ scalaire obéit alors à une équation de Klein-Gordon.

Nous allons reformuler cette équation dans l'espace impulsion, grâce aux transformées de Fourier définies par

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k) e^{-ik(x-y)} \quad \text{et} \quad \delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)}. \quad (3.40)$$

Cela implique

$$\int d^4k (\Box_x + m^2) G(k) e^{-ik(x-y)} = \int d^4k (-k^2 + m^2) G(k) e^{-ik(x-y)} = \int d^4k e^{-ik(x-y)}, \quad (3.41)$$

et finalement

$$\boxed{(-k^2 + m^2) G(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2}.} \quad (3.42)$$

Afin de revenir dans l'espace x , il faut alors calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} G(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-1}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 e^{-ik^0(x^0-y^0)} \frac{-1}{(k^0)^2 - \omega_k^2}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

où dans la dernière étape la partie temporelle a été séparée de la partie spatiale et le dénominateur a été réécrit selon $k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = (k^0)^2 - \omega_k^2$. La partie spatiale est sans difficulté, mais la partie temporelle contient un pôle en $(k^0)^2 = \omega_k^2$. L'intégrale peut être évaluée à l'aide du **théorème des résidus**.

Deux prescriptions se proposent quant au traitement des pôles :

- **Prescription de Liénard-Wiechert** : déplacement des deux pôles "vers le bas", c.a.d.

$$G(x - y) = 0 \quad \text{pour } x^0 - y^0 < 0 \Leftrightarrow x^0 < y^0, \quad (3.44)$$

on n'a alors pas de propagation vers le passé ;

- **Prescription de Feynman** : on déplace le pôle en $k^0 = \omega_k$ "vers le bas" ($\Im < 0$) et le pôle en $k^0 = -\omega_k$ "vers le haut" ($\Im > 0$). Cette prescription donne lieu à des particules à énergie positive se propageant vers le futur et à des particules à énergie négative se propageant vers le passé.

Ici, nous allons nous placer dans la prescription de Feynman. En appliquant le théorème des résidus, on obtient pour le **propagateur de Feynman**

$$\begin{aligned} G_F(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{i}{2\omega_k} e^{-ik^0(x^0-y^0)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{i}{2\omega_k} e^{ik^0(x^0-y^0)} \right] \\ &= i \int d\vec{k} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

On définit le produit chronologiquement ordonné (**T-produit**) de deux opérateurs comme

$$\mathbf{T} \{A(x) B(y)\} = \theta(x^0 - y^0) A(x) B(y) + \theta(y^0 - x^0) B(y) A(x). \quad (3.46)$$

On peut alors montrer que le propagateur de Feynman est lié à un T-produit selon

$$\boxed{-i G_F(x - y) = \langle 0 | \mathbf{T} \{ \varphi(x) \varphi^\dagger(y) \} | 0 \rangle .} \quad (3.47)$$

Ce résultat s'interprète comme une **particule** se propageant de y vers x si $x^0 > y^0$ et comme une **antiparticule** se propageant de x vers y si $y^0 > x^0$.

Chapitre 3 – Exercices

Exercice 3.1

Démontrer l'expression du Hamiltonien donnée en (3.15) en calculant l'intégrale de la composante T^{00} du tenseur impulsion-énergie. Montrer ensuite que l'impulsion spatiale associée est donnée par la première expression donnée en (3.17) (il n'est pas demandé d'appliquer le théorème de Parseval afin de démontrer la deuxième expression).

Exercice 3.2

En utilisant les relations de commutation (2.31), démontrer les relations de commutation (3.13) et (3.14).

Exercice 3.3

Calculer directement la quadri-divergence du courant J^μ défini en (3.32). En vous aidant de l'équation de Klein-Gordon, montrer que le courant se conserve.

Exercice 3.4

Montrer que le propagateur de Feynman s'écrit comme proposé en (3.45).

Exercice 3.5

Démontrer la relation donnée en (3.47) entre le propagateur de Feynman et le T-produit de φ et $\varphi^\dagger$.

❖ Chapitre 4 : Quantification du champ électromagnétique

Ayant complété la discussion de la quantification du champ scalaire et ayant introduit le propagateur ainsi que le T-produit, nous sommes maintenant prêts à avancer vers la discussion du champ électromagnétique en tant que représentant d'un champ de jauge. La discussion des champs fermioniques suivra dans le prochain chapitre.

4.1 Équations de Maxwell et invariance de jauge

Pour rappel, le champ électrique $\vec{E}$ ainsi que le champ magnétique $\vec{B}$ dérivent du potentiel électrique ϕ ainsi que du potentiel vecteur $\vec{A}$,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.2)$$

La théorie classique de l'électromagnétisme est gouvernée par les *équations de Maxwell*,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Afin de passer à l'écriture covariante, on introduit le quadri-potentiel A ainsi que le quadri-courant J ,

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad J^\mu = (\rho, \vec{j}). \quad (4.7)$$

Le *tenseur électromagnétique* est alors défini par

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (4.8)$$

il contient les composantes des champs électrique et magnétique. Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (4.9)$$

Le tenseur électromagnétique est invariant sous la transformation de jauge

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \theta. \quad (4.10)$$

On a alors une infinité de choix possibles pour le quadri-potentiel donnant la même configuration physique du champ électromagnétique.

On se place dans la *jauge de Lorenz*, définie telle que

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.11)$$

Avec ce choix, les équations de Maxwell deviennent

$$\boxed{\square A^\mu = J^\mu.} \quad (4.12)$$

On y reconnaît l'équation de Klein-Gordon avec terme de source, mais sans terme de masse.

La solution de l'équation précédente peut s'écrire

$$A^\mu(x) = \int d^4y G_{\text{ret}}(x-y) J^\mu(y), \quad (4.13)$$

où la fonction de Green est le propagateur retardé de Lienard-Wiechert. On en déduit que

$$G_{\text{ret}}(k) = -\frac{1}{k^2}, \quad (4.14)$$

puis la solution pour le potentiel vecteur,

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \int d^4y \frac{1}{4\pi r} \delta(r - (x^0 - y^0)) J^\mu(y) = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{y} \frac{J^\mu(t_y = t_x - r, \vec{y})}{r}. \quad (4.15)$$

La contribution en $x = (t, \vec{x})$ provient des points source, situés en $\vec{y}$. Elle a été rayonnée à l'instant $t_y = t_x - r$ antérieur car elle a dû se propager à la vitesse de la lumière ($c = 1$) sur la distance $r = |\vec{x} - \vec{y}|$.

La structure de l'onde plane se propageant dans le vide peut être comprise à travers la solution

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{-ikx}, \quad (4.16)$$

où ϵ est le vecteur polarisation. L'équation de Klein-Gordon (4.12) sans source implique que $k^2 = 0$. De plus, imposant la jauge de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, implique

$$\epsilon_\mu k^\mu = 0. \quad (4.17)$$

En choisissant $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, on déduit que la polarisation temporelle est égale à la polarisation longitudinale,

$$\epsilon^0 = \epsilon^3. \quad (4.18)$$

Nous pouvons alors écrire le vecteur polarisation, comme une somme sur la polarisation transversale et la polarisation temporelle et longitudinale,

$$\epsilon^\mu = \epsilon_\perp^\mu + \alpha k^\mu, \quad (4.19)$$

avec $\alpha = \epsilon^0/\omega$. La polarisation temporelle et longitudinale peut être absorbé par une transformation de jauge telle que

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \theta \quad (4.20)$$

en choisissant $\theta = -i\alpha e^{-ikx}$. Les polarisations physiques sont alors les polarisations transversales $\epsilon_\perp^\mu$.

Dans le référentiel du laboratoire, c.a.d. le référentiel associé au vecteur d'onde k^μ , on introduit la base

$$e^\mu(\vec{k}, \lambda = 0) = (1, \vec{0}) \quad \text{et} \quad e^\mu(\vec{k}, \lambda = i) = (1, \vec{e}_i). \quad (4.21)$$

On peut alors montrer que

$$e^\mu(\vec{k}, \lambda) e_\mu(\vec{k}, \sigma) = \eta_{\lambda\sigma} \quad \text{et} \quad \sum_\lambda \frac{e_\mu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}, \lambda)}{e(\vec{k}, \lambda) e(\vec{k}, \lambda)} = \eta_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

4.2 Lagrangien et tenseur énergie-impulsion

Le Lagrangien de la théorie de Maxwell s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - J_\mu A^\mu, \quad (4.23)$$

les variables canoniques associées sont A_α et $\partial_\beta A_\alpha$. Sachant que le premier terme peut se réécrire comme

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\partial_\mu A_\nu F_{\sigma\rho}, \quad (4.24)$$

le Lagrangien ci-dessous peut s'écrire

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\partial_\mu A_\nu F_{\sigma\rho} - \frac{\lambda}{2}(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu)^2 - \eta^{\mu\nu}J_\nu A_\mu. \quad (4.25)$$

Les équations d'Euler-Lagrange,

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}, \quad (4.26)$$

correspondent alors à la relation

$$\boxed{\square A^\mu + (\lambda - 1) \partial^\mu(\partial A) = J^\mu.} \quad (4.27)$$

En jauge de Lorenz, $\partial A = 0$, ou pour $\lambda = 1$ on retrouve alors la théorie de Maxwell.

Le tenseur énergie-impulsion s'obtient selon Éq. (2.22). Pour $\lambda = 0$ et $J^\mu = 0$, on obtient

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} (\partial^\nu A_\alpha) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\alpha} (\partial^\nu A_\alpha) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F \cdot F. \quad (4.28)$$

Cette expression vérifie naturellement la conservation $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

La transformation de jauge donnée en Éq. (4.20) laisse invariant le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$, mais pas le tenseur énergie-impulsion comme défini ci-dessus. En effet, la variation associée à cette transformation de jauge est donnée par

$$\delta T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu (\partial_\alpha \theta) = \delta(F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu). \quad (4.29)$$

Afin de rendre le tenseur énergie-impulsion invariant de jauge, on inclut alors le terme supplémentaire tel que

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}(\partial^\nu A_\alpha) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F \cdot F + F^{\mu\alpha}(\partial_\alpha A^\nu) = -F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F \cdot F, \quad (4.30)$$

ce qui change pas la conservation

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.31)$$

et ce qui donne bien

$$\delta T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.32)$$

au niveau de la transformation de jauge ci-dessus. L'Hamiltonien est alors donné par

$$\boxed{\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2,} \quad (4.33)$$

et le vecteur de Poynting, exprimant le flux d'énergie, est donné par

$$\Pi^i = T^{0i} = \epsilon_{ijk}E^jB^k \quad \Rightarrow \quad \vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{B}. \quad (4.34)$$

4.3 Quantification à la Gupta-Bleuler

Pour $\lambda = 0$, le Lagrangien de la théorie de Maxwell dans le vide, c.a.d. en absence de source, est donné par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

les variables canoniques étant A_α et les moments conjugués

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha)} = F^{\alpha 0}. \quad (4.36)$$

On en conclut que la composante temporelle de Π s'annule,

$$\Pi^0 = F^{00} = 0, \quad (4.37)$$

ce qui constitue un obstacle sérieux à la quantification, car un opérateur dans l'espace de Fock ne peut pas s'annuler. Une possible solution serait de considérer seulement $\vec{A}$ et choisir la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, mais cela ne respecterait pas l'invariance de Lorentz.

Nous allons ici considérer la théorie gouvernée par le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - J_\mu A^\mu, \quad (4.38)$$

qui ne correspond pas strictement à l'électromagnétisme à la Maxwell. En effet, l'espace de Fock associé à ce Lagrangien est plus général, car il contient également les états non physique de polarisation longitudinale et temporelle. Nous allons, dans un premier temps, quantifier

la théorie basée sur ce Lagrangien plus générale, puis, dans un second temps, restreindre l'espace de Fock aux états physiques. Cette méthode est la *quantification à la Gupta-Bleuler*.

Nous allons considérer le Lagrangien donné en Éq. (4.38), nous placer en jauge de Feynman ($\lambda = 1$) et dans le vide ($J^\mu = 0$),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (4.39)$$

Les variables canoniques sont alors A^α , et les moments conjugués sont

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = F^{\alpha 0} - \eta^{0\alpha}(\partial A). \quad (4.40)$$

On impose les relations de commutations

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] = i \eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.41)$$

$$[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = [\Pi^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] = 0. \quad (4.42)$$

Le développement de Fourier du potentiel A^μ correspond à la somme sur les ondes planes et s'écrit

$$A_\mu(x) = \int d\vec{k} \sum_{\lambda=0}^3 \left[a(\vec{k}, \lambda) e_\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e_\mu(\vec{k}, \lambda) e^{ikx} \right], \quad (4.43)$$

où l'opérateur $a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$ correspond à la création d'un quantum électromagnétique d'impulsion $\vec{k}$ et de polarisation $e_\mu(\vec{k}, \lambda)$. L'opérateur $a(\vec{k}, \lambda)$ est l'annihilateur associé,

$$a(\vec{k}, \lambda) |0\rangle = 0. \quad (4.44)$$

Leur commutateur doit vérifier la relation

$$[a(\vec{k}, \lambda), a^\dagger(\vec{p}, \lambda)] = -\eta^{\lambda\sigma} (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \quad (4.45)$$

afin de garantir les relations de commutation imposées ci-dessus. Cependant, cette relation conduit à l'existence d'états de norme négative. Si l'on considère, par exemple, la création d'un quantum de polarisation temporelle,

$$|\psi\rangle = a^\dagger(\vec{k}, \lambda = 0) |0\rangle, \quad (4.46)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \langle 0| a(\vec{k}, \lambda = 0) a^\dagger(\vec{k}, \lambda = 0) |0\rangle = \langle 0| [a(\vec{k}, \lambda = 0), a^\dagger(\vec{k}, \lambda = 0)] |0\rangle \\ &= -(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta(\vec{0}) \langle 0|0\rangle < 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ceci est lié au fait que l'espace de Fock obtenu n'est pas celui de la théorie de Maxwell. En effet, il contient en plus des états non physiques. On rappelle que la condition $\partial A = 0$ ne peut pas être satisfaite par les opérateurs. En revanche, elle peut servir pour sélectionner

le sous-espace de Fock correspondant à la théorie de l'électromagnétisme à la Maxwell. En effet, ce sous-espace peut être défini en imposant

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = 0. \quad (4.48)$$

L'opérateur ∂A s'exprime

$$\partial A = \partial_\mu A^\mu(x) = \partial_\mu A_+^\mu(x) + \partial_\mu A_-^\mu(x), \quad (4.49)$$

telle que les deux parties correspondent respectivement à la solution à énergie positive et énergie négative,

$$\partial_\mu A_+^\mu(x) = -i \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu a(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx}, \quad (4.50)$$

$$\partial_\mu A_-^\mu(x) = i \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}. \quad (4.51)$$

On peut alors conclure qu'une telle décomposition tient aussi pour le champ A^μ ,

$$A^\mu(x) = A_+^\mu(x) + A_-^\mu(x). \quad (4.52)$$

La condition donnée en Éq. (4.48) est alors équivalente à sélectionner la composante de A^μ à énergie positive,

$$A_+^\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 a(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx}. \quad (4.53)$$

Si l'on impose en plus

$$\partial_\mu A_+^\mu(x) = 0, \quad (4.54)$$

on retrouve une expression équivalente à Éq. (4.18),

$$\left[a(\vec{k}, \lambda = 0) - a(\vec{k}, \lambda = 3) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (4.55)$$

Chaque état physique peut alors s'écrire

$$|\psi\rangle = |\psi_\perp\rangle \oplus |\phi\rangle, \quad (4.56)$$

où $|\psi_\perp\rangle$ contient les polarisations transversales et $|\phi\rangle$ contient les polarisations temporelle et longitudinale. La structure de $|\phi\rangle$ est fortement contrainte, cette contrainte correspond à l'égalité classique entre les polarisations ϵ^0 et ϵ^3 de l'onde plane.

4.4 Propagateur de Feynman

Le propagateur de Feynman du champ électromagnétique s'exprime comme

$$G_F(x - y) = i \int d\tilde{k} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right]. \quad (4.57)$$

Tout comme pour le champ scalaire discuté lors des chapitres précédents, cette expression est liée à un T-produit,

$$i \eta^{\mu\nu} G_F(x - y) = \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \} | 0 \rangle. \quad (4.58)$$

Chapitre 4 – Exercices

Exercice 4.1

Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $G_{\text{ret}}(x)$ définie en Éq. (4.13) est donnée par l'expression donnée en Éq. (4.14). En déduire l'expression du propagateur donnée en Éq. (4.15).

Exercice 4.2

Montrer que les équations d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien (4.23) se mettent sous la forme donnée en Éq. (4.27)

Exercice 4.3

En partant de la définition (4.30), démontrer les expressions données en (4.33) et (4.34).

Exercice 4.4

Démontrer l'expression du propagateur donnée en Éq. (4.57). Démontrer ensuite la relation donnée en Éq. (4.58) entre le propagateur de Feynman et le T-produit.

❖ Chapitre 5 : Quantification du champ fermionique

Le dernier type de particule à traiter avant de pouvoir parler des interactions sont les champs fermioniques. Nous allons considérer ici les champs fermioniques de spin 1/2, c.a.d. des champs de Dirac décrivant les fermions du modèle standard (leptons et quarks).

5.1 Lagrangien et tenseur énergie-impulsion

Le Lagrangien décrivant un champ de Dirac massif et libre est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (5.1)$$

Les variables canoniques sont les champs ψ_α et $\bar{\psi}_\alpha$, les moment conjugués associés sont $\partial_\mu \psi_\alpha$ et $\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha$. L'évaluation des équations d'Euler-Lagrange mène bien aux équations de Dirac pour ψ et $\bar{\psi}$,

$$(i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \psi = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0. \quad (5.2)$$

Si l'on considère le Lagrangien plus simple

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\psi} (i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (5.3)$$

on peut conclure que ce dernier est équivalent à celui donné plus haut, car

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{L}} + \tilde{\mathcal{L}}^*). \quad (5.4)$$

La différence des deux Lagrangiens correspond à une quadri-divergence,

$$\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} = -\frac{i}{2} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi]. \quad (5.5)$$

Nous pouvons alors conclure qu'il y a conservation d'un courant. Ce courant peut être mis en évidence en considérant la transformation de jauge du groupe $U(1)$

$$\psi_\alpha \longrightarrow \tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha e^{iq\theta}. \quad (5.6)$$

L'imposition de l'invariance de jauge mène alors à la conservation du courant

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{avec} \quad J^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (5.7)$$

interprété de nouveau comme le courant électrique. Finalement, le tenseur énergie-impulsion est donné par

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\varphi_i = \psi_\alpha, \bar{\psi}_\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} (\partial^\nu \varphi_i) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.8)$$

$$= \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial^\nu \psi) - (\partial^\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi]. \quad (5.9)$$

5.2 Quantification, Hamiltonien, impulsion et charge électrique

Afin de quantifier le champ de Dirac, nous allons considérer son développement en série de Fourier,

$$\psi(x) = \int d\tilde{k} \sum_s \left[b(\vec{k}, s) u(\vec{k}, s) e^{-ikx} + d^\dagger(\vec{k}, s) v(\vec{k}, s) e^{ikx} \right] \quad (5.10)$$

où l'élément différentiel $d\tilde{k}$ est donnée par

$$d\tilde{k} = \frac{m}{E_k} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (5.11)$$

En promouvant les coefficients b et d au rang d'opérateur, il convient d'introduire les relations d'*anti-commutation*

$$\{b(\vec{k}, \alpha), b^\dagger(\vec{p}, \beta)\} = \{d(\vec{k}, \alpha), d^\dagger(\vec{p}, \beta)\} = (2\pi)^3 \frac{E_k}{m} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.12)$$

Tous les autres anti-commutateurs sont nuls. Ces relations impliquent que

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.13)$$

L'Hamiltonien est donnée par la composante temporelle du tenseur énergie-impulsion,

$$H = \int d\vec{x} T^{00} = \int d\vec{x} \frac{i}{2} \left[\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^0 \psi \right]. \quad (5.14)$$

En introduisant la renormalisation de l'énergie du vide à travers le produit normal et après application du théorème de Parseval, on obtient

$$H = \int d\tilde{k} E_k \sum_{s=1,2} : \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d(\vec{k}, s) d^\dagger(\vec{k}, s) \right] : \quad (5.15)$$

$$= \int d\tilde{k} E_k \sum_{s=1,2} \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) + d^\dagger(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \right]. \quad (5.16)$$

Attention au fait que les opérateurs fermioniques *anti-commutent*, on a alors $:dd^\dagger: = -d^\dagger d$. Dans le même esprit, l'opérateur impulsion est donné par

$$P^\mu = \int d\vec{x} T^{0\mu} = \int d\vec{x} \frac{i}{2} \left[\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \right], \quad (5.17)$$

ce qui mène à

$$P^\mu = \int d\tilde{k} k^\mu \sum_{s=1,2} : \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d(\vec{k}, s) d^\dagger(\vec{k}, s) \right] : \quad (5.18)$$

$$= \int d\tilde{k} k^\mu \sum_{s=1,2} \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) + d^\dagger(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \right]. \quad (5.19)$$

Finalement, la charge électrique est identifiée avec la composante temporelle du courant,

$$Q = \int d\vec{x} J^0 = q \int d\vec{x} \psi^\dagger \psi, \quad (5.20)$$

ce qui donne

$$Q = q \int d\vec{k} \sum_{s=1,2} \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d^\dagger(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \right]. \quad (5.21)$$

L'opérateur $b^\dagger(\vec{k}, s)$ exprime alors la création d'une particule d'énergie E_k , d'impulsion $\vec{k}$, de spin s , et de charge q , tandis que l'opérateur $d^\dagger(\vec{k}, s)$ exprime la création d'une particule avec la même énergie, la même impulsion, le même spin, mais avec charge opposée $-q$.

5.3 Propagateur de Feynman

Comme lors de la discussion du champ scalaire, le champ fermionique peut s'écrire comme l'intégrale sur toutes les sources accompagnées de leurs propagateurs respectifs,

$$\psi(x) = \int d^4y G(x-y) S(y). \quad (5.22)$$

L'utilisation de l'équation de Dirac permet alors de montrer que le propagateur satisfait également à une équation de Dirac avec source,

$$(i \not{\partial} - m) G(x-y) = \delta(x-y). \quad (5.23)$$

En utilisant les transformées de Fourier, on obtient

$$(\not{k} - m) G(k) = 1, \quad (5.24)$$

et en conséquence

$$G(k) = \frac{1}{\not{k} - m} = (\not{k} - m)^{-1} = \frac{\not{k} + m}{(k^0)^2 - E_k^2}. \quad (5.25)$$

Attention au caractère matriciel de ce propagateur ! Passant de nouveau par le théorème des résidues afin d'évaluer l'intégrale

$$G_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G_F(k) e^{-ikx}, \quad (5.26)$$

on obtient le propagateur de Feynman

$$G_F(x-y) = -i \int d\vec{k} \left[\theta(x^0 - y^0) \Lambda_+(k) e^{-ikx} + \theta(y^0 - x^0) \Lambda_-(k) e^{ikx} \right], \quad (5.27)$$

avec les solutions à énergie positive et négative

$$\Lambda_+(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \quad \text{et} \quad \Lambda_-(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}. \quad (5.28)$$

Ce propagateur peut s'exprimer sous forme d'un T-produit de deux champs fermioniques,

$$\langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = i [G_F(x-y)]_{\alpha\beta}. \quad (5.29)$$

Chapitre 5 – Exercices

Exercice 5.1

À partir la transformation de jauge donnée en Éq. (5.6), construire le courant donné en Éq. (5.7) et montrer qu'il se conserve.

Exercice 5.2

À partir de l'expression donnée en Eq. (5.17), démontrer l'expression de l'opérateur impulsion donnée en Eq. (5.19).

Exercice 5.3

Démontrer les relations d'anti-commutation données en Éq. (5.13).

Exercice 5.4

Démontrer l'expression de la charge électrique donnée Éq. (5.21) en utilisant les relations données en Éq. (0.71) et Éq. (0.72).

Exercice 5.5

Démontrer la relation (5.29) entre le propagateur de Feynman et le T-produit.

❖ Chapitre 6 : Champs en interaction

Ayant vu la quantification canonique de divers type de champs, nous sommes maintenant prêts à décrire l'interaction entre particules élémentaires, comme p.ex. des collisions auprès d'un collisionneur, la désintégration d'une particule, l'annihilation de matière noire, la conversion $\mu - e$ dans un atome, etc.

Le but ultime est de développer la description de tels processus en terme de *diagrammes de Feynman*, qui constituent à la fois une représentation graphique des processus et une prescription mathématique pour le calcul de l'amplitude associée. Typiquement, on cherche à calculer la *section efficace* associé à un certain processus.

Nous allons commencer cette thématique par la discussion de la théorie des perturbations avant d'introduire le théorème de Wick, nécessaire pour ensuite élaborer les *règles de Feynman*.

6.1 Théorie des perturbations

De manière générale, il est impossible de calculer $\mathcal{U}(t, t_0)$, surtout en présence de termes d'interaction dans l'Hamiltonien. Il est alors impossible de prédire le comportement d'un système quantique.

Ici, nous allons considérer le cas particulier où le terme d'interaction est petit devant l'Hamiltonien libre. Nous supposons alors que le Hamiltonien peut s'écrire comme une somme,

$$H = H_0 + H_1, \quad (6.1)$$

de l'Hamiltonien libre H_0 et l'Hamiltonien d'interaction H_1 . Ce dernier est supposé "petit" est peut ainsi être considéré comme une *perturbation*. De plus, nous supposons que $H_1 = 0$ pour $t < t_0$.

Pour donner un exemple, considérons l'Hamiltonien

$$H = H_0 + H_1 = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2 + \epsilon(t)X^4. \quad (6.2)$$

Si $\epsilon(t)$ est "petit", ce terme constitue perturbation de l'oscillateur harmonique décrit par les deux premiers termes.

Pour donner un deuxième exemple faisant appel à un champ scalaire, considérons le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \lambda \varphi^4, \quad (6.3)$$

où l'Hamiltonien associé

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \lambda \varphi^4. \quad (6.4)$$

Le terme $\lambda\varphi^4$ est un terme d'interaction entre quatre champs scalaires. Si le paramètre de couplage λ est "petit", il s'agit d'une perturbation du Lagrangien ou Hamiltonien libre.

Dans ce qui suit, nous allons adresser la question comment obtenir une expression pour l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$ dans cette situation.

6.2 Schéma d'interaction et matrice $\mathcal{S}$

Le *schéma d'interaction* consiste à séparer l'opérateur d'évolution tel qu'il s'écrit comme un produit de l'opérateur d'évolution due à l'Hamiltonien libre et l'opérateur d'évolution associé à l'interaction perturbative,

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}_0(t, t_0) \mathcal{U}_i(t, t_0). \quad (6.5)$$

On en déduit que

$$\mathcal{U}_i(t, t_0) = \mathcal{U}_0^{-1}(t, t_0) \mathcal{U}(t, t_0), \quad (6.6)$$

puis on obtient pour la dérivée

$$i \frac{d\mathcal{U}_i}{dt} = \mathcal{U}_0^{-1} H_{I,S} \mathcal{U}_0 \mathcal{U}_i = H_I \mathcal{U}_i, \quad (6.7)$$

où on a pu identifier l'Hamiltonien d'interaction H_I exprimé dans le schéma de Heisenberg sous l'effet de l'évolution $\mathcal{U}_0$ seul, c.a.d. comme si la perturbation était absente.

L'opérateur d'évolution $\mathcal{U}_i$ peut être calculé de manière *perturbative*. Si l'on suppose que l'interaction prend effet à $t = t_0$, nous avons $\mathcal{U}_i(t_0, t < t_0) = 1$. La relation donnée en Éq. (6.7) implique que

$$\frac{d\mathcal{U}_i}{dt} = -i H_I \mathcal{U}_i. \quad (6.8)$$

L'intégration de cette relation entre $t = t_0$ et $t = t_f$ donne

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\mathcal{U}_i}{dt} dt = \mathcal{U}_i(t_f) - \mathcal{U}_i(t_0) = \mathcal{U}_i(t_f) - 1 = -i \int_{t_0}^{t_f} H_I(t) \mathcal{U}_i(t) dt. \quad (6.9)$$

On obtient alors pour l'opérateur $\mathcal{U}_i$ la relation

$$\mathcal{U}_i(t_f) = 1 - i \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) \mathcal{U}_i(t), \quad (6.10)$$

qui donne une prescription itérative ou récursive pour le calcul de l'opérateur $\mathcal{U}_i$. En effet, l'insertion itérative de l'expression obtenue sous l'intégrale mène au développement

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i(t_f) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) + (-i)^2 \int_{t_1}^{t_f} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ & + (-i)^3 \int_{t_1}^{t_f} dt_1 \int_{t_2}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

En considérant les permutations des temps $t_1, t_2, t_3, \dots$, on peut montrer que cela est équivalent à

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i(t_f) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) + (-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} dt_1 \int_{t_0}^{t_f} dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \dots \\ & + (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t_f} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_f} dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} + \dots \end{aligned} \quad (6.12)$$

Nous avons alors développé l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}_i$ de manière perturbative selon les puissances de l'Hamiltonien d'interaction H_I . L'expression ci-dessus peut encore se réécrire comme

$$\mathcal{U}_i(t_f) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) \right] \right\} \quad (6.13)$$

Finalement, on supposant que la région d'interaction occupe tout l'espace, nous identifions $t_0 = -\infty$ et $t_f = +\infty$. Dans cette limite, l'opérateur d'évolution devient la *matrice d'interaction*,

$$\boxed{\mathcal{S} = T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right] \right\} = T \left\{ \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(t) \right] \right\}} \quad (6.14)$$

6.3 Théorème de Wick

Dans cette partie du cours, nous allons élaborer des relations entre produits de champs, notamment entre produit normal et T-produit d'un certain nombre de champs. Ces relations, élaborées initialement par Dyson et Wick (1949-1950), puis utilisées par Feynman dans le cadre de la théorie quantique des champs, nous seront indispensables dans l'élaboration des règles de Feynman pour la description d'interactions entre particules élémentaires. Nous allons discuter séparément les cas de champs bosoniques et fermioniques.

6.3.1 Cas de champs bosoniques

De manière générale, un champ bosonique φ se décompose en une partie à énergie positive, φ^+ , et une partie à énergie négative, φ^- , tel que

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x). \quad (6.15)$$

Autrement dit, nous avons

$$\varphi^+(x) |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0| \varphi^-(x) = 0. \quad (6.16)$$

On s'intéresse au produit $\varphi_1 \varphi_2$ de deux champs bosoniques φ_1 et φ_2 ,

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1^+ + \varphi_1^-, \quad (6.17)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2^+ + \varphi_2^-. \quad (6.18)$$

Pour ces deux champs, le produit normal et le T-produit sont respectivement donnés par

$$: \varphi_1 \varphi_2 : = \varphi_1^+ \varphi_2^+ + \varphi_1^- \varphi_2^+ + \varphi_2^- \varphi_1^+ + \varphi_1^- \varphi_2^- , \quad (6.19)$$

$$T\{\varphi_1 \varphi_2\} = \theta(t_1 - t_2) \varphi_1 \varphi_2 + \theta(t_2 - t_1) \varphi_2 \varphi_1 . \quad (6.20)$$

On en déduit d'abord

$$\varphi_1 \varphi_2 - : \varphi_1 \varphi_2 : = [\varphi_1^+, \varphi_2^-] , \quad (6.21)$$

puis, en appliquant le T-produit,

$$\boxed{T\{\varphi_1 \varphi_2\} = : \varphi_1 \varphi_2 : + \overline{\varphi_1 \varphi_2} ,} \quad (6.22)$$

avec la définition du *crochet chronologique*

$$\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \langle 0 | T\{\varphi_1 \varphi_2\} | 0 \rangle . \quad (6.23)$$

L'expression donnée en Éq. (6.34) est connue sous le nom du *théorème de Wick* pour deux champs bosoniques.

Nous allons considérer maintenant le produit de trois champs bosoniques, $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$. Sans restriction nous pouvons choisir l'instant t_3 comme l'instant le plus antérieur, c.a.d. $t_3 < t_1$ et $t_3 < t_2$, ou encore

$$T\{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\} = T\{\varphi_1 \varphi_2\} \varphi_3 . \quad (6.24)$$

En utilisant les résultats obtenus ci-dessus pour le produit des deux champs $\varphi_1 \varphi_2$, on obtient théorème de Wick pour trois champs bosoniques,

$$\boxed{T\{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\} = : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 : + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 + \overline{\varphi_2 \varphi_3} \varphi_1 + \overline{\varphi_1 \varphi_3} \varphi_2 .} \quad (6.25)$$

De manière similaire, le T-produit de quatre champs fermionique peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} T\{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4\} = : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \\ + \overline{\varphi_1 \varphi_2} : \varphi_3 \varphi_4 : + \overline{\varphi_1 \varphi_3} : \varphi_2 \varphi_4 : + \overline{\varphi_1 \varphi_4} : \varphi_2 \varphi_3 : \\ + \overline{\varphi_2 \varphi_3} : \varphi_1 \varphi_4 : + \overline{\varphi_2 \varphi_4} : \varphi_1 \varphi_3 : + \overline{\varphi_3 \varphi_4} : \varphi_1 \varphi_2 : \\ + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_3} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_3} , \end{aligned} \quad (6.26)$$

correspondant au théorème de Wick pour quatre champs bosoniques.

6.3.2 Cas de champs fermioniques

De la même manière que le champ bosonique, un champ fermionique ψ s'écrit comme la somme sur une partie à énergie positive, ψ^+ , et une partie à énergie négative, ψ^- ,

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) , \quad (6.27)$$

tel que

$$\psi^+(x) |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0| \psi^-(x) = 0. \quad (6.28)$$

On s'intéresse au produit $\psi_1\psi_2$ de deux champs fermioniques ψ_1 et ψ_2 ,

$$\psi_1 = \psi_1(x_1) = \psi_1^+ + \psi_1^-, \quad (6.29)$$

$$\psi_2 = \psi_2(x_2) = \psi_2^+ + \psi_2^-. \quad (6.30)$$

Pour ces deux champs, le produit normal et le T-produit sont respectivement donnés par

$$:\psi_1\psi_2: = \psi_1^+\psi_2^+ + \psi_1^-\psi_2^+ - \psi_2^-\psi_1^+ + \psi_1^-\psi_2^-, \quad (6.31)$$

$$T\{\psi_1\psi_2\} = \theta(t_1 - t_2)\psi_1\psi_2 - \theta(t_2 - t_1)\psi_2\psi_1. \quad (6.32)$$

On en déduit d'abord

$$\psi_1\psi_2 - :\psi_1\psi_2: = \{\psi_1^+, \psi_2^-\}, \quad (6.33)$$

puis, en appliquant le T-produit,

$$T\{\psi_1\psi_2\} = :\psi_1\psi_2: + \overline{\psi_1\psi_2}, \quad (6.34)$$

avec la définition du *crochet chronologique*

$$\overline{\psi_1\psi_2} = \langle 0| T\{\psi_1\psi_2\} |0\rangle. \quad (6.35)$$

L'expression donnée en Éq. (6.34) est connue sous le nom du *théorème de Wick* pour deux champs fermioniques.

De la même manière que pour les champs bosoniques discutés ci-dessus, mais en faisant attention aux anti-commutations et signes, on démontre le théorème de Wick pour trois, quatre, ... fermions. Pour trois fermions, cela donne

$$T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = :\psi_1\psi_2\psi_3: + \overline{\psi_1\psi_2}\psi_3 + \overline{\psi_2\psi_3}\psi_1 - \overline{\psi_1\psi_3}\psi_2. \quad (6.36)$$

6.3.3 Cas de plusieurs produits

Dans la pratique (voir prochain chapitre), il faudra souvent évaluer le T-produit de plusieurs produits normaux de champs. Dans ce contexte, il convient de démontrer l'expression

$$\begin{aligned} T\{:\varphi_1\varphi_2::\varphi_3\varphi_4:\} &= :\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4: + :\overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\varphi_4: + :\overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\varphi_4: \\ &+ :\varphi_1\overline{\varphi_2\varphi_3}\varphi_4: + :\varphi_1\overline{\varphi_2\varphi_3}\varphi_4: \\ &+ :\overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\varphi_4: + :\overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\varphi_4: . \end{aligned} \quad (6.37)$$

Il est à noter qu'il n'y a pas de crochets entre φ_1 et φ_2 , ni entre φ_3 et φ_4 .

Chapitre 6 – Exercices

Exercice 6.1

Démontrer le théorème de Wick pour quatre champs bosoniques.

Exercice 6.2

Démontrer la relation donnée en Éq. (6.37).

Devoir maison

Merci de rendre votre devoir soit sous forme papier soit par email au plus tard le **19 nov. 2024**. Pour rappel, les deux devoirs maisons donnent un potentiel bonus de 2/20 sur la note de l'examen final du module.

Partie 1

Démontrer le théorème de Wick pour trois champs fermioniques.

Partie 2

Soit une théorie scalaire comprenant le scalaire réel ϕ définie par le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^3 - \kappa\phi^4.$$

1. Identifier le terme cinétique, le terme de masse ainsi que le(s) terme(s) d'interaction de ce Lagrangien.
2. Donner une visualisation en terme de vertex où diagramme de Feynman pour le(s) terme(s) d'interaction.
3. Rappeler l'expression définissant la matrice d'interaction $\mathcal{S}$ à partir du Lagrangien d'interaction.
4. Calculer la matrice $\mathcal{S}$ à l'ordre 2 du Lagrangien d'interaction.
5. Interpréter chaque terme de l'expression obtenue en terme d'un diagramme de Feynman.
6. Identifier finalement les termes parmi ceux obtenus ci-dessus qui contribuent au processus de diffusion

$$\phi\phi \rightarrow \phi\phi.$$

❖ Chapitre 7 : Règles de Feynman

Suite à la discussion du schéma d'interaction, de la matrice d'interaction ainsi que du théorème de Wick, nous sommes prêts à considérer le calcul d'un processus afin d'élaborer les *règles de Feynman*.

Dans ce chapitre, nous allons voir cette partie à l'aide d'un processus d'exemple, notamment la *diffusion Compton*,

$$\gamma(\vec{k}_1, \lambda_1) e^-(\vec{p}_1, s_1) \longrightarrow \gamma(\vec{k}_2, \lambda_2) e^-(\vec{p}_2, s_2). \quad (7.1)$$

7.1 Élément de matrice $\mathcal{S}$

On suppose que la réaction ci-dessous se déroule dans un volume $\mathcal{V}$ pendant la durée $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{V} = \int d\vec{x} = (2\pi)^3 \delta(\vec{0}), \quad (7.2)$$

$$\mathcal{T} = \int dt = (2\pi) \delta(0). \quad (7.3)$$

Suivant les quantifications discutées lors des Chapitres 4 et 5, l'état initial se construit selon

$$|i\rangle = C_i b^\dagger(\vec{p}_1, s_1) a^\dagger(\vec{k}_1, \lambda_1) |0\rangle = C_i b_1^\dagger a_1^\dagger |0\rangle, \quad (7.4)$$

tandis que l'état final s'écrit

$$|f\rangle = C_f b^\dagger(\vec{p}_2, s_2) a^\dagger(\vec{k}_2, \lambda_2) |0\rangle = C_f b_2^\dagger a_2^\dagger |0\rangle. \quad (7.5)$$

Les coefficients de normalisation ci-dessus sont donnés en fonction des énergies des particules participant à la réaction,

$$C_{i,f} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{1,2}\mathcal{V}}} \frac{1}{\sqrt{E_{1,2}/m\mathcal{V}}}, \quad (7.6)$$

où $\epsilon_{1,2}$ est l'énergie des photons et $E_{1,2}$ l'énergie des électrons.

L'amplitude de probabilité associée au processus en question est alors donnée par

$$\mathcal{S}_{fi} = \langle f | \mathcal{S} | i \rangle = \langle 0 | a_2 b_2 \mathcal{S} b_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle, \quad (7.7)$$

la probabilité associée est $|\mathcal{S}_{fi}|^2$. Le taux de réaction est alors donné par $|\mathcal{S}_{fi}|^2/\mathcal{V}\mathcal{T}$.

7.2 Développement et réduction de l'élément de matrice

On rappelle que la matrice $\mathcal{S}$ se développe en une série de polynômes. Il faut pousser ce développement au second ordre en q afin de trouver les premiers temps non nuls contribuant au processus en question. Au second ordre, on peut alors montrer que la contribution non nulle s'écrit

$$\mathcal{S}_{fi}^{(2)} = (-iq)^2 \int d^4x \int d^4y : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \mathcal{A}(y) \psi(y) :, \quad (7.8)$$

où nous reconnaissons le propagateur fermionique,

$$\mathcal{S}_{fi}^{(2)} = (-iq)^2 C_i C_f \int d^4x \int d^4y : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) iS_F(x-y) \not{A}(y) \psi(y) : , \quad (7.9)$$

Concernant les opérateurs fermioniques qui interviennent dans la relation précédente et examinons leur action sur le vide. Dans la mesure où ils commutent avec les opérateurs bosoniques associés au champ électromagnétique, il suffit de calculer

$$\langle 0 | b_2 : \bar{\psi}(x) \psi(y) : b_1 | 0 \rangle = \langle 0 | b_2 : \left[\bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \right] \left[\psi^+(y) + \psi^-(y) \right] : b_1 | 0 \rangle . \quad (7.10)$$

L'évaluation de ce terme s'appelle une **réduction** et implique des règles simples. La combinaison $\bar{\psi}^-(x) \psi^+(y)$ contient le produit $b^+ b$ qui est ici le seul terme susceptible d'engendrer un résultat non nul. Les trois autres possibilités contiennent au moins un opérateur d ou $d^\dagger$ détruisant le vide à droite ou à gauche. On appliquera les formules de réduction suivantes :

$$\begin{aligned} \psi^+(y) b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) | 0 \rangle &= u(\mathbf{p}_1, s_1) e^{-ip_1 y} | 0 \rangle , \\ \langle 0 | b(\mathbf{p}_2, s_2) \bar{\psi}^-(x) &= \bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2) e^{ip_2 x} \langle 0 | . \end{aligned} \quad (7.11)$$

De la même manière, on obtient des règles de réduction pour la partie bosonique,

$$\begin{aligned} A_\mu^+(x) a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) | 0 \rangle &= e_\mu(\mathbf{k}_1, \lambda_1) e^{-ik_1 x} | 0 \rangle , \\ \langle 0 | a(\mathbf{k}_2, \lambda_2) A_\mu^-(x) &= e_\mu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) e^{ik_2 x} \langle 0 | . \end{aligned} \quad (7.12)$$

On obtient alors pour l'élément de matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} = (-ie)^2 C_i C_f \iint d^4x d^4y &\left[e^{i(p_2+k_2)x} e^{-i(p_1+k_1)y} \bar{u}_2 \not{\epsilon}_2 iS_F(x-y) \not{\epsilon}_1 u_1 \right. \\ &\left. + e^{i(p_2-k_1)x} e^{i(k_2-p_1)y} \bar{u}_2 \not{\epsilon}_1 iS_F(x-y) \not{\epsilon}_2 u_1 \right] . \end{aligned} \quad (7.13)$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser le développement de Fourier du propagateur de Feynman,

$$iS_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)} iS_F(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)} \frac{i}{\not{q} - m} . \quad (7.14)$$

Les intégrales sur x et y sont immédiates et nous aboutissons au résultat final

$$\mathcal{S}_{fi} = C_i C_f (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \mathcal{M}_{fi} , \quad (7.15)$$

où l'élément de matrice $\mathcal{M}_{fi}$ – que nous avons calculé pas à pas – s'écrit

$$\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}_2 (-ie \not{\epsilon}_2) \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m} (-ie \not{\epsilon}_1) u_1 + \bar{u}_2 (-ie \not{\epsilon}_1) \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m} (-ie \not{\epsilon}_2) u_1 . \quad (7.16)$$

7.3 Règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique

Les règles associées au calcul de l'élément de matrice précédent ont été établies par Feynman et permettent de dériver rapidement $\mathcal{M}_{fi}$ à l'aide de diagrammes :

- Un électron initial (ou final) fait apparaître le spineur $u(p, s)$ (ou $\bar{u}(p, s)$).
- Un initial (ou final) fait apparaître le spineur $\bar{v}(p, s)$ (ou $v(p, s)$).
- Un segment de ligne fermionique parcourue par l'impulsion q se décrit par le propagateur de Feynman

$$iS_F(q) = \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.17)$$

- Chaque vertex électromagnétique (point de contact entre une ligne de photon et deux lignes fermioniques) fait intervenir le terme $(-ie\gamma^\mu)$.
- A chaque patte externe associée à un photon d'impulsion k et de polarisation λ est associé le quadri-vecteur $e_\mu(k, \lambda)$.
- Finalement, la ligne ondulée liant le vertex $(-ie\gamma^\mu)$ au vertex $(-ie\gamma^\nu)$ tout en transportant l'impulsion q conduit au propagateur électromagnétique

$$i\eta_{\mu\nu}G_F(q) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (7.18)$$

Chapitre 7 – Exercices

Exercice 7.1

Démontrer les expressions des coefficients de normalisation C_i and C_f données en (7.6).

Problème 7.2

Démontrer les formules de réduction données en (7.12).

❖ Chapitre 8 : Calculs au-delà de l'arbre

Ce chapitre servira comme une introduction au calcul des diagrammes à une boucle, qui sont la première corrections par rapport au calcul dit "à l'arbre". Nous allons tout d'abord voir un exemple relativement simple en théorie scalaire, ce qui permettra d'aborder les notions de *régularisation* des *intégrales de boucles*, ainsi que la *renormalisation*.

8.1 Exemple d'un processus en théorie scalaire ϕ^3

Nous allons nous placer dans une théorie scalaire simple. Le Lagrangien associé au champ ϕ est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^3, \quad (8.1)$$

où l'on reconnaît le Lagrangien libre discutée dans le Chapitre ?? ainsi qu'un terme d'interaction comprenant la paramètre réel λ . Nous allons par ailleurs nous intéresser au processus de diffusion

$$\phi\phi \longrightarrow \phi\phi. \quad (8.2)$$

L'amplitude associée, calculée à l'arbre, est donnée par

$$\mathcal{M}_0 = (-i\lambda)^2 \frac{i}{s - m^2} + (-i\lambda)^2 \frac{i}{t - m^2} + (-i\lambda)^2 \frac{i}{u - m^2}, \quad (8.3)$$

où les impulsions p_s , p_t et p_u correspondent aux impulsions transférées dans les canaux s , t et u . Les variables de Mandelstam sont données par :

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_s^2, \\ t &= (p_a - p_1)^2 = (p_b - p_2)^2 = p_t^2, \\ u &= (p_a - p_2)^2 = (p_b - p_1)^2 = p_u^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Au niveau d'une boucle, les diagrammes à calculer comprennent des boucles à deux points ("self-energies"), des boucles à trois points ("triangles") et des boucles à quatre points ("boxes"). Chaque boucle comprend une intégrale sur l'impulsion indéterminée dans la boucle. Nous allons par la suite nous intéresser particulièrement à ses intégrales.

Pour le processus en considération, $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$, il y a environ 35 diagrammes au niveau d'une boucle, c.a.d. à l'ordre λ^4 de la théorie de perturbation. Dans le but de l'illustration d'un tel calcul, nous allons, dans un premier temps, nous focaliser à des exemples d'amplitude à une boucle,

$$\mathcal{M}_{2p} = (-i\lambda)^4 \frac{i}{p_s^2 - m^2} \frac{i}{p_s^2 - m^2} \int d^4q \frac{i}{\mathcal{D}_0} \frac{i}{\mathcal{D}_1}, \quad (8.5)$$

$$\mathcal{M}_{3p} = (-i\lambda)^4 \frac{i}{p_s^2 - m^2} \int d^4q \frac{i}{\mathcal{D}_0} \frac{i}{\mathcal{D}_1} \frac{i}{\mathcal{D}_1}, \quad (8.6)$$

$$\mathcal{M}_{4p} = (-i\lambda)^4 \int d^4q \frac{i}{\mathcal{D}_0} \frac{i}{\mathcal{D}_1} \frac{i}{\mathcal{D}_2} \frac{i}{\mathcal{D}_3}, \quad (8.7)$$

l'intégration tenant compte du fait que l'impulsion des particules dans la boucle n'est pas déterminée. Les dénominateurs sont donnés par

$$\mathcal{D}_0 = q^2 - m^2, \quad (8.8)$$

$$\mathcal{D}_1 = (q - p_s)^2 - m^2, \quad (8.9)$$

$$\mathcal{D}_2 = (q - p_2)^2 - m^2, \quad (8.10)$$

$$\mathcal{D}_3 = (q - p_3)^2 - m^2. \quad (8.11)$$

8.2 Divergences ultraviolette et régularisation

Une intégrale de boucle peut être convergente ou divergente selon sa structure exacte (fermions vs. bosons, nombre de propagateurs, structure des couplages, ...). On introduit le *degré superficiel de divergence* :

$$\delta = DL - 2B - F, \quad (8.12)$$

où D est le nombre de dimensions spatio-temporelles, L est le nombre de boucles, B le nombre de propagateurs bosoniques, et F le nombre de propagateurs fermioniques. Pour une intégrale donnée, on conclut concernant sa convergence :

$$\begin{aligned} \delta > 0 : & \text{ divergente} \\ \delta = 0 : & \text{ logarithmiquement divergente} \\ \delta < 0 : & \text{ convergente} \end{aligned}$$

En $D = 4$ dimensions, la première intégrale donnée en (8.7) est alors (logarithmiquement) divergente, tandis que les deux autres convergent. Nous allons, dans la suite, nous concentrer sur l'intégrale divergente

$$I_2 = \int d^4q \frac{1}{\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1} = \int d^4q \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{1}{(q - p)^2 - m^2}. \quad (8.13)$$

Une possibilité de régulariser la divergence, c.a.d. de rendre l'intégrale convergente, et de la calculer en $D = 4 - 2\epsilon$ ($\epsilon > 0$) dimensions. En prenant la limite $D \rightarrow 4$ ($\epsilon \rightarrow 0$), la divergence se manifestera comme un pôle de la forme $1/\epsilon$. Nous verrons plus tard comment traiter cette divergence. Afin de préserver la dimension de l'intégrale, le passage en D dimensions se fait selon

$$\int d^4q \longrightarrow \mu^{4-D} \int d^Dq. \quad (8.14)$$

Le paramètre μ porte la dimension d'une masse, est non-physique, et sera ultérieurement identifiée avec l'*échelle de renormalisation*.

8.3 Calcul explicite d'une intégrale de boucle

Nous allons commencer par l'exemple de l'intégrale donnée en (8.15). Pour des raisons de convention, nous ajustons le préfacteur. Par ailleurs, nous considérons le cas plus général

avec deux masses $m_0 \neq m_1$,

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m_0^2} \frac{1}{(q - p_1)^2 - m_1^2}. \quad (8.15)$$

Cet exemple nous permettra de voir la technique de calcul ainsi que de mettre en évidence la divergence contenue dans l'intégrale.

La première étape consiste à utiliser la *paramétrisation de Feynman*,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[a(1-x) + bx]^2}. \quad (8.16)$$

En identifiant $a = \mathcal{D}_0$ et $b = \mathcal{D}_1$, cela conduit à

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \int_0^1 dx \frac{1}{[(q^2 - m_0^2)(1-x) + ((q - p_1)^2 - m_1^2)x]^2} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{1}{[(q + xp_1)^2 - x^2 p_1^2 + x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) - m_0^2 + i\epsilon]^2}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

où les termes du dénominateur ont été regroupés en vue des étapes suivantes. Afin de simplifier le dénominateur, nous effectuons d'abord le changement de variables $q \rightarrow q + xp_1$, ce qui permet d'écrire

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{1}{[q^2 - A^2 + i\epsilon]^2}, \quad (8.18)$$

avec

$$A^2 = x^2 p_1^2 - x(p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2. \quad (8.19)$$

Nous effectuons par la suite une *rotation de Wick* qui consiste en un changement de variable d'intégration $q \rightarrow q_E$, défini par

$$q_0 \rightarrow iq_{E,0} \quad \text{et} \quad \vec{q} \rightarrow \vec{q}_E. \quad (8.20)$$

En conséquence, nous obtenons

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 = -q_{E,0}^2 - \vec{q}_E^2 = -q_E^2 \leq 0, \quad (8.21)$$

où le carré q_E^2 a été calculé en utilisant la métrique Euclidienne au lieu de celle de Minkowski. L'intégrale devient alors

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int d^D q_E \frac{i}{[q_E^2 - A^2 + i\epsilon]^2}. \quad (8.22)$$

En remarquant que l'intégrale présente maintenant une symétrie sphérique, nous passons en coordonnées sphériques,

$$I_{2p} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \int_0^1 dx \int d\Omega_D \int_0^\infty dq_E \frac{q_E^{D-1}}{[q_E^2 - A^2 + i\epsilon]^2} \quad (8.23)$$

où Ω_D désigne l'angle solide en D dimensions. C'est angle solide peut s'exprimer comme

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}, \quad (8.24)$$

avec la *fonction Gamma* d'Euler définie comme

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-x}. \quad (8.25)$$

En utilisant en plus l'égalité

$$dq_E q_E^{D-1} = \frac{1}{2} dq_E^2 (q_E^2)^{D/2-1} \equiv \frac{1}{2} dy y^{D/2-1}, \quad (8.26)$$

l'intégrale devient

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^1 dx [A^2 - i\epsilon]^{D/2-2} \int_0^1 dy (1-y)^{D/2-1} y^{2-D/2-1} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx [A^2 - i\epsilon]^{D/2-2} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 dx [A^2 - i\epsilon]^{D/2-2}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Le dernier terme (intégrale sur y) a été identifié à la *fonction Beta* d'Euler,

$$B(x, y) = \int dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (8.28)$$

En se rappelant que $D = 4 - 2\epsilon$, on obtient finalement l'intégrale

$$I_{2p} = (4\pi)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1+\epsilon) \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx [A^2 - i\epsilon]^{-\epsilon}. \quad (8.29)$$

Inspiré par la limite $D \rightarrow 4$ ($\epsilon \rightarrow 0$), nous effectuons les développements limités

$$(4\pi)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \simeq 1 - \gamma_E + \ln(4\pi), \quad (8.30)$$

$$[A^2 - i\epsilon]^{-\epsilon} \mu^{2\epsilon} \simeq 1 - \epsilon \ln \frac{A^2 - i\epsilon}{\mu^2}, \quad (8.31)$$

où $\gamma_E = -\Gamma'(1) \approx 0.557\dots$ est la *constante d'Euler-Mascheroni*.

Dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, l'intégrale peut alors s'écrire

$$I_{2p} = \Delta_\epsilon - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{A^2 - i\epsilon}{\mu^2} \right)^2, \quad (8.32)$$

Le premier terme contient la divergence ultraviolette,

$$\Delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi), \quad (8.33)$$

tandis que l'intégrale restante sur x est convergente. Les informations relatives aux processus que l'on considère (impulsion p_1 , masses m_0 et m_1) sont compris dans le terme A^2 défini en (8.19).

L'intégrale convergente sur x peut se calculer en fonction de l'impulsion p_1 et des masses m_0 et m_1 . Nous donnons ici deux exemples de cas particuliers,

$$I_{2p}(0, m_0, m_1) = \Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2}, \quad (8.34)$$

$$I_{2p}(p_1, 0, 0) = \Delta_\epsilon + 2 - \ln \frac{-p_1^2}{\mu^2}. \quad (8.35)$$

L'intégrale correspondant au cas général valable pour $p_1^2 \neq 0$ et $m_1^2 \neq m_2^2$ est plus compliqué d'exprimer analytiquement, mais peut sans difficulté être évaluée numériquement.

On remarque que chaque intégrale dépend du paramètre μ , introduit lors de la régularisation dimensionnelle. Ce paramètre est non-physique, sa valeur numérique ne peut alors pas être lié directement au processus en question. Dans la pratique, il convient de choisir une valeur proche de l'échelle du processus ($\mu^2 \sim s$) ou proche d'une masse ayant un rôle important dans le processus ($\mu^2 = m^2$, p.ex. dans le cas d'une désintégration).

Un résultat calculé à ordre fixe (p.ex. à une boucle) dépendra dans la plupart des cas de ce paramètre non-physique, identifié avec l'échelle de renormalisation. La dépendance d'un résultat à ce paramètre est d'ordre supérieur : la variation de la section efficace à une boucle pour différentes valeurs de μ sera comparable à la correction due aux diagrammes à deux boucles. Dans cet esprit, une variation de l'échelle de renormalisation dans un calcul peut permettre d'estimer l'incertitude théorique associé à ce résultat. Finalement, la dépendance à l'échelle de renormalisation disparaîtrait si on pourrait inclure tous les ordres dans la théorie de perturbations.

Un calcul similaire permet de calculer les intégrales à un, à trois, ou à quatre propagateurs. Après une paramétrisation de Feynman adaptée ainsi que la rotation de Wick, on arrive toujours à exprimer une éventuelle singularité comme indiqué en (8.33). La partie convergente peut contenir des fonctions plus compliquées comme p.ex. des poly-logarithmes. Dans la pratique, il existe des bibliothèques numériques pour calculer ses intégrales.

8.4 Renormalisation

La présence d'une divergence dans le résultat précédent suggère que ne correspond pas à une observable physique. En conséquence, on conclut que le paramètres du Lagrangien (ici : ϕ , m^2 , λ) ne sont pas les "bons" paramètres physiques. Le concept de **renormalisation** a pour but de rendre les résultats convergents en redéfinissant les paramètres du Lagrangien.

Tout d'abord, le Lagrangien donné en (8.1) est interprété comme le Lagrangien non-renormalisé,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \lambda_0\phi_0^3, \quad (8.36)$$

l'index "0" indiquant qu'il s'agit d'une quantité "nue" ou non-renormalisée. La renormalisation consiste à redéfinir le champ ϕ selon

$$\phi_0 \rightarrow Z\phi_r, \quad (8.37)$$

l'index "r" indiquant maintenant qu'il s'agit d'une quantité renormalisée. Le Lagrangien devient alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z^2 (\partial\phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 Z^2 \phi_0^2 - \lambda_0 Z^3 \phi_0^3. \quad (8.38)$$

Afin d'éliminer les paramètres "nus" toujours présents, on définit les constantes de renormalisation,

$$\delta Z_\phi = Z^2 - 1 \quad \delta Z_m = m_0^2 Z^2 - 1 \quad \delta Z_\lambda = \lambda_0 Z^3 - 1. \quad (8.39)$$

Le Lagrangien peut alors se récrire comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi_r)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_r^2 - \lambda \phi_r^3 + \frac{1}{2} \delta Z_\phi (\partial\phi_r)^2 - \frac{1}{2} \delta Z_m \phi_r^2 - \delta Z_\lambda \phi_r^3, \quad (8.40)$$

où l'on reconnaît dans la première partie le Lagrangien donné en (8.1) exprimé en faisant appel au champ renormalisé ϕ_r ainsi qu'aux paramètres physiques m^2 et λ . La deuxième partie du Lagrangien (8.40) contient les "contre-termes" exprimés en fonction des constantes de renormalisation δZ_ϕ , δZ_m et δZ_λ , associé respectivement au champ, à la masse carrée et au couplage. Ces constantes de renormalisation peuvent être déterminées en imposant des **conditions de renormalisation** telles qu'elles annulent les divergences ultraviolettes. Un choix donné de telles conditions définit un **schéma de renormalisation**.

Le schéma de renormalisation le plus simple est celui de "**Minimal Subtraction**" (MS) où le contreterme ne contient que le pôle $1/\epsilon$. Dans la pratique, on utilise souvent le schéma "Modified Minimal Subtraction" ($\overline{\text{MS}}$) où le contreterme est constitué de $\Delta_\epsilon = 1/\epsilon - \gamma_E + \ln 4\pi$. D'autres schéma consistent en une définition des paramètres renormalisés à l'aide d'observables physiques, p.ex. la masse physique (schéma "**on-shell**") d'une particule ou une largeur de désintégration.

La prédiction d'une quantité observable dépend en général du schéma choisi. La différence entre deux schémas de renormalisation est d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations (comme la dépendance à l'échelle de renormalisation μ discutée auparavant). Si l'on tenait compte de tous les ordres de perturbation, la dépendance du schéma disparaîtrait.

Afin de donner un exemple, revenons à la boucle calculée dans la Section 8.3. La contribution à une boucle à la masse peut s'écrire

$$-iM^2(p^2) = (-i\lambda)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + I_{2p}^{\text{fin}}(p^2, m^2, \mu^2) \right] + i(p^2 \delta Z_\phi + \delta Z_m), \quad (8.41)$$

où I_{2p}^{fin} désigne la partie convergente donnée en (8.32). Dans les schémas MS ou $\overline{\text{MS}}$, les constantes de renormalisation sont données par

$$\delta Z_m = \lambda^2 \frac{1}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \delta Z_\lambda = \lambda^2 \Delta_\epsilon = \lambda^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right]. \quad (8.42)$$

Une autre façon de définir le contre-terme est d'exiger que la masse renormalisée corresponde à la masse physique, c.a.d. au pôle du propagateur de Feynman. On impose alors que m^2 est le pôle du propagateur et que le résidu du propagateur soit égal à i , ce qui conduit à

$$M^2(p^2 = m^2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial M^2}{\partial p^2}(p^2 = m^2) = 0. \quad (8.43)$$

Dans notre exemple, la constante de renormalisation s'exprime alors comme

$$\delta Z_m = \lambda^2 \Delta_\epsilon + \text{fin.}, \quad (8.44)$$

où le dernier terme est convergent, mais potentiellement difficile à exprimer analytiquement.

Nous terminons la discussion en remarquant que tous les schémas de renormalisation permettent d'annuler les divergences ultraviolettes. La différence entre deux schémas ne contient que des termes convergents qui sont d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations.

8.5 Corrections réelles et divergences infrarouges

Dans le cas du processus $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ discuté dans le cadre de la théorie ϕ^3 , en plus des corrections à boucles dont l'interférence avec les diagrammes à l'arbre contribue à l'ordre suivant en théorie des perturbations, d'autres diagrammes contribuent au même ordre : les diagrammes à émission réelles. Dans un calcul complet à ordre fixe (p.ex. à une boucle) il faut alors tenir compte de ces diagrammes afin d'avoir un résultat cohérent.

Ces diagrammes d'émission réelle peuvent contenir des divergences si la particule émise est sans masse. Ces divergences peuvent être causées par une énergie tendant vers zéro de cette particule (*divergence "soft"*) et/ou une particule sans masse qui devient collinéaire avec une autre particule externe du processus (*divergence collinéaire*). Physiquement, une telle situation est confondue avec le processus sans émission réelle de la particule sans masse. Cette dégénérescence physique se manifeste mathématiquement comme une singularité dans les amplitudes correspondantes.

La structure des amplitudes carrées pour les processus d'émission réelles est liée à celle des interférences entre diagrammes à boucle et les diagrammes à l'arbre. De ce fait, les mêmes singularités soft et collinéaires se retrouvent également dans les intégrales de boucles.

Selon le théorème de *Kinoshita–Lee–Nauenberg* ces *singularités infrarouges* s'annulent entre eux si l'on tient compte de tous les diagrammes contribuant au même ordre de manière consistante. La difficulté technique réside dans le traitement des pôles associés, car ils apparaissent séparément dans la partie interférence boucle-arbre ainsi que la partie émission réelle. Diverses techniques existent pour le calcul (numérique), dont la technique du "*phase-space slicing*" (introduction d'un cut-off sur l'énergie de la particule émise) ou la technique de "*dipole subtraction*" (méthode numérique pour combiner les deux éléments de matrices). Ces techniques ne seront pas discutées dans le cadre de ce cours.

Chapitre 8 – Exercices

Exercice 8.1

Démontrer l'égalité donnée en (8.16). Établir ensuite que l'intégrale donnée en (8.15) peut s'écrire comme proposée dans la deuxième ligne de (8.17).

Exercice 8.2

En partant de la définition (8.25) de la fonction Gamma, montrer successivement que

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \text{ (pour } n \in \mathbb{N} \text{)}. \quad (8.45)$$

Bonus : Démontrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (8.46)$$

Exercice 8.3

Démontrer l'égalité donnée en (8.26). Établir ensuite que l'intégrale I_{2p} prend la forme donnée en (8.27).

Devoir maison

Merci de rendre votre devoir soit sous forme papier soit par email au plus tard le **14 jan. 2025**. Pour rappel, les deux devoirs maisons donnent un potentiel bonus de 2/20 sur la note de l'examen final du module.

Partie 1

Lire attentivement la partie 8.5 du cours, puis répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les différences entre des divergences ultraviolettes (UV) et des divergences infrarouges (IR) ?
- Pouvez-vous expliquer pourquoi *physiquement* on rencontre des divergences IR dans certains cas ?

Partie 2

On rappelle que le Lagrangien d'interaction de l'électrodynamique quantique (QED) est donné par

$$\mathcal{L} \supset -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \quad (8.47)$$

où ψ et $\bar{\psi}$ correspondent à l'électron et positron, et A_μ au photon. On s'intéressera au processus

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-. \quad (8.48)$$

Trouver les diagrammes de Feynman correspondant à ce processus à l'arbre, puis à une boucle, et finalement l'émission réelle d'un photon. Déterminer quelles intégrales sont divergentes dans l'ultraviolet. Identifier enfin les associations entre émission réelle et interférences arbre-boucle concernant la structure infrarouge. Indication : Pour cette dernière question, procéder au niveau des diagrammes.

❖ Chapitre 9 : Théories de jauge

Ce chapitre est une introduction aux théories de jauge non-abéliennes. Nous commencerons par la notion de la dérivée covariante, puis analyserons les propriétés essentielles de l'électromagnétisme afin de les généraliser à une théorie s'appuyant sur un groupe non-abélien.

9.1 La dérivée covariante en électromagnétisme

La notion de dérivée covariante apparaît déjà en mécanique classique dans l'étude d'une particule de masse m plongée dans un champ électromagnétique dont le potentiel vecteur est A^μ (avec $A^0 = \Phi$ et $A^i = A$). Au Lagrangien $L_0 = T$ de la particule libre, il convient de soustraire une énergie potentielle V dépendant de la position x et de la vitesse v de la particule. Le Lagrangien se met sous la forme

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q(\Phi - vA), \quad (9.1)$$

avec $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Puisque l'énergie potentielle V dépend de la vitesse, le moment conjugué de x^i n'est plus l'impulsion $m\dot{x}^i$, mais l'impulsion généralisée

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i} = m\dot{x}^i + qA^i. \quad (9.2)$$

La quantité de mouvement mv est donc remplacée par

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (9.3)$$

Le Hamiltonien associé est défini par $H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$, ce qui conduit à

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + q\Phi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi. \quad (9.4)$$

Le Hamiltonien est donc bien égal à l'énergie mécanique totale de la particule, c'est-à-dire à la somme de l'énergie cinétique $mv^2/2$ et de l'énergie potentielle électrique $q\Phi$.

Le champ magnétique $\mathbf{B}$ exerce toujours une force perpendiculaire à la trajectoire. Ne travaillant pas, il n'apparaît pas dans la relation donnant le Hamiltonien. Le passage à la mécanique ondulatoire est alors immédiat. Il convient de substituer à l'impulsion généralisée $\mathbf{p}$ l'opérateur $-i\hbar\nabla$, alors que le Hamiltonien H devient $i\hbar\partial/\partial t$. L'équation de Schrödinger régissant le comportement de la fonction d'onde ψ qui décrit maintenant la particule M s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\Phi \right] \psi. \quad (9.5)$$

En prenant $\hbar = 1$, nous concluons que l'effet du champ électromagnétique sur la particule M est pris en compte via le potentiel vecteur en remplaçant les dérivées temporelles ∂_t et spatiale ∇ par

$$D_t = \partial_t + iq\Phi \quad \text{et} \quad D_i = \partial_i - iqA^i. \quad (9.6)$$

La *dérivée covariante* D_μ vient de faire son apparition. Elle est définie par

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA^\mu. \quad (9.7)$$

La généralisation de l'étude précédente au cas relativiste est tout d'abord fournie par le Lagrangien standard

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (9.8)$$

Les variables canoniques sont toujours les coordonnées x^μ de la particule et la variable temporelle qui intervient dans les équations d'Euler-Lagrange est dans la définition de l'action est le temps $t = x^0$. On montre que le moment conjugué à la variable x^i est égal à

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + qA^i. \quad (9.9)$$

Les équations d'Euler-Lagrange se ramènent alors à la relation fondamentale de la dynamique exprimant l'action sur la particule de la force de Lorentz,

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (9.10)$$

Le bon Lagrangien permettant de passer de la mécanique classique relativiste à la mécanique quantique est

$$\mathcal{L} = -\frac{m}{2}U_\mu U^\mu - qU_\mu A^\mu. \quad (9.11)$$

Le moment conjugué de la variable canonique x^μ est l'impulsion généralisée

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^\mu} = -mU_\mu - qA_\mu. \quad (9.12)$$

La quantification canonique permet le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique en remplaçant le crochet de Poisson des deux fonctions $\mathcal{A}(q_i, p_i, t)$ et $\mathcal{B}(q_i, p_i, t)$ par le commutateur des opérateurs quantiques A et B correspondants selon la règle

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [A, B]. \quad (9.13)$$

On en déduit que les opérateurs quantiques Π_μ et x^ν associés à l'impulsion généralisée et à la position vérifient les relations de commutation

$$[\Pi_\mu, x^\nu] = -i\hbar \delta_\mu^{\nu} = -i\hbar \eta_\mu^\nu. \quad (9.14)$$

Une réalisation possible de la relation précédente consiste à considérer que x^ν revient à la multiplication de la fonction d'onde ψ par la position x^ν alors que l'opérateur Π_μ appliqué à ψ est défini par la dérivée $-i\hbar \partial_\mu \psi$. On en déduit qu'en présence du potentiel vecteur A_μ , l'opérateur quantique mU_μ est équivalent à

$$mU_\mu = i\hbar \partial_\mu - qA_\mu, \quad (9.15)$$

et que par conséquent, dans l'équation de Schrödinger décrivant le comportement de la fonction d'onde ψ , l'effet des interactions électromagnétiques revient à remplacer la dérivée partielle ∂_μ par la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar}A_\mu. \quad (9.16)$$

En présence d'une interaction électromagnétique, le Lagrangien de Dirac (5.3) devient

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\not{D} - m] \psi. \quad (9.17)$$

En utilisant la définition (9.7), $\mathcal{L}$ apparaît comme la somme du Lagrangien $\mathcal{L}_0$ de la particule libre et du Lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_{\text{int}}$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} = \bar{\psi} [i\not{\partial} - m] \psi - q\bar{\psi}A\psi. \quad (9.18)$$

9.2 Quelques leçons de l'électromagnétisme

Dénotons par ψ un champ complexe. Il peut s'agir d'un champ scalaire chargé ϕ ou encore de la composante ψ_α d'un champ de Dirac. Nous avons déjà défini la manière dont le groupe $U(1)$ agit sur ψ via la rotation complexe

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-iq\theta}\psi. \quad (9.19)$$

L'angle de rotation θ est multiplié par la charge q que porte la particule décrite par ψ . Une transformation de jauge est de **première espèce** ou **globale** si θ est indépendant de la position. Dans ce cas, la dérivée $\partial_\mu\psi$ se transforme comme ψ avec

$$\partial_\mu\psi \longrightarrow \partial_\mu\psi' = e^{-iq\theta}\partial_\mu\psi. \quad (9.20)$$

Il n'en va pas de même lorsque θ dépend de la position x dans l'espace-temps. Dans ce cas, la transformation de jauge est dite de **seconde espèce** ou **locale**. La dérivée $\partial_\mu\psi$ se transforme alors selon

$$\partial_\mu\psi' = e^{-iq\theta}\partial_\mu\psi - iq(\partial_\mu\theta)\psi' \neq e^{-iq\theta}\partial_\mu\psi. \quad (9.21)$$

On introduit la dérivée covariante D_μ en exigeant que $D_\mu\psi$ se transforme comme le champ ψ lui-même, et ce en toute généralité, donc lorsque θ dépend de x

$$D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' = e^{-iq\theta}D_\mu\psi. \quad (9.22)$$

Le potentiel vecteur A_μ qui entre dans la définition (9.7) de D_μ doit alors se transformer en A'_μ tel que

$$D'_\mu\psi' = (\partial_\mu + iqA'_\mu)\psi' = e^{-iq\theta}D_\mu\psi = e^{-iq\theta}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi. \quad (9.23)$$

On en déduit que

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta. \quad (9.24)$$

9.3 Introduction aux théories de jauge non-abéliennes

Une théorie de jauge non-abélienne est construite à partir du groupe de Lie non-commutatif $\mathcal{G}$ dont l'algèbre $\mathcal{A}$ de dimension D est constituée de vecteurs

$$X = \sum_{a=1}^D \theta^a X_a = \theta^a X_a. \quad (9.25)$$

Le groupe de jauge $\mathcal{G}$ agit sur l'espace vectoriel V de dimension n construit sur le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Les D vecteurs de base X_a de l'algèbre $\mathcal{A}$ y sont représentés par les matrices $n \times n$ A_a . Tout élément $g = \exp(X)$ du groupe $\mathcal{G}$ est représenté dans V par l'automorphisme ρ_g dont la matrice est égale à

$$[\rho_g] = [\exp(g\theta^a A_a)] = [\exp(-ig\theta^a T_a)], \quad (9.26)$$

où les générateurs T_a remplacent iA_a . Le rôle du champ complexe ψ précédent est maintenant tenu par les n champs réels ou complexes ψ_i qui constituent les composantes du vecteur ψ appartenant à la représentation V réelle ou complexe. La transformation de jauge (9.19) se généralise en

$$\psi_i \longrightarrow \psi'_i = [\exp(-ig\theta^a T_a)]_{ij} \psi_j, \quad (9.27)$$

où g est la constante de couplage associé au groupe de jauge $\mathcal{G}$ et correspond à la charge q en électromagnétisme. Les coordonnées θ^a du vecteur X de l'algèbre $\mathcal{A}$ généralisent l'angle θ et dépendent de la position x dans le cas d'une transformation locale. Les indices i et j varient de 1 à n puisque le vecteur ψ vit dans la représentation V de dimension n . Une écriture plus compacte de la relation précédente est

$$\psi \longrightarrow \psi' = w \mathcal{R}_\theta \psi = e^{-q\theta} \psi, \quad (9.28)$$

dans laquelle θ désigne la somme $\theta^a T_a$ et représente dans V le vecteur X à un facteur i près. Le groupe $\mathcal{G}$ est non-abélien dans la mesure où les générateurs T_a entretiennent les relations de commutation

$$[T_a, T_b] = iC_{ab}^c T_c, \quad (9.29)$$

où apparaissent les constantes de structure réelles C_{ab}^c .

La dérivée covariante (9.7) est définie désormais à l'aide des D potentiels vecteurs A_μ^a par la matrice $n \times n$ agissant dans V

$$[D_\mu]_{ij} = \partial_\mu \mathbb{I}_{ij} + igA_\mu^a [T_a]_{ij}. \quad (9.30)$$

Cette expression se met sous la forme plus compacte

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu, \quad (9.31)$$

où A_μ dénote la somme $A_\mu^a T_a$ portant sur les matrices T_a avec comme coefficients les D potentiels vecteurs A_μ^a . La i -ème composante du vecteur $D_\mu \psi$ est donc égale à

$$[D_\mu \psi]_i = \partial_\mu \psi_i + igA_\mu^a [T_a]_{ij} \psi_j = \partial_\mu \psi_i + ig[A_\mu]_{ij} \psi_j. \quad (9.32)$$

La dérivée covariante $D_\mu \psi$ se transforme sous l'effet de la transformation de jauge $\mathcal{R}_\theta$ comme le vecteur ψ ,

$$D_\mu \psi \longrightarrow D_\mu \psi' = \mathcal{R}_\theta D_\mu \psi = e^{-ig\theta} D_\mu \psi. \quad (9.33)$$

Dans le cas d'une théorie de jauge non-abélienne construite sur le groupe de Lie $\mathcal{G}$, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est remplacé par les D champs de jauge $F_{\mu\nu}^a$ constituant les composantes du vecteur $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ (à un facteur i près, puisque les vecteurs de base de $\mathcal{A}$ sont les matrices $n \times n$ $A_a = -iT_a$). En s'inspirant de la relation (??), le vecteur champ de force $F_{\mu\nu}$ est défini par

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = ig F_{\mu\nu} \psi = ig F_{\mu\nu}^a T_a \psi. \quad (9.34)$$

La relation (??) de l'électromagnétisme se généralise dans le cas du groupe de jauge non-abélien $\mathcal{G}$ en

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (9.35)$$

Les D champs $F_{\mu\nu}^a$ contiennent en sus des dérivées déjà présentes en électromagnétisme un produit quadratique des potentiels vecteurs. Dans le cas de $SU(2)$, le champ de jauge est défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - g W_\mu \times W_\nu. \quad (9.36)$$

Sous l'effet de la transformation de jauge caractérisée par la matrice $\mathcal{R}_\theta$, le vecteur ψ et sa dérivée covariante $D_\mu \psi$ se transforment de manière identique selon

$$D'_\mu \psi' = \mathcal{R}_\theta D_\mu \psi = \mathcal{R}_\theta D_\mu \mathcal{R}_\theta^{-1} \psi'. \quad (9.37)$$

Puisque l'égalité précédente est vérifiée pour tout vecteur ψ' de la représentation V , on en déduit

$$D'_\mu = \mathcal{R}_\theta D_\mu \mathcal{R}_\theta^{-1}. \quad (9.38)$$

Le commutateur $[D_\mu, D_\nu]$ se transforme de manière similaire et, en vertu de la relation (9.34), il en va de même pour le champ $F_{\mu\nu}$ avec

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = \mathcal{R}_\theta F_{\mu\nu} \mathcal{R}_\theta^{-1}. \quad (9.39)$$

Au premier ordre, la transformation de jauge se développe comme

$$\mathcal{R}_\theta = e^{-iq\theta} = 1 - ig\theta = 1 - ig\theta^a T_a. \quad (9.40)$$

On en déduit que le champs de force $F_{\mu\nu}^a$ varient de

$$\delta F_{\mu\nu}^a = g C_{bc}^a \theta^b F_{\mu\nu}^c. \quad (9.41)$$

L'utilisation de l'antisymétrie des constantes C_{ab}^a vis-à-vis des indices a et b permet d'établir pour le cas de $SU(2)$ que

$$\delta F_{\mu\nu} = g \theta \times F_{\mu\nu}. \quad (9.42)$$

Dans le cas de $SU(2)$, le vecteur $F_{\mu\nu}$ se comporte donc exactement comme un vecteur x de l'espace physique usuel $\mathbb{R}^3$ subissant la rotation $g\theta$. Ce n'est pas étonnant, car avec

ses trois composantes, $F_{\mu\nu}$ a été construit comme un vecteur de l'algèbre de $SU(2)$. Or, si celle-ci engendre par exponentiation le groupe $\mathcal{G}$, elle peut également se concevoir comme une représentation particulière de $\mathcal{G}$ appelée la représentation adjointe. Cette propriété est en fait générale.

Par définition, la **représentation adjointe** d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ est son algèbre $\mathcal{A}$ considérée pour l'occasion comme un espace vectoriel V de représentation parmi d'autres. L'algèbre $\mathcal{A}$ agit sur la représentation adjointe via les matrices $D \times D$ A_a dont les éléments sont donnés par

$$[A_a]_j^k = -i[T_a]_j^k = C_{aj}^k. \quad (9.43)$$

Cette définition des matrices T_a de l'adjointe est cohérente. En effet, on peut d'abord démontrer que les trois matrices quelconques A , B et C vérifient la relation

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0. \quad (9.44)$$

En s'aidant de (9.29), on en déduit que

$$C_{am}^n C_{bc}^m + C_{cm}^n C_{ab}^m + C_{bm}^n C_{ac}^m = 0, \quad (9.45)$$

ce qui s'interprète comme le produit

$$[T_a T_b]_c^n - [T_b T_a]_c^n = i C_{ab}^m [T_m]_c^n, \quad (9.46)$$

où les matrices T_a sont définies par (9.43). Ces matrices $D \times D$ vérifient donc les relations de structure (9.29) et représentent bien l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'adjointe.

Lors d'une transformation de jauge infinitésimale, donc caractérisée par les D angles θ^a très petits devant 1, les champs de force $F_{\mu\nu}^n$ varient selon la prescription (9.41) et deviennent

$$F'_{\mu\nu}^n = F_{\mu\nu}^n + g C_{am}^n \theta^a F_{\mu\nu}^m. \quad (9.47)$$

Les constantes structures qui apparaissent se réinterprètent comme des éléments de matrices T_a de l'adjointe avec

$$F'_{\mu\nu}^n = F_{\mu\nu}^n - i g \theta^a [T_a]_m^n F_{\mu\nu}^m. \quad (9.48)$$

Nous voyons apparaître la matrice de rotation infinitésimale

$$\mathcal{R}_\theta \approx 1 - i g \theta^a T_a, \quad (9.49)$$

dont les éléments s'écrivent

$$[\mathcal{R}_\theta] = \delta_m^n - i g \theta^a [T_a]_m^n. \quad (9.50)$$

La matrice $\mathcal{R}_\theta$ agit sur le vecteur $F_{\mu\nu}$ de l'adjointe dont les D composantes $F_{\mu\nu}^a = \psi_i$ se comportent comme celles du multiplet ψ d'une représentation quelconque.

La **métrique** du groupe $\mathcal{G}$ est définie à partir des générateurs T_a de la représentation adjointe par la relation

$$g_{ab} = \text{Tr}\{T_a T_b\}. \quad (9.51)$$

En s'aidant des relations précédentes, cette identité prend la forme

$$g_{ab} = -C_{am}^n C_{bn}^m. \quad (9.52)$$

Pour les groupes simples et compacts, il existe toujours une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ dans laquelle la métrique se réduit à l'identité à un facteur multiplicatif près,

$$g_{ab} = \kappa \delta_{ab}. \quad (9.53)$$

Nous sommes prêts désormais à généraliser le Lagrangien (4.23) de l'électromagnétisme classique à une théorie de jauge non-abélienne. Le Lagrangien des champs de jauge est en effet défini par

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4\kappa} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{4\kappa} \text{Tr}\{T_a T_b\} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}. \quad (9.54)$$

Les matrices T_a étant celles de la représentation adjointe, le Lagrangien se simplifie en

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4\kappa} g_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (9.55)$$

La rotation de jauge $\mathcal{R}_\theta$ transforme le vecteur $F_{\mu\nu}$ et $F'_{\mu\nu}$ selon la règle (9.47). On en déduit que le Lagrangien est invariant de jauge. Dans le cas de $SU(2)$, il se met sous la forme

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = \frac{1}{4} [\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - g W_\mu \times W_\nu] [\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - g W^\mu \times W^\nu]. \quad (9.56)$$

Ce Lagrangien contient des produits impliquant trois ou quatre champs de jauge. Contrairement au cas de l'électromagnétisme, les champs de jauge d'une théorie non-abélienne interagissent entre eux.

Chapitre 9 – Exercices

Exercice 9.1

Déduire la relation (9.33) de la loi de transformation pour les potentiels vecteurs

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \mathcal{R}_\theta A_\mu \mathcal{R}_\theta^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu \mathcal{R}_\theta) \mathcal{R}_\theta^{-1}. \quad (9.57)$$

Montrer que dans la limite où les angles θ^a sont infiniment petits, la transformation de jauge $\mathcal{R}_\theta$ engendre une variation du potentiel vecteur A_μ^a égale à

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \theta^a + g C_{bc}^a \theta^b A_\mu^c. \quad (9.58)$$

Le groupe $SU(2)$ constitue une excellente illustration de la théorie générale. L'algèbre de $SU(2)$ est l'espace vectoriel physique usuel $\mathbb{R}^3$ muni comme seconde loi interne du produit vectoriel $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$. Les potentiels vecteurs associés aux trois générateurs $T_1 = \boldsymbol{T}_x$, $T_2 = \boldsymbol{T}_y$ et $T_3 = \boldsymbol{T}_z$ de l'algèbre sont notés

$$A_\mu^a = W_\mu^a = \{W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3\} = \boldsymbol{W}_\mu. \quad (9.59)$$

Etablir alors que dans ce cas, la relation (9.58) se met sous la forme

$$\delta \boldsymbol{W}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{\theta} + g \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{W}. \quad (9.60)$$

Exercice 9.2

Etablir la relation (9.36).

❖ Chapitre 10 : Brisure spontanée de symétrie

Dans ce chapitre, nous aborderons la notion de *brisure spontanée de symétrie* que nous illustrerons avec le cas simple du "chapeau mexicain". L'existence d'un boson de *Nambu-Goldstone* associé au générateur cassé par le vide y apparaît déjà et une interprétation physique est possible.

Le Lagrangien d'une théorie de jauge est construit afin d'être invariant sous toute rotation $\mathcal{R}_\theta$ du groupe $\mathcal{G}$. Cette symétrie est susceptible d'être *spontanément brisée* si l'état d'énergie minimale de la théorie, et non le Lagrangien, viole l'invariance de jauge. Le chapeau mexicain offre une illustration simple de ce mécanisme. Le potentiel V présenté dans la Figure 1 et bien invariant par rotation dans le plan complexe $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$. Mais la Nature choisit comme vide une configuration d'énergie minimale localisée dans la rigole circulaire du chapeau. Dans la figure, le champ ϕ s'est stabilisé en $\varphi_1^0 = v$ et $\varphi_2^0 = 0$. Cette direction n'est pas invariante par rotation et la symétrie de jauge $U(1)$ de cet exemple est brisée dès lors qu'une direction particulière du plan (φ_1, φ_2) a été choisie. Une brisure spontanée de symétrie est en définitive caractérisée par une invariance du Lagrangien, mais pas des états de la théorie.

10.1 Le cas pédagogique du chapeau mexicain

Afin d'illustrer simplement la notion de brisure spontanée de symétrie, considérons tout d'abord le cas du groupe de jauge abélien $U(1)$. Le champ scalaire chargé étudié au Chapitre ?? sera décrit ici par $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$. Le Lagrangien associé se met sous la forme

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - V. \quad (10.1)$$

Il doit être invariant sous les transformations de jauge globales de ϕ qui correspondent dans ce cas aux rotations complexes

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-iq\theta} \phi. \quad (10.2)$$

C'est bien le cas du terme cinétique puisque l'angle θ est constant. Quant au potentiel, il doit être une fonction de la variable

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^2. \quad (10.3)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ du plan complexe, par ailleurs isomorphe à $\mathbb{R}^2$, a pour coordonnées les champs réels φ_1 et φ_2 . Un exemple de potentiel brisant spontanément la symétrie de rotation $U(1)$ est présenté qualitativement dans la Figure 1. Le minimum de V est atteint pour une valeur R non nulle de la norme du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$. La forme canonique du potentiel V fait intervenir le terme quadratique $\phi^\dagger \phi$ et son carré avec

$$V = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (10.4)$$

Le paramètre μ correspond à une masse et λ est la constante de couplage quartique du champ ϕ .

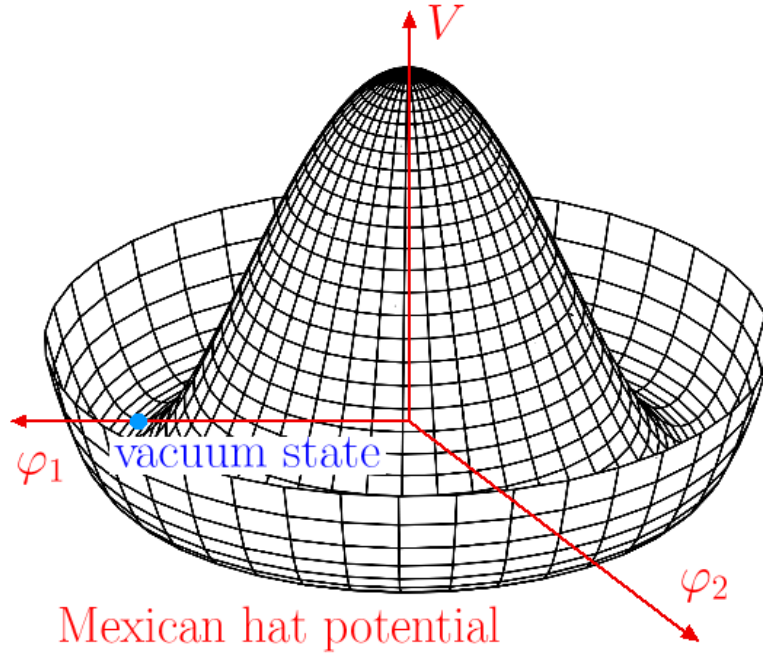


FIGURE 1 – Le chapeau mexicain offre une illustration simple d’une brisure spontanée de symétrie. Le potentiel V du champ scalaire complexe $\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ présenté ici est bien invariant par rotation autour de l’axe vertical, mais la configuration d’énergie minimale correspondant au point bleu ne l’est pas.

En exprimant $\phi^\dagger\phi$ en fonction de la norme $R = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2}$ du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$, on obtient

$$V = -\frac{\mu^2}{2}R^2 + \frac{\lambda}{4}R^4. \quad (10.5)$$

Le minimum du potentiel est atteint pour

$$R = R_0 = v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (10.6)$$

Si l’on ajoute la constante $V_0 = \lambda v^4/4$, nous obtenons la courbe montrée dans la Figure 2 associée à l’expression

$$V = \frac{\lambda}{4}(R^2 - v^2)^2. \quad (10.7)$$

Le fait que le potentiel ne dépend que de la norme R est une illustration de son invariance par rotation dans le plan (φ_1, φ_2) . La Nature choisit comme état de vide $|0\rangle$ la configuration dans laquelle le champ ϕ a l’énergie minimale. Puisque la densité de Hamiltonien associée au Lagrangien (10.1) est égale à

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} + (\nabla\phi^\dagger\nabla\phi) + V, \quad (10.8)$$

l’état d’énergie minimale correspond à un champ scalaire ϕ constant et homogène avec un potentiel V aussi petit que possible. Dans la Figure 1, le vide $|0\rangle$ est représenté par le point bleu associé au vecteur $\boldsymbol{\varphi}_0$ de composantes $\varphi_1^0 = v$ et $\varphi_2^0 = 0$. Tout autre point de la rigole circulaire du chapeau mexicain aurait fait également l’affaire. Une simple rotation de jauge permet alors un changement des coordonnées φ_1 et φ_2 qui nous ramène au cas précédent. Dans le Chapitre ??, nous avons relié à l’invariance de jauge du Lagrangien vis à vis des

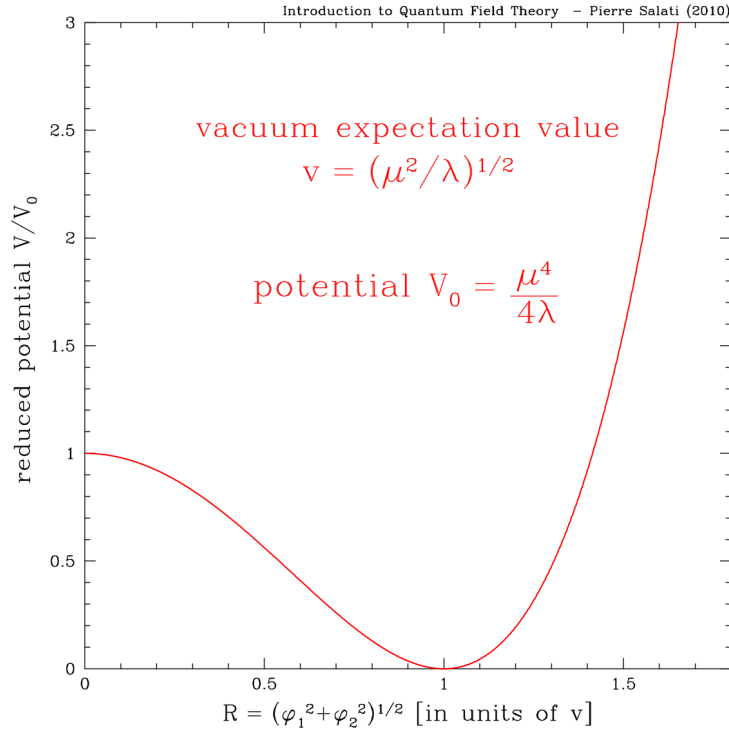


FIGURE 2 – Le potentiel réduit V/V_0 en fonction du rapport R/v dans lequel R désigne la norme du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$. Le potentiel (10.7) est minimal quand il est nul. La norme R prend alors la valeur $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$.

rotations de jauge du groupe $U(1)$ à la notion de charge électrique et à sa conservation. La brisure spontanée de la symétrie $U(1)$ provoque ici l'émergence d'une direction privilégiée $\boldsymbol{\varphi}_0$ et fait apparaître un vide $|0\rangle$ doté d'une charge électrique non nulle. De surcroît, le champ $\boldsymbol{\varphi}$ développe des excitations $\boldsymbol{h}$ autour de sa valeur dans le vide $\boldsymbol{\varphi}_0$ de sorte que

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{h}. \quad (10.9)$$

Une fois exprimé en fonction de $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$, le Lagrangien (10.1) perd explicitement l'invariance sous le groupe $U(1)$. La notion même de charge électrique devient caduque et en conséquence sa conservation.

Nous allons étudier comment la brisure spontanée de $U(1)$ conduit à l'existence d'un vide $|0\rangle$ électriquement chargé. On peut établir tout d'abord que la transformation de jauge (10.2) revient à une rotation dans le plan (φ_1, φ_2) d'un angle égal à $-q\theta$. La matrice de cette rotation s'écrit alors sous la forme $\mathcal{R}_\theta = e^{-i\theta Q}$, où le générateur Q décrivant la charge électrique agit sur $\boldsymbol{\varphi}$ par l'opérateur

$$Q = q \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

L'application de Q sur la configuration d'énergie minimale $|0\rangle = \boldsymbol{\varphi}_0 = (v, 0)$ conduit à

$$iQ|0\rangle = iQ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ qv \end{pmatrix} \neq 0. \quad (10.11)$$

Le vide a alors acquis une charge électrique non nulle.

L'essence même du mécanisme de brisure étudié ici réside dans l'évolution spontanée du système de l'état symétrique $\varphi = 0$ vers la configuration d'énergie minimale φ_0 , appelée également vide, et correspondant au nouvel état fondamental $|0\rangle$ des excitations du champ scalaire. Ce vide dans lequel se stabilise le système n'est plus invariant par rotation. Toute transformation $\mathcal{R}_\theta$ transforme $\varphi_0 = |0\rangle$ en un nouvel état $\varphi'_0 = |0'\rangle$ différent, d'où deux conséquences importantes :

1. Le générateur Q associé à la charge électrique ne laisse plus le vide invariant puisque

$$\varphi_0 - \varphi = (\mathcal{R}_\theta - \mathbb{I}_2) \varphi_0 \simeq -i\theta Q \varphi_0 \neq 0. \quad (10.12)$$

Nous retrouvons le résultat précédent. Le fait que $Q|0\rangle$ soit non nul caractérise la brisure de la symétrie de rotation associée au générateur Q . Celui-ci est cassé par l'existence du vide $|0\rangle$ et l'invariance sous $U(1)$ est perdue. La conséquence physique est un vide électriquement chargé.

2. Une rotation quelconque expédie le vide φ_0 vers le nouvel état φ'_0 également d'énergie minimale (le potentiel est toujours invariant sous $U(1)$) et forcément situé dans la rigole du chapeau mexicain. En prenant toutes les rotations avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, celle-ci est totalement parcourue. Le générateur Q appliqué à φ_0 permet de définir le vecteur $iQ(\varphi_0)$ pointant le long de la vallée du potentiel. Dans le cas de la Figure 1 par exemple, $iQ(\varphi_0)$ est bien parallèle à l'axe φ_2 . Dans cette direction, qui correspond au fond de la rigole du chapeau, le potentiel ne varie pas. L'excitation h_2 doit être de masse nulle.

Afin de vérifier cette importante propriété, on exprime le Lagrangien (10.1) en fonction des champs h_1 et h_2 ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_1)(\partial^\mu h_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_2)(\partial^\mu h_2) - V. \quad (10.13)$$

Le potentiel s'écrit désormais

$$V(h_1, h_2) = \mu^2 h_1^2 + \lambda v h_1 (\mathbf{h}\mathbf{h}) + \frac{\lambda}{4} (\mathbf{h}\mathbf{h})^2, \quad (10.14)$$

le produit scalaire $\mathbf{h}\mathbf{h}$ étant une notation pour $h_1^2 + h_2^2$.

Le seul terme quadratique est $\mu^2 h_1^2$, il confère au champ scalaire neutre h_1 la masse $m_1 = \sqrt{2}\mu$, alors que l'excitation h_2 dirigée le long de la vallée du potentiel a une masse nulle comme anticipé. Le générateur Q , brisé par l'existence d'un vide qu'il ne laisse pas invariant, est associé au champ scalaire de masse nulle h_2 . Nous avons ici une illustration du **théorème de Goldstone**. Celui-ci stipule que dans une théorie de jauge spontanément brisée, chaque générateur T_a ne préservant pas le vide (donc tel que $T_a|0\rangle \neq 0$) est associé à un champ scalaire neutre h_a de masse nulle appelé **boson de Goldstone ou de Nambu-Goldstone**. Le paragraphe suivant confirme ce théorème dans le cas de groupes non-abéliens plus compliqués que $U(1)$. Une démonstration générale est ensuite proposée.

10.2 Généralisation aux groupes $SO(n)$ et $SU(n)$

Le cas de $SO(n)$

Le champ scalaire φ est maintenant un vecteur de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Il a pour coordonnées les n scalaires neutres

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n). \quad (10.15)$$

Le Lagrangien (10.1) se généralise immédiatement sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) - \frac{1}{4}\lambda v^4 + \frac{1}{2}\mu^2(\varphi \cdot \varphi) - \frac{1}{4}\lambda(\varphi \cdot \varphi)^2. \quad (10.16)$$

Il est manifestement invariant sous les rotations de $\mathbb{R}^n$. Le potentiel V par exemple ne dépend que de la norme R du vecteur φ , avec une variation donnée par la relation (10.7). Le minimum de V est donc atteint pour un rayon $R = v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ et la rigole du chapeau mexicain est remplacée ici par la surface à $n - 1$ dimensions d'une sphère de rayon v . Le système évolue spontanément vers une configuration d'énergie, et donc de potentiel, minimale située sur la surface de cette sphère et décrite par le vecteur $\varphi_0 = |0\rangle$. Dans la Figure 3 qui illustre le cas de $SO(3)$, le vide correspond au point bleu qui s'est stabilisé en $(v, 0, 0)$. Dans le cas général, les coordonnées du vides sont égales à

$$\varphi_0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0). \quad (10.17)$$

Les excitations du champ scalaire φ autour du vide φ_0 sont prise en compte par le vecteur

$$h = (h_1, \dots, h_n) \quad (10.18)$$

défini par la relation (10.9). Le potentiel se développe alors autour de sa valeur minimale $V_0 = V(\varphi_0)$ en fonction des champs h_i . En poussant le calcul jusqu'au second ordre inclus, on obtient

$$V(\varphi) = V_0 + \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_0 h_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_0 h_i h_j + \mathcal{O}(h^3). \quad (10.19)$$

La dérivée première de V par rapport à φ_i est nulle en φ_0 . La dérivée seconde s'interprète comme la matrice de masse des excitations h_i ,

$$V(\varphi) = V_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{ij} h_i h_j + \mathcal{O}(h^3). \quad (10.20)$$

Dans la mesure où le potentiel V ne dépend que du rayon R , on établit

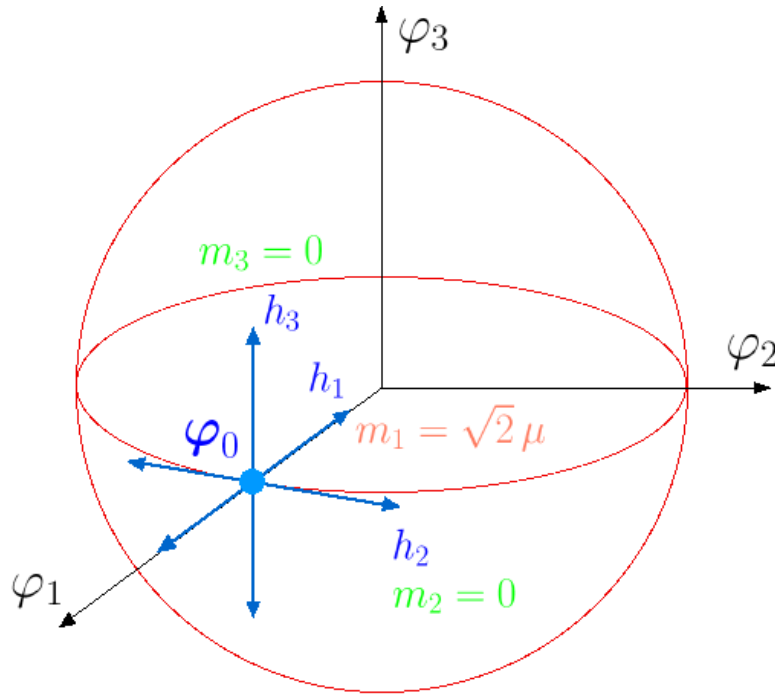
$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = V'(R) \frac{\varphi_i}{R}, \quad (10.21)$$

alors que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = V''(R) \frac{\varphi_i \varphi_j}{R^2} + \frac{V'(R)}{R} \left[\delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{R^2} \right]. \quad (10.22)$$

En φ_0 , le potentiel V est minimum et $V'(R = v) = 0$. On peut montrer que la matrice de masse des excitations est égale à

$$\mathcal{M}_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_0 = V''(v) \frac{\varphi_i^0 \varphi_j^0}{v^2} = 2\mu^2 \frac{\varphi_i^0 \varphi_j^0}{v^2}. \quad (10.23)$$



$SO(n)$ symmetry breaking

FIGURE 3 – La brisure spontanée de symétrie $SO(n)$ est illustrée dans cet exemple à trois dimensions. Le système évolue vers la configuration d'énergie minimale φ_0 située à une distance v du centre. Les excitations du champ scalaire φ autour du vide φ_0 sont décrites par les champs h_1, h_2 et h_3 . Les deux derniers scalaires sont des bosons de Goldstone. Ils pointent en effet en direction de la vallée du potentiel.

Si, à l'instar de la Figure 3, le vide se stabilise le long de l'axe φ_1 uniquement avec

$$\varphi_0 = (v, 0, \dots, 0) \leftrightarrow \varphi_i^0 = \delta_{1i}v, \quad (10.24)$$

la matrice de masse des excitations scalaires h_i est trivialement donnée par

$$\mathcal{M}_{ij} = 2\mu^2 \delta_{1i} \delta_{1j}. \quad (10.25)$$

Seul le champ h_1 acquiert donc la masse $m_1 = \sqrt{2}\mu$. Toutes les autres excitations scalaires de h_2 à h_n sont de masse nulle. Le cas de $SO(n)$ généralise donc l'exemple du chapeau mexicain où l'opérateur Q engendrait les rotations de φ_1 vers φ_2 . Dans $\mathbb{R}^n$, il existe $C_n^2 = n(n-1)/2$ rotations permettant de faire pivoter l'axe φ_i vers l'axe φ_j . Parmi ces opérateurs, le générateur T_{1k} est responsable de la rotation de l'axe φ_1 vers l'axe φ_k ($k \neq 1$). Celle-ci transforme le vide φ_0 en vecteur φ'_0 légèrement différent puisque doté d'une composante dirigée selon φ_k et définie par

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = [e^{-i\theta_{1k}T_{1k}} - \mathbb{I}_n] \varphi_0 \simeq -i\theta_{1k}T_{1k}\varphi_0 \neq 0. \quad (10.26)$$

Le générateur T_{1k} est brisé par le vide $|0\rangle = \varphi_0$ qu'il ne laisse pas invariant. A un facteur multiplicatif θ_{1k} près, il le transforme en $-iT_{1k}(\varphi_0)$ parallèle à l'axe φ_k . L'excitation correspondante est le champ h_k dirigé le long de la surface de la sphère de rayon v et de potentiel minimal. Ce champ ne produisant aucune variation de V dans le voisinage de φ_0 , il est de masse nulle. Nous retrouvons le théorème de Goldstone : aux $(n-1)$ générateurs T_{1k} brisés par le vide correspondent les $(n-1)$ bosons de Nambu-Goldstone h_k de masse nulle.

La symétrie associée au groupe $\mathcal{G} = SO(n)$ est donc spontanément brisée par la stabilisation du système dans la configuration d'énergie minimale $|0\rangle = \varphi_0$. Le vide n'est pas invariant en effet sous une transformation quelconque de $\mathcal{G}$.

Quelle que soit la position de φ_0 sur la sphère de rayon $R = v$, une simple rotation permet de redéfinir les axes φ_i tels que la relation (10.24) peut être utilisée. On peut montrer que le vide est quand même invariant sous les rotations de $\mathcal{G}' = SO(n-1)$ qui basculent l'axe $\varphi_i \neq \varphi_j$ vers l'axe $\varphi_j \neq \varphi_i$.

A l'aide du développement (10.9), le Lagrangien (10.16) se met sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{h})(\partial^\mu \mathbf{h}) - V, \quad (10.27)$$

où le potentiel est donné par

$$V(\mathbf{h}) = \lambda(\varphi_0 \cdot \mathbf{h})^2 + \lambda(\varphi_0 \cdot \mathbf{h})(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^2. \quad (10.28)$$

On retrouve alors la relation (10.14) lorsque le vide est aligné sur l'axe φ_1 .

Le cas de $SU(2)$

Le champ ϕ est ici complexe. Il appartient à la représentation fondamentale **2** de $SU(2)$ isomorphe à $\mathbb{C}^2$ et possède deux composantes Φ^+ et Φ^0 qui forment le doublet

$$\phi = \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}. \quad (10.29)$$

Le Lagrangien du champ scalaire $\mathbf{H}$ construit sur le modèle (10.1) se met sous la forme

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \mathbf{H}^\dagger)(\partial^\mu \mathbf{H}) - V = (\partial_\mu \mathbf{H}^\dagger)(\partial^\mu \mathbf{H}) - \frac{1}{4}\lambda v^4 + \mu^2 \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} - \lambda(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^2. \quad (10.30)$$

Bien qu'apparemment très différent du cas précédent puisque la représentation de $SU(2)$ à laquelle $\mathbf{H}$ appartient est complexe et non réelle, nous allons montrer que nous pouvons cependant nous ramener à $SO(n)$. Encore mieux, le Lagrangien (10.30) cache une invariance sous $SO(4)$ qui englobe celle associée à $SU(2)$. Exprimons pour ce faire les composantes complexes de $\mathbf{H}$ en fonction de leurs parties réelles et imaginaires et posons

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

Le champ scalaire $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ appartenant à $\mathbb{R}^4$ entre alors en scène. Puisque

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3 - i\varphi_4, \varphi_1 - i\varphi_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 - i\varphi_4 \\ \varphi_1 - i\varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varphi \cdot \varphi, \quad (10.32)$$

le Lagrangien (10.30) se réduit à la forme (10.16) étudiée précédemment. Sous l'effet du potentiel V , le système évolue spontanément vers un vide φ_0 situé sur la 3-sphère de rayon

v de l'espace $\mathbb{R}^4$ auquel φ appartient. La question essentielle désormais est de savoir si cette configuration $\varphi_0 = |0\rangle$ brise les générateurs du groupe $SU(2)$, ce dernier constituant un sous-groupe de $SO(4)$. Une rotation de $SU(2)$ transforme H en

$$H \longrightarrow H' = e^{-i\theta \cdot \sigma/2} H \quad (10.33)$$

L'éventuelle constante de couplage g a été absorbée dans la définition des angles θ et le vecteur σ désigne les trois matrices de Pauli σ_x , σ_y et σ_z . Si l'un des générateurs de $SU(2)$ ne laisse pas le vide invariant, il est alors brisé de manière spontanée et un boson de Nambu-Goldstone lui est associé.

La configuration d'énergie minimale est ici prise égale à $\varphi_0 = (v, 0, 0, 0)$ et correspond au doublet de $SU(2)$

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (10.34)$$

Dans la littérature, la valeur dans le vide de H est également noté $\langle H \rangle = H_0$. Appliquer la transformation de jauge (10.33) à H_0 en considérant des angles θ_x , θ_y et θ_z infiniment petits permet d'établir que

$$H'_0 - H_0 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_z & \theta_x - i\theta_y \\ \theta_x + i\theta_y & \theta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (10.35)$$

On en déduit que dans l'espace $\mathbb{R}^4$ dans lequel vit le vecteur φ , le vide φ_0 subit la modification

$$\delta\varphi_1^0 = 0, \quad \delta\varphi_2^0 = \frac{\theta_z}{2}v, \quad \delta\varphi_3^0 = -\frac{\theta_y}{2}v \quad \text{et} \quad \delta\varphi_4^0 = -\frac{\theta_x}{2}v. \quad (10.36)$$

Or la rotation de $SO(4)$ qui bascule l'axe φ_1 vers l'axe φ_2 engendre la variation

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = [e^{-i\theta_{12}T_{12}} - \mathbb{I}_4] \varphi_0 \simeq -i\theta_{12}T_{12}\varphi_0 = (0, \theta_{12}v, 0, 0), \quad (10.37)$$

où seule la composante $\delta\varphi_2^0 = \theta_{12}v$ est non nulle. Nous pouvons dès lors identifier l'angle de la rotation θ_{12} de $SO(4)$ avec le paramètre $\theta_{12}/2$ de $SU(2)$. Le générateur σ_z de $SU(2)$ a le même effet sur la configuration d'énergie minimale φ_0 que le générateur T_{12} de $SO(4)$. Tout comme T_{12} , σ_z est brisé par le vide qu'il ne laisse pas invariant. Le boson de Goldstone associé est le champ scalaire neutre h_2 . Il en va de même à un signe près pour les générateurs $\sigma_y = T_{13}$ et $\sigma_x = T_{14}$ puisque leur effet sur le vide est respectivement donné par

$$\delta\varphi_3^0 = -\frac{\theta_y}{2}v = \theta_{13}v \quad \text{et} \quad \delta\varphi_4^0 = -\frac{\theta_x}{2}v = \theta_{14}v. \quad (10.38)$$

Les excitations scalaires h_3 et h_4 sont les bosons de Goldstone associés. La brisure de $SU(2)$ engendrée par l'évolution spontanée du système vers le vide $\langle H \rangle = H_0$ asymétrique est donc totale. Tous les générateurs du groupe sont cassés et trois bosons de Nambu-Goldstone apparaissent comme le prévoit le théorème de Goldstone.

10.3 Théorème de Goldstone

Nous sommes prêtes désormais à nous attaquer au théorème de Goldstone dans le cas d'un groupe non-abélien $\mathcal{G}$ quelconque. L'algèbre $\mathcal{A}$ associée à pour vecteurs de base les D générateurs X_a . Le champ scalaire ϕ responsable de la brisure de symétrie de jauge appartient à la représentation $\mathcal{V}$. Son potentiel $V(\phi)$ présente un minimum V_0 pour une valeur ϕ_0 non nulle. Cette configuration d'énergie minimale constitue le nouvel état fondamental $|0\rangle$ vers lequel le système évolue spontanément. Le vide $|0\rangle = \phi_0$ casse tout générateur X_a qui ne le laisse pas invariant et qui, de ce fait, vérifie

$$\{A_a\} \times \{\phi_0\} = -i\{T_a\} \times \{\phi_0\} \neq 0. \quad (10.39)$$

La matrice A_a représente dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ le générateur X_a de l'algèbre $\mathcal{A}$. Nous pouvons dès lors classer les éléments de cet ensemble en deux catégories : ceux qui préservent le vide et ceux qui ne le laissent pas invariant.

Montrons tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{A}'$ des générateurs qui préservent le vide constituent une sous-algèbre de $\mathcal{A}$:

1. Soient X_a et X_b deux éléments de $\mathcal{A}'$. Ils sont représentés dans $\mathcal{V}$ par les matrices A_a et A_b vérifiant par définition les égalités

$$\{A_a\} \times \{\phi_0\} = 0 \quad \text{et} \quad \{A_b\} \times \{\phi_0\} = 0. \quad (10.40)$$

Alors pour tout couple de réels α et β , il vient

$$\{\alpha A_a + \beta A_b\} \times \{\phi_0\} = 0. \quad (10.41)$$

Le générateur $\alpha A_a + \beta A_b$ appartient aussi à $\mathcal{A}'$ de sorte que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

2. La seconde loi interne $\star$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ associe à tout couple de générateurs X_a et X_b de $\mathcal{A}$ l'élément $Y = X_a \star X_b$ représenté dans $\mathcal{V}$ par le commutateur $[A_a, A_b]$ des matrices A_a et A_b . En particulier si X_a et X_b appartiennent à $\mathcal{A}'$, l'action de leurs matrices A_a et A_b sur le vide ϕ_0 conduit à l'identité

$$[A_a, A_b] \times \{\phi_0\} = \{A_a\} \times \{A_b\} \times \{\phi_0\} - \{A_b\} \times \{A_a\} \times \{\phi_0\} = 0, \quad (10.42)$$

en vertu de la définition (10.39). Le produit $Y = X_a \star X_b$ appartient encore au sous-espace vectoriel $\mathcal{A}'$ vis à vis duquel la loi $\star$ est donc interne. L'ensemble $\mathcal{A}'$ est bien une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Toute base de $\mathcal{A}$

$$\{X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, \dots, X_D\} \quad (10.43)$$

peut donc se décomposer en un ensemble de générateurs $\{X_1, \dots, X_d\}$ constituant la base de la sous-algèbre $\mathcal{A}'$ ainsi que les générateurs restants $\{X_{d+1}, \dots, X_D\}$ formant une base de l'espace vectoriel $\mathcal{B}$ qui entre dans la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}. \quad (10.44)$$

La sous-algèbre $\mathcal{A}'$ engendre le sous-groupe de Lie $\mathcal{G}'$ du groupe $\mathcal{G}$ qui décrit la symétrie résiduelle laissée intacte par le vide. Dans le cas de $SO(n)$, les générateurs permettant de basculer l'axe $\varphi_i \neq \varphi_1$ vers l'axe $\varphi_j \neq \varphi_1$ engendrent l'algèbre de $SO(n-1)$, sous-groupe résiduel de $SO(n)$.

La seconde étape du raisonnement consiste à faire apparaître les champs de Goldstone. En toute généralité, le champ ϕ appartient à la représentation $\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}$. Cet espace vectoriel peut être réel comme dans le cas de $SO(n)$. Le champ ϕ est alors décrit par les $n = \dim \mathcal{V}$ coordonnées φ_i que le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ y prend et la représentation $\mathcal{V}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. L'alternative est une représentation $\mathcal{V}$ complexe de dimension p . Dans ce cas, ϕ est spécifié par la donnée des p nombres complexes Φ_j . Inspiré par le cas de $SU(2)$, nous pouvons décrire ϕ à l'aide des parties réelles et imaginaires des coordonnées complexes Φ_j en posant

$$\Phi_j = \frac{\varphi_j + i\varphi_{j+1}}{\sqrt{2}}. \quad (10.45)$$

Nous sommes ramenés au cas précédent en définissant le vecteur $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_{2p})$. Ce vecteur appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de dimension $n = 2p$. Bien que cela ne soit pas évident a priori, celui-ci est également une représentation du groupe $\mathcal{G}$. Chaque générateur X_a de l'algèbre $\mathcal{A}$ y est représenté par une matrice $n \times n$ égale à $-i\mathcal{T}_a$ et qui traduit dans $\mathbb{R}^n$ (au niveau des composantes φ_i du vecteur $\boldsymbol{\varphi}$) l'action des matrices $A_a = -iT_a$ de la représentation $\mathcal{V}$.

Dans l'exemple de la brisure spontanée de $SU(2)$, le doublet scalaire complexe $\mathbf{H}$ donne naissance à un vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ à quatre composantes réelles et sur lequel $SU(2)$ agit via des rotations de l'axe φ_1 vers les autres axes. Les matrices $T_a = \sigma_a/2$ de la représentation fondamentale $\mathcal{V} = \mathbf{2}$ de $SU(2)$ sont transcrites dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ auquel $\boldsymbol{\varphi}$ appartient par les matrices 4×4

$$\mathcal{T}_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.46)$$

Les matrices $T_a = \sigma_a/2$ vérifient les relations de commutation $[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}\sigma_c$ qui traduisent la seconde loi interne $\star$ de l'algèbre de $SU(2)$ et la transposent comme il se doit dans la représentation $\mathcal{V} = \mathbf{2}$.

Le vide ϕ_0 de la représentation $\mathcal{V}$ correspond au vecteur $\boldsymbol{\varphi}_0$ de $\mathbb{R}^n$. Les n champs scalaires h_i apparaissent dans le développement (10.9) de $\boldsymbol{\varphi}$ autour de $\boldsymbol{\varphi}_0$. Nous allons considérer maintenant l'application f de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ précédemment défini qui, à tout générateur X_a de $\mathcal{A}$, associe le vecteur $\{-i\mathcal{T}_a\}\boldsymbol{\varphi}_0$ de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que la matrice $-i\mathcal{T}_a$ traduit dans $\mathbb{R}^n$ l'action de la matrice $-iT_a = A_a$ qui représente dans $\mathcal{V}$ le générateur X_a . Dans la mesure où, pour tout couple de réels α et β , il vient

$$\begin{aligned} f(\alpha X_a + \beta X_b) &= \{-i(\alpha\mathcal{T}_a + \beta\mathcal{T}_b)\}\boldsymbol{\varphi}_0 \\ &= \alpha(\{-i\mathcal{T}_a\}\boldsymbol{\varphi}_0) + \beta(\{-i\mathcal{T}_b\}\boldsymbol{\varphi}_0) = \alpha f(X_a) + \beta f(X_b), \end{aligned} \quad (10.47)$$

l'application f est linéaire. Elle transporte l'algèbre $\mathcal{A}$ considérée comme un espace vectoriel de dimension D construit sur $\mathbb{R}$ vers l'espace vectoriel image $\mathbb{R}^n$ de dimension n . Le **théorème du rang** s'applique conduisant à la relation

$$\dim \mathcal{A} = \dim \mathbf{Ker}(f) + \dim \mathbf{Im}(f). \quad (10.48)$$

Le noyau $\mathbf{Ker}(f)$ de l'application f est l'ensemble des éléments X de algèbre $\mathcal{A}$ qui laissent le vide inchangé. Cet ensemble n'est autre que la sous-algèbre $\mathcal{A}'$ de dimension d , définie plus haut, qui engendre le sous-groupe résiduel $\mathcal{G}'$.

L'image de $\mathcal{A}$ par f est le sous-espace $\mathbf{Im}(f)$ inclus dans $\mathbb{R}^n$ et doté du même nombre de dimension que $\mathcal{B}$ puisque

$$\dim \mathbf{Im}(f) = \dim \mathcal{A} - \dim \mathcal{A}' = \dim \mathcal{B} = D - k = K. \quad (10.49)$$

C'est dans cet espace $\mathbb{R}^K$ que vivent les K bosons de Goldstone associés aux K générateurs brisés constituant la base de $\mathcal{B}$.

Le troisième acte de la démonstration consiste à prouver l'assertion précédente. Considérons un élément X_b quelconque appartenant à $\mathcal{B}$. Ce générateur ne laisse pas invariant le vide et nous savons que $\{-i\mathcal{T}_b\}\varphi_0$ est un vecteur non nul de $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}^K$ que nous noterons

$$h = \{-i\mathcal{T}_b\}\varphi_0 = f(X_b). \quad (10.50)$$

Ce vecteur possède les coordonnées h_i et est différent du vecteur nul. A l'aide du générateur X_b et de sa représentation $\{-i\mathcal{T}_b\}$ dans $\mathbb{R}^n$, construisons la rotation

$$\mathcal{R}_b = e^{-i\epsilon\mathcal{T}_b} = \mathbb{I}_n - i\epsilon\mathcal{T}_b, \quad (10.51)$$

où l'angle ϵ est infiniment petit. Une telle rotation agit également sur le vide ϕ_0 de la vraie représentation $\mathcal{V}$ en le transformant en

$$\{\phi'_0\} = \{e^{-i\epsilon\mathcal{T}_b}\} \times \{\phi_0\}, \quad (10.52)$$

auquel correspond le vecteur φ'_0 de $\mathbb{R}^n$. Le potentiel V est invariant de jauge et ne change pas entre ϕ_0 et ϕ'_0 , donc entre φ_0 et φ'_0 . Ces deux points de $\mathbb{R}^n$ infiniment voisins sont au fond de la vallée de potentiel, là où V est localement minimal. Le gradient du potentiel étant nul aussi bien en φ_0 qu'en φ'_0 , il vient

$$0 = \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi'_0} = \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_0} + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0. \quad (10.53)$$

La rotation $\mathcal{R}_\theta$ bascule φ_0 en φ'_0 , engendrant la variation

$$\delta \varphi_0 = \varphi'_0 - \varphi_0 \simeq \{-i\epsilon\mathcal{T}_a\}\varphi_0 = \epsilon h. \quad (10.54)$$

La matrice de masse $\mathcal{M}_{ij}$ des excitations h_j du champ scalaire φ autour du vide étant définie par la dérivée seconde du potentiel en φ_0 , la relation (10.53) conduit à

$$\mathcal{M}_{ij}(\epsilon h_j) = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi_j^0 = 0. \quad (10.55)$$

Le vecteur $\mathbf{h}$ est alors de masse nulle puisqu'en simplifiant par ϵ , on obtient

$$\mathcal{M}_{ij} h_j = 0. \quad (10.56)$$

Tout élément X_b de $\mathcal{B}$ a pour image par f un vecteur de masse nulle. L'ensemble des images des éléments de $\mathcal{B}$ est l'espace vectoriel $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}^K$ possédant K degrés de liberté réels. Ces excitations du champ φ ont toutes une masse nulle. Ce sont les bosons de Nambu-Goldstone associés aux K générateurs brisés de l'algèbre $\mathcal{A}$ qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{B}$.

Chapitre 10 – Exercices

Exercice 10.1

Établir l'expression du potentiel donnée en (10.14).

Exercice 10.2

Démontrer les expressions données en (10.21) et (10.22).

Démontrer ensuite l'expression pour la matrice de masse donnée en (10.23).

Exercice 10.3

Démontrer la relation (10.35) ainsi que la relation (10.36).

❖ Chapitre 11 : Mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Nous allons maintenant compliquer la situation en considérant désormais des théories invariantes sous les transformations de jauge *locales* engendrées par un groupe non-abélien $\mathcal{G}$. Cette invariance est cependant spontanément brisée par un champ scalaire ϕ dont les configurations classiques d'énergie minimale violent la symétrie de jauge. Ce champ évolue en effet vers un état fondamental $\phi_0 \neq 0$ qui casse certains générateurs du groupe. Le cas le plus simple est celui du champ scalaire chargé étudié dans le du potentiel en forme du chapeau mexicain. Le Lagrangien (10.1) doit maintenant faire intervenir une dérivée covariante et non plus simple. Le champ de jauge associé entre également en jeu,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (11.1)$$

où la dérivée covariante de ϕ a été définie par $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + iqA_\mu \phi$ et où le champ électromagnétique est égal à $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Le potentiel (10.7) conduit le champ scalaire à évoluer vers une configuration non nulle qui se ramène, par rotation des axes φ_1 et φ_2 , à $\varphi_0 = (v, 0)$.

On développe ϕ autour du vide ϕ_0 en introduisant les excitations scalaires h_1 et h_2 définies par

$$\phi = \frac{(v + h_1) + h_2}{\sqrt{2}}. \quad (11.2)$$

En calculant le terme cinétique du champ scalaire, on établit que

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathbf{h}) (\partial^\mu \mathbf{h}) + q(v + h_1) A^\mu \partial_\mu h_2 - q h_2 A^\mu \partial_\mu h_1 \quad (11.3)$$

$$+ \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu [v^2 + 2v h_1 + \mathbf{h} \mathbf{h}]. \quad (11.4)$$

Force est de constater que ce seul terme cinétique est déjà bien compliqué avec un drôle de couplage entre le photon A^μ et les champs h_1 et h_2 . Beaucoup plus excitante est la présence de la seconde ligne de l'expression du terme

$$\mathcal{L}_{\text{gauge mass}} = \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu = \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu. \quad (11.5)$$

Le boson vecteur A^μ (introduit pour rendre locale l'invariance de jauge) acquiert une masse lorsque cette symétrie est spontanément brisée. Cette masse dépend du couplage de jauge q (ici la charge électrique) et de la norme v de φ_0 (appelée valeur dans le vide du champ scalaire).

11.1 Brisure de la symétrie $U(1)$

Les physiciens *Peter Higgs*, *Robert Brout* et *François Englert* ont remis de l'ordre dans le Lagrangien précédent. Celui-ci décrit la situation compliquée d'un champ scalaire ϕ dont l'invariance locale par rapport à un groupe de jauge est brisée spontanément. Leur remarque est illustrée dans la Figure 4. Elle tient en ce que la symétrie de jauge étant justement locale,

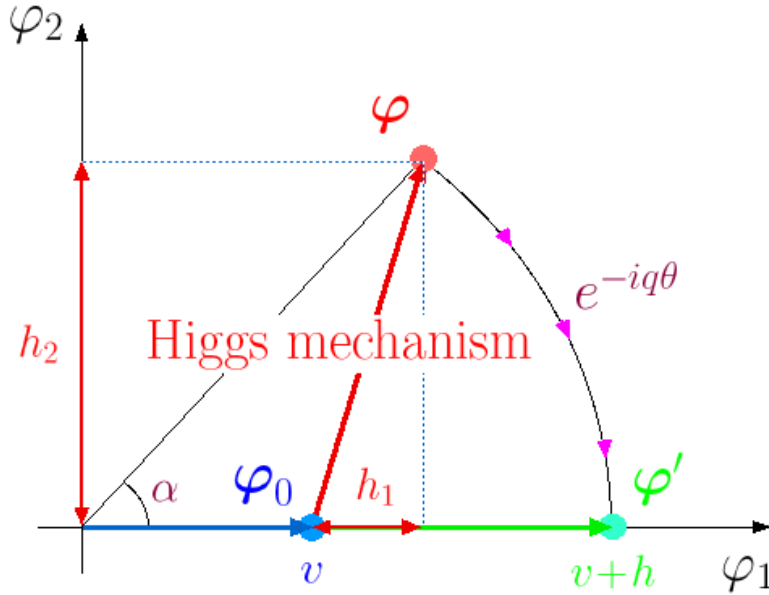


FIGURE 4 – En tout point x de l'espace-temps, le champ scalaire ϕ est décrit par le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ du plan (φ_1, φ_2) et donc par les coordonnées h_1 et h_2 de celui-ci par rapport au vide $\boldsymbol{\varphi}_0$. Une simple rotation de jauge d'un angle $\theta = \alpha/q$ rabat le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ sur l'axe φ_1 et conduit au vecteur $\boldsymbol{\varphi}'$ qui, lui, ne dépend plus que de la seule composante réelle h .

elle va nous permettre de simplifier considérablement la description du champ scalaire ϕ que l'on peut faire tourner dans le plan complexe (φ_1, φ_2) sans que le Lagrangien 11.1 ne soit affecté.

En chaque point x de l'espace-temps, le champ scalaire complexe ϕ s'exprime en fonction des scalaires neutres h_1 et h_2 grâce à la relation (11.2). Il correspond au vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ dans le plan (φ_1, φ_2) de la Figure 4. Les composantes de $\boldsymbol{\varphi}$ par rapport au vide $\boldsymbol{\varphi}_0$ dépendent donc en toute généralité de la position x . Celle-ci étant fixée, la Figure 4 suggère qu'une simple rotation dans le plan complexe du champ ϕ permet de rabattre le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ sur l'axe horizontale φ_1 en l'amenant en $\boldsymbol{\varphi}' = (v + h_1, h_2)$ puisque

$$\phi' = e^{-iq\theta}\phi = e^{-iq\theta}e^{i\alpha}\frac{v+h}{\sqrt{2}} = \frac{v+h}{\sqrt{2}}, \quad (11.6)$$

pour peu que $\theta = \alpha/q$. L'angle θ dépend de la position x dans l'espace-temps, mais comme le Lagrangien (11.1) est invariant sous les transformations de jauge locales, donc sous les rotations dont l'angle θ dépend de x , il s'exprime exactement de la même manière en fonction de ϕ' qu'en fonction de ϕ . La rotation de jauge permettant de substituer ϕ' à ϕ transforme le potentiel vecteur A_μ en A'_μ . L'expression du Lagrangien en fonction de ϕ' , A'_μ et de la dérivée covariante $D'_\mu\phi'$ est rigoureusement identique à celle de la relation (11.1). La dernière étape consiste à gommer les primes sur les champs ϕ et A_μ . On peut dès lors utiliser le Lagrangien (11.1) en prenant pour champ scalaire $\phi = (v+h)/\sqrt{2}$. Les calculs sont alors considérablement simplifiés. La grande question est désormais de savoir où est passé le second degré de liberté puisqu'on se retrouve avec un seul champ scalaire h appelé **boson de (Brout-Englert-)Higgs** alors qu'on était parti avec les deux champs h_1 et h_2 .

Un calcul du terme cinétique montre que

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}q(v+h)^2 A_\mu A^\mu. \quad (11.7)$$

Cette relation est d'une grande simplicité. Outre le terme cinétique du champ de Higgs h , nous reconnaissons le terme de masse du photon ainsi que deux termes de couplage entre le boson h et le photon A_μ . Nous confirmons la propriété essentielle trouvée précédemment. Au cours de la brisure spontanée de la symétrie de jauge $U(1)$ (rendue locale par l'introduction du potentiel vecteur A_μ) le photon acquiert la masse $m_\gamma = qv$. Se comportant désormais comme un champ vectoriel massif, il est caractérisé par trois degrés de liberté correspondant aux deux états d'hélicité transverse de la théorie de Maxwell auxquels s'ajoute un troisième état de polarisation longitudinale. Celui-ci correspond au degré de liberté qui nous faisait défaut. En devenant massif, le photon a "avalé" le boson de Goldstone engendré par la brisure spontanée de la symétrie de jauge. Le champ φ de la Figure 4 est aussi bien décrit par les deux champs h_1 et h_2 que par le champ de Higgs h et l'angle $\theta = \alpha/q$. Lorsqu'il est infiniment petit, ce dernier correspond à la direction φ_2 associée au boson de Goldstone puisque

$$\phi = e^{iq\theta} \frac{v+h}{\sqrt{2}} \simeq \frac{v+h}{\sqrt{2}} + iq\theta \frac{v+h}{\sqrt{2}} = h_1 + ih_2. \quad (11.8)$$

La transformation locale de jauge permettant de rabattre le champ ϕ sur l'axe réel absorbe l'angle θ qui réapparaît comme état d'hélicité longitudinale du photon devenu massif.

Le développement du Lagrangien (11.1) une fois que le boson de Goldstone a été avalé par le photon permet d'établir que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2}(\sqrt{2}\mu)^2 h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu \quad (11.9)$$

$$+ q^2 v h A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2 h^2 A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4}h^4. \quad (11.10)$$

La première ligne correspond au Lagrangien libre du boson de Higgs h et du photon A_μ , tous deux massifs. La deuxième ligne décrit les couplages du photon au boson de Higgs ainsi que les interactions de celui-ci avec lui-même.

11.2 Brisure de la symétrie $SU(2)$

La transposition de l'étude précédente à $SU(2)$ est immédiate. Le champ scalaire complexe ϕ est remplacé par le doublet $\mathbf{H}$ appartenant à la représentation fondamentale $\mathbf{2}$ de spin 1/2. Le Lagrangien (11.1) devient

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} = (D_\mu \mathbf{H})^\dagger (D^\mu \mathbf{H}) - V + \mathcal{L}_{SU(2)}, \quad (11.11)$$

où le potentiel a été écrit sous la forme désormais canonique

$$V(\mathbf{H}) = \frac{1}{4}\lambda v^4 - \mu^2 \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^2. \quad (11.12)$$

le Lagrangien $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ rend compte des bosons vecteurs W_μ et se met sous la forme (10.30) notée $\mathcal{L}_{SU(2)}$ dans un paragraphe précédent. Les rotations de jauge basculent H en

$$H' = \mathcal{R}H = e^{-ig\theta\sigma/2}H, \quad (11.13)$$

où g est la constante de couplage du groupe $SU(2)$. La même transformation s'applique à la dérivée covariante définie comme

$$D_\mu H = \partial_\mu H + igW_\mu(\sigma/2)H. \quad (11.14)$$

Le système évolue spontanément vers la configuration d'énergie minimale $H_0 \neq 0$ qui n'est pas invariante sous les transformations de $SU(2)$. Au vide H_0 correspond le vecteur φ_0 de $\mathbb{R}^4$ dont le module est v . Nous pouvons définir les axes φ_i tels que $\varphi_0 = (v, 0, 0, 0)$.

La généralisation au groupe $SU(2)$ du mécanisme de Higgs discuté précédemment dans le cadre de $U(1)$ revient à montrer qu'en tout point x de l'espace-temps il existe une rotation de jauge permettant de transformer H quelconque en un doublet H' aligné sur le vide et dont la seule composante non-nulle est $\varphi'_1 = v + h$. Le problème réside donc dans la construction d'une matrice $\mathcal{R}$ de $SU(2)$ vérifiant l'égalité

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}H' = \begin{pmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad (11.15)$$

les composantes φ_i de H étant quelconques. La rotation $\mathcal{R}$ préserve la norme hermetienne

$$H^\dagger H = \frac{1}{2} \varphi \varphi = \frac{R^2}{2} = \frac{(v + h)^2}{2}. \quad (11.16)$$

Les nombres complexes a et b peuvent s'écrire

$$a = \cos(\theta/2) e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = \sin(\theta/2) e^{i\beta}. \quad (11.17)$$

Les angles α et β sont compris entre 0 et 2π alors que θ appartient à l'intervalle allant de 0 à π tel que $\cos(\theta/2)$ et $\sin(\theta/2)$ sont les modules des nombres complexes a et b .

En supposant que $v + h = R$ est positif, on peut montrer que

$$e^{i\alpha} = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}} \quad \text{et} \quad e^{i\beta} = \frac{\varphi_3 + i\varphi_4}{\sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_4^2}}, \quad (11.18)$$

alors que

$$\cos(\theta/2) = \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}{R} \quad \text{et} \quad \sin(\theta/2) = \frac{\sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_4^2}}{R}. \quad (11.19)$$

La relation (11.15) permet d'exprimer une valeur quelconque du champ H , qui dépend à priori des quatre composantes φ_i du vecteur φ , en fonction du champ de Higgs h et des trois paramètres entrant dans la définition de la matrice de rotation $\mathcal{R}$ (α, β, θ). La matrice $\mathcal{R}$ peut également être définie à partir du vecteur θ décrivant la rotation dans $\mathbb{R}^3$ dont les

angles d'Euler permettent la reconstruction de a et de b . Le doublet $\mathbf{H}$ peut donc s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix} = e^{-i\theta\sigma/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}. \quad (11.20)$$

Il dépend de h et des trois angles θ_i . Lorsque ceux-ci sont petits, le doublet $\mathbf{H}$ acquiert une composante perpendiculaire à l'axe φ_1 sur lequel le vide $\mathbf{H}_0$ est aligné. Nous savons que l'effet des matrices de Pauli σ_x , σ_y et σ_z sur un vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ de $\mathbb{R}^4$ parallèle à $\boldsymbol{\varphi}_0$ est identique à celui des rotations $-T_{13}$, $-T_{14}$ et T_{12} de $SO(4)$. Les angles θ_x , θ_y et θ_z sont donc respectivement associés aux bosons de Goldstone h_4 , h_3 et h_2 . Le mécanisme de Higgs s'applique encore dans le cas de $SU(2)$. La transformation de jauge locale $\mathcal{R}^{-1}$ permet de remplacer $\mathbf{H}$ par le doublet $\mathbf{H}'$ sans que le Lagrangien (11.11) ne soit affecté. Cette rotation de jauge modifie également les bosons W_μ en W'_μ et la dérivée covariante $D_\mu \mathbf{H}$ en $D'_\mu \mathbf{H}'$. La dernière étape est la même que pour $U(1)$: on gomme les primes et on se retrouve avec le Lagrangien (11.11) dans lequel le doublet $\mathbf{H}$ se met simplement sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}. \quad (11.21)$$

Les trois degrés de liberté de $\mathbf{H}$ associés aux bosons de Goldstone ont disparu comme dans le cas précédent. Ils ont été mangés par les trois bosons de jauge W_μ^i qui ont acquis une masse que nous allons déterminer. En effet, en calculant l'effet de la dérivée covariante D_μ sur le champ de Higgs, on obtient

$$D_\mu \mathbf{H} = \left[\partial_\mu \mathbb{I}_2 + i\frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}. \quad (11.22)$$

Cette expression se met sous la forme

$$D_\mu \mathbf{H} = \begin{pmatrix} i(g/2)(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(v + h) \\ \partial_\mu h - i(g/2)W_\mu^3(v + h) \end{pmatrix}. \quad (11.23)$$

On en déduit que le terme cinétique du Lagrangien est égal à

$$(D_\mu \mathbf{H})^\dagger (D^\mu \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2}{8} \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\mu (v + h)^2. \quad (11.24)$$

On en déduit que les trois bosons de jauge de $SU(2)$ acquièrent chacun une masse $m_W = gv/2$.

Nous obtenons le même comportement que dans le cas de $U(1)$. La brisure spontanée de symétrie de jauge conduit, dans le cas où elle est locale, à des bosons vecteurs rendus massifs après avoir mangé les bosons de Goldstone associés aux générateurs brisés. Une théorie initialement invariante sous $SU(2)$ et spontanément brisée contient trois bosons vecteurs W_μ^i . Ceux-ci absorbent les trois bosons de Goldstone h_i qui apparaissent avec les trois générateurs brisés $T^i = \sigma_i/2$.