

Introduction à la Théorie Quantique des Champs

Master Physique Subatomique et Cosmologie
Univ. Grenoble Alpes – Univ. Savoie Mont Blanc

Björn Herrmann
Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique (LAPTh)
Univ. Savoie Mont Blanc – CNRS

herrmann@lapth.cnrs.fr

Dernière mise à jour : 21 octobre 2024

Site web associé au cours : <https://lapth.cnrs.fr/~herrmann/TQC>

❖ Révisions : Rappels, révisions et prérequis

Mécanique Lagrangienne

La mécanique classique, au départ basée sur la loi de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (0.1)$$

est reformulée à l'aide du concept du **Lagrangien**. Ce dernier est défini comme la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système considéré,

$$\mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = T - V. \quad (0.2)$$

Ici, q_i sont les coordonnées généralisées, et \dot{q}_i leurs dérivées respectives par rapport au temps t (vitesses généralisées). Dans la pratique, on a souvent

$$T = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2, \quad (0.3)$$

alors que l'énergie potentielle V ne dépend que des coordonnées q_i et non des vitesses \dot{q}_i .

L'action sur un chemin partant de $A = \{q_i(t_A)\}$ et arrivant à $B = \{q_i(t_B)\}$ est calculée en tant qu'intégrale sur le Lagrangien,

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t]. \quad (0.4)$$

On demande que l'action soit extrémale pour toute variation de chemin partant de $A = \{q_i(t_A)\}$ et arrivant à $B = \{q_i(t_B)\}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{t_A}^{t_B} dt \delta\mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = \int_{t_A}^{t_B} dt \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0. \end{aligned} \quad (0.5)$$

Le passage à la deuxième ligne s'explique par une intégration par parties, basée sur l'égalité

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i, \quad (0.6)$$

sachant que le premier terme s'annule car $\delta q_i(t_A) = \delta q_i(t_B) = 0$.

Comme l'Éq. (0.5) doit être valable pour tout ensemble de variations $\{\delta q_i\}$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}} \quad (0.7)$$

pour tout i . Ces équations sont connues sous le nom d'**Équations d'Euler-Lagrange** et constituent les équations du mouvement du système considéré.

Mécanique Hamiltonienne

On considère un système décrit par un ensemble de variables canoniques $\{q_i\}$ ($i = 1, \dots, r$). Les *moments conjugués* sont définis par

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (0.8)$$

En partant du Lagrangien $\mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t]$, le *Hamiltonien* $\mathcal{H}[q_i, p_i, t]$ est obtenu via une transformation de Legendre,

$$\mathcal{H}[q_i, p_i, t] = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] = T + V. \quad (0.9)$$

Le Hamiltonien exprime l'énergie totale du système, la somme de l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V .

La différentielle du Hamiltonien ci-dessus peut s'écrire comme

$$d\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) dq_i + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) dp_i + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) dt = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) dq_i + \dot{q}_i dp_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) dt. \quad (0.10)$$

En utilisant les Équations d'Euler-Lagrange (0.7), on en déduit les *équations canoniques du mouvement* :

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.} \quad (0.11)$$

De plus, les dépendances au temps du Lagrangien et de l'Hamiltonien sont liées par

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (0.12)$$

Oscillateur harmonique quantique

Considérons un point matériel de masse m accroché à un ressort de raideur k . La force de rappel étant donnée par $F = -kx$, le principe fondamental de la dynamique mène à l'équation différentielle

$$F = m\ddot{x} = -kx, \quad (0.13)$$

dont la solution peut s'écrire

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (0.14)$$

avec la pulsation $\omega^2 = k/m$, l'amplitude initiale x_0 et la phase ϕ_0 .

Le Lagrangien associé à cette situation est donné par

$$\mathcal{L}[x, \dot{x}] = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2, \quad (0.15)$$

et mène aux équations du mouvement (0.13). Le moment conjugué à la coordonnée x est

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (0.16)$$

on retrouve l'impulsion classique. Le Hamiltonien s'écrit alors

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2. \quad (0.17)$$

Passant à la description quantique, les variables position x et impulsion p deviennent des opérateurs, notés ici X et P . Le Hamiltonien quantique s'écrit alors

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2. \quad (0.18)$$

En représentation spatiale, l'opérateur position X correspond à une multiplication par la coordonnée x , tandis que l'opérateur impulsion P correspond à une dérivée par rapport à la position,

$$X = x, \quad P = -i\partial_x. \quad (0.19)$$

Le commutateur entre les deux opérateurs est donné par

$$[X, P] = i\partial_x x = i. \quad (0.20)$$

Une redéfinition des opérateurs selon

$$\hat{X} = \sqrt{m\omega} X \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{P}{\sqrt{m\omega}}, \quad (0.21)$$

où la pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ a été introduite, permet de réécrire le Hamiltonien comme

$$H = \frac{\omega}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2). \quad (0.22)$$

De plus, le commutateur entre les opérateurs position et impulsion devient

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (0.23)$$

Basé sur les opérateurs définis en (0.21), on introduit les opérateurs d'*annihilation* et de *création* comme suit :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}). \quad (0.24)$$

Leur commutateur est donné par

$$\boxed{[a, a^\dagger] = 1.} \quad (0.25)$$

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique peut alors s'exprimer en fonction des opérateurs a et a^\dagger ,

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad (0.26)$$

avec la définition $N = a^\dagger a$. Les commutateurs entre cet opérateur N et les opérateurs d'annihilation et de création sont donnés par

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (0.27)$$

Les états propres de l'opérateur N sont notés $|n\rangle$ avec $n \geq 0$. L'état de plus basse excitation $|0\rangle$ est annulé par l'opérateur d'annihilation,

$$\boxed{a |0\rangle = 0.} \quad (0.28)$$

Cet état $|0\rangle$ est appelé le *vide quantique*. Chaque état propre est associé à l'énergie propre E_n ,

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (0.29)$$

avec l'énergie propre

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (0.30)$$

Les actions des opérateur de création et d'annihilation sont respectivement données par

$$a^\dagger |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} |n+1\rangle, \quad (0.31)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (0.32)$$

pour $n \geq 1$. Les préfacteurs proviennent de la normalisation des états. À partir du vide $|0\rangle$, les états $|n\rangle$ sont alors construits en appliquant successivement l'opérateur de création selon

$$|n\rangle = \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (0.33)$$

L'ensemble des états $\{|n\rangle, n \geq 0\}$ est appelé *espace de Fock*.

Quadrivecteurs et tenseur métrique

Un quadrivecteur x^μ est un vecteur dans l'espace-temps à quatre dimensions,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x}). \quad (0.34)$$

Il est à noter que, bien que – strictement parlant – x seul désigne le quadri-vecteur et x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) ses composantes, souvent les deux notation sont confondues dans la pratique tel que x^μ est assimilé avec le quadri-vecteur *covariant* ci-dessus. En revanche, le vecteur *contravariant* associé est défini par

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\vec{x}) = (t, -\vec{x}). \quad (0.35)$$

En relativité, l'élément de longueur est donné par le temps propre,

$$d\tau^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (0.36)$$

où on somme sur des indices répétés selon la **convention d'Einstein** et où nous avons introduit la **métrie de Minkowski**,

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (0.37)$$

Il est à noter que la convention de métrique peut varier selon la référence consultée! Ce tenseur métrique permet d'écrire la relation entre vecteur covariant et contravariant,

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \iff x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (0.38)$$

Par ailleurs, le produit scalaire entre deux quadrivecteurs s'écrit

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = t_x t_y - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (0.39)$$

On peut introduire la quadri-vitesse,

$$\dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu = (c, \vec{v}), \quad (0.40)$$

ainsi que la quadri-impulsion,

$$p^\mu = m \dot{x}^\mu = (E, \vec{p}), \quad (0.41)$$

avec

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (0.42)$$

Lagrangien d'une particule relativiste

Le Lagrangien classique d'une particule libre, c.a.d. sans interaction et ainsi sans énergie potentielle, s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{classique}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (0.43)$$

où on somme sur les indices i et j . Ce Lagrangien se généralise afin d'obtenir une formulation quadri-dimensionnelle covariante selon

$$\mathcal{L}_{\text{relativiste}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu. \quad (0.44)$$

On rappelle la convention d'Einstein impliquant la somme sur les indices répétés.

Dans le cas relativiste, les équations d'Euler-Lagrange deviennent

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}} \quad (0.45)$$

Pour la particule libre décrite par le Lagrangien (0.44), on obtient

$$\frac{d}{d\tau} m \dot{x}^\mu = 0, \quad (0.46)$$

correspondant à la conservation de la quadri-impulsion $p^\mu = m \dot{x}^\mu$.

En présence d'un couplage de la particule avec un champ électromagnétique, le Lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + J_\mu A^\mu = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + q \dot{x}_\mu A^\mu, \quad (0.47)$$

où le courant électromagnétique est donné par $J^\mu = q \dot{x}^\mu$. Les Équations d'Euler-Lagrange associées s'écrivent

$$\frac{d}{d\tau} (m \dot{x}^\mu + q A^\mu) = \frac{d}{d\tau} (p^\mu + q A^\mu) = J^\alpha \partial^\mu A_\alpha. \quad (0.48)$$

Ceci suggère une généralisation de l'impulsion p^μ introduit ci-dessus. On définit alors l'impulsion généralisée conjuguée à la coordonnée x^μ comme

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = p^\mu + q A^\mu. \quad (0.49)$$

Nous allons retrouver cette impulsion généralisée dans le formalisme Hamiltonien, mais également plus tard dans le cadre de la dérivée covariante dans la discussion de théories de jauge.

Équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation de Schrödinger, décrivant une particule de spin zéro et de masse m , représentée par le champ scalaire ϕ . En représentation d'impulsion elle s'écrit

$$(p^2 - m^2) \phi(x) = 0. \quad (0.50)$$

Passant en représentation spatiale, où l'opérateur impulsion est représenté par la dérivée par rapport à la position,

$$p^2 = (-i\partial_x)^2 = -\partial_x^2 = -\square, \quad (0.51)$$

l'équation de Klein-Gordon devient

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0. \quad (0.52)$$

Équation de Dirac

L'équation de Dirac décrit le comportement de particules massives de spin demi-entier. Une telle particule est représentée par un spineur ψ . Ce dernier obéit alors à l'équation

$$(i\rlap{-}/\partial - m) \psi(x) = 0, \quad (0.53)$$

tandis que le spineur conjugué obéit à l'équation

$$\bar{\psi} (i\overleftarrow{\rlap{-}/\partial} + m) = 0. \quad (0.54)$$

On rappelle que la notation $\rlap{-}/\partial$ comprend la contraction $\rlap{-}/\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$.

On démontre facilement, en appliquant l'opérateur $(i\rlap{-}/\partial - m)$ une deuxième fois, que l'équation de Dirac implique l'équation de Klein-Gordon.

Matrices γ

Les matrices γ (γ^μ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$) sont des matrices de dimension 4×4 obéissant à la relation d'anti-commutation associée à l'*algèbre de Clifford*,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (0.55)$$

On en déduit que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad \text{pour } \mu \neq \nu. \quad (0.56)$$

Dans la *représentation de Dirac* les matrices γ s'expriment comme suit :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad (0.57)$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice d'identité de dimension 2×2 et σ^i ($i = 1, 2, 3$) sont les *matrices de Pauli*,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.58)$$

Par commodité, on définit une cinquième matrice

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (0.59)$$

que l'on trouve par exemple dans les projecteurs d'hélicité des fermions. Il est à noter que γ_5 n'est pas une matrice γ dans le sens stricte, c.a.d. elle n'obéit pas à la relation d'anti-commutation ci-dessus. En particulier, γ_5 anti-commute avec les quatres matrices γ ,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (0.60)$$

Les matrices γ satisfont aux propriétés suivantes :

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad \gamma_5 = \gamma^5, \quad (0.61)$$

Les identités de contraction suivantes peuvent s'avérer utiles lors de calculs :

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\mathbb{1}, \quad (0.62)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha, \quad (0.63)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4\eta^{\alpha\beta} \mathbb{1}, \quad (0.64)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho. \quad (0.65)$$

Finalement, les matrices γ obéissent aux identités de trace suivantes :

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0, \quad (0.66)$$

$$\text{Tr}\{\gamma_5\} = 0, \quad (0.67)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5\} = 0, \quad (0.68)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4\eta^{\mu\nu}, \quad (0.69)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\} = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}), \quad (0.70)$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu \dots \gamma^\alpha\} = \text{Tr}\{\gamma^\alpha \dots \gamma^\nu\gamma^\mu\}. \quad (0.71)$$

De plus, la trace de tout produit comportant un nombre impair de matrices γ est nulle. Également, la trace d'un produit de γ_5 avec un nombre impair de matrices γ est nulle.

Finalement, pour la contraction d'un quadri-vecteur q avec les matrices γ , on introduit la notation du *Feynman slash*,

$$\gamma^\mu q_\mu = \gamma_\mu q^\mu = \not{q}. \quad (0.72)$$

On peut montrer que

$$\not{q}^2 = \not{q}\not{q} = q_\mu q^\mu = q^2. \quad (0.73)$$

❖ Chapitre 1 : Quantification de la boucle continue

1.1 Prélude : Réseau d'oscillateurs harmoniques et phonons

On considère un réseau uni-dimensionnel d'atomes de masse m placés en $x_n = na$ ($n = -\infty \dots +\infty$, a : pas du réseau) et liés par des ressorts de raideur k . Les positions x_n correspondent aux positions d'équilibre des atomes. Chaque atome peut osciller autour de cette position d'équilibre, on note l'élongation correspondante φ_n .

Le Lagrangien de ce système s'écrit

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_n \frac{m}{2} \dot{\varphi}_n^2 - \sum_n \frac{k}{2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2. \quad (1.1)$$

Les équations du mouvement associées – équations d'Euler-Lagrange, voir Éq. (0.7) – sont alors données par

$$\ddot{\varphi}_n = -\omega_0^2 (2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}), \quad (1.2)$$

avec $\omega_0^2 = k/m$.

Les *modes de Fourier* associées, notées φ_k et définies par

$$\varphi_n(t) = \varphi_k(t) e^{-ikna}, \quad (1.3)$$

obéissent à des équations d'*oscillateur harmonique*,

$$\ddot{\varphi}_k + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \varphi_k = 0. \quad (1.4)$$

On en déduit que les atomes vibrent selon des modes collectifs, interprétés comme des ondes sonores qui se propagent dans les deux sens. La *relation de dispersion* associée est donnée par

$$\omega_k = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|, \quad (1.5)$$

la longueur d'onde associée est $\lambda = 2\pi/k$.

Évoquant la solution générale de l'équation ci-dessus, les modes de Fourier φ_k peuvent s'exprimer comme ¹

$$\varphi_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t}. \quad (1.6)$$

On en déduit que les élongations φ_n peuvent s'écrire comme

$$\varphi_n(t) = \varphi_k(t) e^{ikna} = a_k e^{-i(\omega_k t - kna)} + b_k e^{i(\omega_k t + kna)}. \quad (1.7)$$

1. Les coefficients a_k et b_k anticipent le rôle des opérateurs d'annihilation et de création lors de la quantification canonique.

Les deux termes s'interprètent respectivement comme une propagation "vers la droite" (c.a.d. vers x positif) et une propagation "vers la gauche" (c.a.d. vers x négatif). La vitesse de propagation de l'onde sonore est donnée par $c_s = \omega_k/k = a\sqrt{k/m}$.

Plus généralement, en sommant sur tous les vecteurs d'onde, l'élongation de l'atome n s'écrit

$$\varphi_n(t) = \sum_k \left[a_k e^{-i(\omega_k t - k n a)} + b_k e^{i(\omega_k t + k n a)} \right] \quad (1.8)$$

La **quantification** de ce système peut se réaliser dans le **schéma de Heisenberg** – l'évolution temporelle est alors portée par les opérateurs – en prenant comme opérateurs quantiques l'élongation φ_i de l'atome i ainsi que son moment conjugué $P_i = m\dot{\varphi}_i$. À temps égal, la **relation de commutation** associée est

$$[\varphi_i(t), P_j(t)] = i\delta_{ij}. \quad (1.9)$$

1.2 Ligne continue : Approche classique

Suite au réseau discret d'atomes discuté ci-dessus, nous allons nous intéresser au cas d'un continuum, qui va naturellement nous amener vers la notion du **champ**. Concrètement, à partir d'un réseau discret de N sites de distance a , nous allons réaliser la limite continue

$$N \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow 0, \quad \text{telle que } L_0 = Na = \text{const.}, \quad (1.10)$$

où L_0 correspond à la longueur du système considéré, c.a.d. $x \in [0; L_0]$. De plus, nous supposons que la ligne reboucle sur elle même, c.a.d. le point $x = L_0$ est identifié avec $x = 0$.

Dans cette limite continue, les élongations individuelles des atomes (situés en $x = an$) prennent la forme d'un champ dépendant de la coordonnée spatiale x , la somme sur les sites présente dans l'expression (1.1) devient une intégrale sur la variable spatiale x , et le terme apparaissant dans l'énergie potentielle sera identifié à une dérivé spatiale du champ $\varphi(t, x)$. Concrètement, on trouve les remplacements

$$\varphi_n(t) \quad \varphi(t, x), \quad (1.11)$$

$$\sum_{n=1}^N a f(x = na) \quad \xrightarrow[\text{limite continue}]{N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} \quad \int_0^{L_0} dx f(x), \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{a} (\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)) \quad \varphi'(t, x). \quad (1.13)$$

En introduisant la masse linéique $\mu = m/a$ et la module de Young $\alpha = ka$, la limite continue du Lagrangien (1.1) s'écrit alors

$$L(t) = \int_0^{L_0} dx \left[\frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(t, x) - \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(t, x) \right] = \int_0^{L_0} dx \mathcal{L}(t, x). \quad (1.14)$$

Le Lagrangien $L(t)$ peut s'écrire comme l'intégrale spatiale sur la **densité de Lagrangien** $\mathcal{L}(t, x)$. L'évaluation des équations du mouvement mène à l'**équation d'Alembert**,

$$\mu \ddot{\varphi} - \alpha \varphi'' = 0. \quad (1.15)$$

Cette équation décrit la propagation d'une onde sonore avec vitesse $c_s = \sqrt{\alpha/\mu}$ le long de la ligne continue,

$$\ddot{\varphi} - c_s^2 \varphi'' = 0. \quad (1.16)$$

Le Hamiltonien correspondant au Lagrangien (1.1) est donné par

$$H(t) = \sum_{n=1} p_n \dot{\varphi}_n - L(t), \quad (1.17)$$

ce qui donne dans la limite continue

$$H(t) = \int_0^{L_0} dx \left[\Pi(t, x) \dot{\varphi}(t, x) - \mathcal{L}(t, x) \right] = \int_0^{L_0} dx \mathcal{H}(t, x), \quad (1.18)$$

où $\Pi(t, x) = \mu \dot{\varphi}(t, x)$ est le moment conjugué de $\varphi(t, x)$. On en déduit la **densité spatiale d'Hamiltonien**,

$$\mathcal{H}(t, x) = \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2(t, x) + \frac{1}{2} \alpha \varphi'^2(t, x). \quad (1.19)$$

1.3 Ligne continue : Développement en modes de Fourier

La fonction $\varphi(t, x)$ est périodique dans l'espace à tout instant t . On peut alors la développer en **série de Fourier** selon

$$\varphi(t, x) = \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} = \sum_n \varphi_k(t) e^{in k_0 x}, \quad (1.20)$$

avec $k = n k_0$ et $k_0 = 2\pi/L_0$. Les **coefficients de Fourier** φ_k obéissent alors à une équation différentielle d'oscillateur harmonique,

$$\ddot{\varphi}_k + \omega_k^2 \varphi_k = 0, \quad (1.21)$$

avec $\omega_k^2 = c_s^2 |k|^2$. La solution générale de cette équation s'écrit

$$\varphi_k(t) = \alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t}, \quad (1.22)$$

où α_k et β_k sont des coefficients réels². Selon (1.20), le champ $\varphi(t, x)$ s'exprime alors comme

$$\varphi(t, x) = \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} = \sum_k \left[\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx}. \quad (1.23)$$

Sachant que la fonction $\varphi(t, x)$ est réelle, les égalités suivantes doivent être satisfaites :

$$\varphi^*(t, x) = \sum_k \varphi_k^*(t) e^{-ikx} = \varphi(t, x) = \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} = \sum_k \varphi_{-k}(t) e^{-ikx}, \quad (1.24)$$

où la dernière égalité est due au changement de variable $k \rightarrow -k$. On en déduit que, à chaque instant t ,

$$\varphi_k^*(t) = \alpha_k^* e^{i\omega_k t} + \beta_k^* e^{-i\omega_k t} = \varphi_{-k}(t) = \alpha_{-k} e^{-i\omega_k t} + \beta_{-k} e^{i\omega_k t}, \quad (1.25)$$

2. Ces coefficients seront ultérieurement identifiés comme opérateurs de créations et annihilation.

et, par la suite,

$$\alpha_k^* = \beta_{-k} \quad \text{et} \quad \beta_k^* = \alpha_{-k}. \quad (1.26)$$

Le coefficient β_k peut alors être éliminé en faveur de α_{-k}^* , puis de α_k^* ,

$$\varphi(t, x) = \sum_k \left[\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \alpha_{-k}^* e^{i\omega_k t} \right] e^{ikx} = \sum_k \left[\alpha_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + \alpha_k^* e^{i(\omega_k t - kx)} \right], \quad (1.27)$$

où nous avons de nouveau changé $k \rightarrow -k$ dans le deuxième terme.

Finalement, en anticipant l'utilisation du **théorème de Parseval** dans la prochain section, nous introduisant l'opérateur $A_k = \alpha_k / \sqrt{L_0}$. Le champ $\varphi(t, x)$ s'écrit alors

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_k \left[A_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + A_k^* e^{i(\omega_k t - kx)} \right], \quad (1.28)$$

où les coefficients A_k et A_k^* sont données par

$$A_k = \frac{1}{2\sqrt{L_0}} \int_0^{L_0} e^{-ikx} \left[\varphi(0, x) + \frac{i}{\mu\omega_k} \Pi(0, x) \right] dx. \quad (1.29)$$

1.4 Boucle continue : Quantification

Lors de la quantification, les coefficients introduits ci-dessus sont promus opérateurs. Les **opérateurs canoniques** sont l'élongation $\varphi(t, x)$ ainsi que son impulsion canonique associée $\Pi(t, x)$. Leurs commutateurs sont donnés par

$$[\varphi(t, x), \Pi(t, y)] = i \delta(x - y), \quad (1.30)$$

$$[\varphi(t, x), \varphi(t, y)] = [\Pi(t, x), \Pi(t, y)] = 0. \quad (1.31)$$

On en déduit les relations de commutation pour les opérateurs A_k et A_k^\dagger ,

$$[A_k, A_p^\dagger] = \frac{\delta_{kp}}{2\mu\omega_k}, \quad (1.32)$$

$$[A_k, A_p] = [A_k^\dagger, A_p^\dagger] = 0. \quad (1.33)$$

Une nouvelle (et dernière) redéfinition des opérateurs,

$$a_k = \sqrt{2\mu\omega_k} A_k, \quad (1.34)$$

permet d'obtenir le commutateur

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta_{kp}. \quad (1.35)$$

L'expression correspondante pour le champ φ est alors

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k}} \left[a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - kx)} \right], \quad (1.36)$$

où les coefficients a_k sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2L_0}} \int_0^{L_0} e^{-ikx} \left[\sqrt{\mu\omega_k} \varphi(0, x) + \frac{i}{\sqrt{\mu\omega_k}} \Pi(0, x) \right] dx. \quad (1.37)$$

Dans ce qui suit, nous allons écrire l'Hamiltonien en fonction des opérateurs a_k et a_k^\dagger . Tout d'abord, l'élongation $\varphi(t, x)$ et ses dérivées peuvent s'écrire

$$\varphi(t, x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k L_0}} \left(a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) e^{ikx}, \quad (1.38)$$

$$\dot{\varphi}(t, x) = -i \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2\mu\omega_k L_0}} \left(a_k e^{-i\omega_k t} - a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) e^{ikx}, \quad (1.39)$$

$$\varphi'(t, x) = i \sum_k \frac{k}{\sqrt{2\mu\omega_k L_0}} \left(a_k e^{-i\omega_k t} + a_{-k}^\dagger e^{i\omega_k t} \right) e^{ikx}. \quad (1.40)$$

L'Hamiltonien est donné par l'intégrale spatiale de la densité d'Hamiltonien,

$$H(t) = \int_0^{L_0} dx \mathcal{H}(t, x) = \int_0^{L_0} dx \left[\frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^2(t, x) + \frac{\alpha}{2} \varphi'^2(t, x) \right] \quad (1.41)$$

$$= \int_0^{L_0} dx \left[\frac{\mu}{2} \dot{\varphi}^\dagger(t, x) \dot{\varphi}(t, x) + \frac{\alpha}{2} \varphi'^\dagger(t, x) \varphi'(t, x) \right], \quad (1.42)$$

qui peut être évaluée à l'aide du **théorème de Parseval**. Ce théorème dit que, pour deux fonctions f et g , complexes et périodiques avec la même période T , développées en séries de Fourier selon

$$f(x) = \sum_k f_k e^{ikx} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_k g_k e^{ikx}, \quad (1.43)$$

on a l'égalité

$$\frac{1}{T} \int_0^T dx g^*(x) f(x) = \sum_k g_k^* f_k. \quad (1.44)$$

En appliquant cette prescription aux produits $\dot{\varphi}^\dagger(t, x) \dot{\varphi}(t, x)$ et $\varphi'^\dagger(t, x) \varphi'(t, x)$, on obtient alors des produits des opérateurs a_k et a_k^\dagger selon le schéma

$$\int_0^{L_0} dx \dot{\varphi}^\dagger(t, x) \dot{\varphi}(t, x) \longrightarrow \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger), \quad (1.45)$$

$$\int_0^{L_0} dx \varphi'^\dagger(t, x) \varphi'(t, x) \longrightarrow \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger). \quad (1.46)$$

En tenant compte des préfacteurs respectifs, l'Hamiltonien s'exprime alors comme

$$H(t) = \sum_k \frac{\omega_k}{2} (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (1.47)$$

où la dernière égalité repose sur la relation de commutation entre a_k et a_k^\dagger .

Cette expression de l'Hamiltonien est similaire à celle de l'oscillateur harmonique, voir Éq. (0.26). L'interprétation des opérateurs a_k et a_k^\dagger est alors la suivante : L'**opérateur de création**, a_k^\dagger , crée un quantum d'excitation supplémentaire sur le mode de vecteur d'onde k et fait croître l'énergie du système de ω_k . L'**opérateur d'annihilation**, a_k , a l'effet opposé, c.a.d. la destruction d'un quantum d'excitation et diminution de l'énergie de ω_k .

1.5 Ligne continue : Vide et espace de Fock

L'état caractérisé par l'absence de toute excitation est appelé le **vide**. Cet état est annulé par l'opérateur d'annihilation,

$$a_k |0\rangle = 0. \quad (1.48)$$

Un état $|n_1 n_2 \dots n_p\rangle$ correspond à l'existence de n_1 excitations sur le mode k_1 , n_2 excitations sur le mode k_2 , etc. Il est construit à partir du vide selon

$$|n_1 n_2 \dots n_p\rangle = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a_{k_i}^\dagger)^{n_i} |0\rangle. \quad (1.49)$$

On peut maintenant s'intéresser à l'énergie associée au vide de la théorie. Basé sur le Hamiltonien donné ci-dessus, on obtient

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \langle 0|\sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \langle 0|\sum_k \frac{\omega_k}{2}|0\rangle = \sum_k \frac{\omega_k}{2} \langle 0|0\rangle = \infty. \quad (1.50)$$

Ce résultat – qui peut paraître surprenant à la première vue – ne contient aucune difficulté d'interprétation. En effet, seules des différences d'énergie sont observables, et dans le présent cas seulement le "niveau zéro" est mal défini. Cela peut être résolu grâce à une redéfinition du zéro des énergies telle que

$$E_0 = \sum_k \frac{\omega_k}{2} = \infty \longrightarrow E_0 = 0. \quad (1.51)$$

Une telle **renormalisation de l'énergie** peut, techniquement parlant, être effectuée en introduisant le **produit normal** entre opérateurs de création et d'annihilation,

$$:a^\dagger a: = a^\dagger a, \quad :a a^\dagger: = a a^\dagger. \quad (1.52)$$

Le produit normal ordonne les opérateurs tels que les opérateurs d'annihilation se trouvent "à gauche" et les opérateurs de création se trouvent "à droite". En appliquant le produit normal à l'Hamiltonien,

$$H(t) = \sum_k \frac{\omega_k}{2} : (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) : = \sum_k \frac{\omega_k}{2} a_k^\dagger a_k, \quad (1.53)$$

le terme divergeant disparaît et l'énergie du vide devient bien

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = 0. \quad (1.54)$$

Chapitre 1 – Exercices

Exercice 1.1

Démontrer que les modes de Fourier φ_k obéissent à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (1.4).

Exercice 1.2

Démontrer l'équation d'Alembert (1.15).

Exercice 1.3

Inverser la relation (1.28) afin de démontrer l'expression des coefficients A_k donnée en (1.29).

Exercice 1.4

En partant des relations de commutation (1.9), établir que

$$[\varphi(t, x), \Pi(t, y)] = i \delta(x - y), \quad (1.55)$$

alors que

$$[\varphi(t, x), \varphi(t, y)] = [\Pi(t, x), \Pi(t, y)] = 0. \quad (1.56)$$

Expliquer la raison pour laquelle les opérateurs φ et Π sont pris au même instant t dans les commutateurs précédents.

Exercice 1.5

En utilisant le théorème de Parseval, en partant de l'intégrale (1.42) ainsi que les expressions (1.39) et (1.40), démontrer l'expression (1.47) du Hamiltonien en fonction des opérateurs a_k et a_k^\dagger .

❖ Chapitre 2 : Quantification du champ scalaire réel

Dans les prochains chapitres, nous allons nous intéresser à la quantification des champs libres, c.a.d. sans considérer leur interaction. L'interaction de champs sera discutée ensuite dans la seconde partie du cours, à partir du Chapitre 6.

Nous allons commencer notre discussion par le cas le plus simple, notamment le champs scalaire de spin nul (Chapitres 2 et 3) avant de nous intéresser aux champs électromagnétique (Chapitre 4) et fermionique (Chapitre 5).

2.1 Analyse classique : Lagrangien

Le Lagrangien de la boucle continue, voir Éq. (??), peut se réécrire comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2, \quad (2.1)$$

si l'on redéfinit le champ selon $\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{\alpha}$ et en utilisant la convention $c = 1$. Le passage d'une à trois dimensions spatiale, et donc à 1+3 dimensions de l'espace temps, mène à

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi). \quad (2.2)$$

A ce stage, nous abandonnons définitivement l'image de l'élongation et de l'oscillateur harmonique, en considérant seulement qu'une quantité $\varphi \in \mathbb{R}$ est "attachée" à chaque point de l'espace-temps.

En présence d'un potentiel scalaire $V(\varphi)$, ce Lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - V(\varphi). \quad (2.3)$$

On rappelle que, par abus de langage, l'expression ci-dessus est strictement parlant la densité de Lagrangien, et que le Lagrangien proprement dit s'obtient en intégrant sur l'espace,

$$L(t) = \int d\vec{x} \mathcal{L}(t, \vec{x}). \quad (2.4)$$

Dans le cas considéré ici, c.a.d. pour un champ libre sans interactions, le potentiel scalaire contient uniquement le terme de masse,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (2.5)$$

De manière plus générale, le potentiel scalaire peut également inclure des termes d'interaction.

2.2 Équation de Klein-Gordon

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation du mouvement du champ scalaire libre,

$$\square\varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (2.6)$$

Pour le présent cas avec seulement un terme de masse dans le potentiel scalaire, cela donne

$$(\square + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.7)$$

On obtient alors bien l'équation de Klein-Gordon, caractéristique d'une particule libre et massive de spin nul.

2.3 Hamiltonien et tenseur énergie-impulsion

Le moment conjugué au champ φ est donné par

$$\Pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(t, \vec{x}). \quad (2.8)$$

Le Hamiltonien s'écrit alors

$$H(t) = \int d\vec{x} \Pi(t, \vec{x}) \dot{\varphi}(t, \vec{x}) - L(t) = \int d\vec{x} \mathcal{H}(t, \vec{x}), \quad (2.9)$$

avec la densité de Hamiltonien

$$\mathcal{H}(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi). \quad (2.10)$$

Si l'on considère un changement de coordonnées,

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \quad (2.11)$$

il faut imposer une redéfinition du champ,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x), \quad (2.12)$$

telle que – à un endroit M donné – la physique reste inchangée,

$$\varphi(M) = \varphi(x^\mu) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}^\mu). \quad (2.13)$$

La variation du champ peut alors s'exprimer comme

$$\delta\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) = \varphi(x - \epsilon) - \varphi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi \quad (2.14)$$

où nous avons utilisé le développement $\varphi(x - \epsilon) = \varphi(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi$. De la même manière, la variation associée du Lagrangien ainsi que sa dérivée peuvent s'exprimer comme

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(x - \epsilon) - \mathcal{L}(x) = -\epsilon^\mu (\partial_\mu \mathcal{L}), \quad (2.15)$$

$$\partial_\mu (\delta \mathcal{L}) = \partial_\mu (-\epsilon^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L}) = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha (\partial_\mu \mathcal{L}) = \delta (\partial_\mu \mathcal{L}). \quad (2.16)$$

Par calcul explicite, cette même variation peut également s'écrire

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) \quad (2.17)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right] - \delta \varphi \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \quad (2.18)$$

$$= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right] = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (-\epsilon_\alpha \partial^\alpha \varphi) \right] = -\epsilon_\alpha \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\alpha \varphi \right], \quad (2.19)$$

où le passage à la deuxième ligne a été effectué en utilisant une intégration par partie, et les équations d'Euler-Lagrange permettent ensuite d'annuler deux termes. En combinant les deux expressions,

$$\delta \mathcal{L} = -\epsilon_\alpha \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\alpha \varphi \right] = -\epsilon^\mu (\partial_\mu \mathcal{L}) = -\eta^{\alpha\mu} \epsilon_\alpha (\partial_\mu \mathcal{L}) = -\epsilon_\alpha \partial_\mu (\eta^{\mu\alpha} \mathcal{L}), \quad (2.20)$$

ce qui implique que, pour tout ϵ_α ,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{L})} \partial^\alpha \varphi - \eta^{\mu\alpha} \mathcal{L} \right] = 0, \quad (2.21)$$

est alors que la quantité

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{L})} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}} \quad (2.22)$$

est conservée, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Cette dernière est appelée le **tenseur énergie-impulsion**. Sa composante temporelle correspond à la densité de Hamiltonien, $T^{00} = \mathcal{H}$.

La densité de Hamiltonien est identifiée avec la composante temporelle de ce tenseur,

$$\mathcal{H} = T^{00} = \Pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}. \quad (2.23)$$

L'impulsion P^μ , exprimée par l'intégrale

$$P^\mu = \int d\vec{x} T^{0\mu} \quad (2.24)$$

est conservée, à condition que le champ scalaire $\varphi(t, \vec{x})$ s'annule rapidement à l'infini.

Le tenseur énergie-impulsion peut également s'écrire

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.25)$$

ce qui implique

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial^\nu \varphi) \left[\square \varphi + \frac{dV}{d\varphi} \right] = 0, \quad (2.26)$$

si le champ satisfait à l'équation de Klein-Gordon.

2.4 Quantification canonique

Nous allons maintenant procéder à la quantification canonique du champ scalaire réel libre de masse m . On rappelle que, dans ce cas, le potentiel scalaire est donné par l'Éq.

(2.5). La procédure de quantification est fortement inspirée par celle déployée dans le cadre de boucle continue, discutée dans le Chapitre précédent. Afin de décrire le champ scalaire relativiste, un passage en 1+3 dimensions d'espace-temps est requise. De plus, nous allons relâcher la contrainte d'un espace bouclé sur lui-même, ce qui correspond à la limite $L_0 \rightarrow \infty$ et $k_0 = 2\pi/L_0 \rightarrow 0$.

Effectuant cette limite $L_0 \rightarrow \infty$ d'abord dans le cadre de la boucle continue, l'expression (1.36) devient

$$\varphi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2\omega_k} \left[\tilde{a}_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + \tilde{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t + kx)} \right], \quad (2.27)$$

si l'on redéfinit les opérateurs une nouvelle fois selon $\tilde{a}_k = \sqrt{2\omega_k L_0} a_k$. Dans ce cas, le commutateur associé est donné par

$$[\tilde{a}_k, \tilde{a}_p^\dagger] = 2\omega_k L_0 \delta_{kp}. \quad (2.28)$$

Le passage en 1+3 dimensions se fait ensuite naturellement,

$$\varphi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a_{\vec{k}} e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega_k t + \vec{k}\vec{x})} \right] = \int d\vec{k} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (2.29)$$

où dans la dernière expression $kx = k^\mu x^\mu = \omega_k t - \vec{k}\vec{x}$, et – par commodité pour la suite – nous avons introduit la mesure

$$d\vec{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} = \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \theta(\omega_k) \delta(k^2 - m^2). \quad (2.30)$$

Les relations de commutation associées non-triviales sont

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 2\omega_k (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (2.31)$$

ce qui implique

$$[\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{y})] = i \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.32)$$

2.5 Hamiltonien et opérateur impulsion

Pour rappel, le Hamiltonien associé au champ scalaire réel est donné par

$$H(t) = \int d\vec{x} \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right], \quad (2.33)$$

le potentiel scalaire ne comportant que le terme de masse. Cette intégrale peut de nouveau être évaluée en utilisant le *théorème de Parseval*, cette fois dans sa version continue. Pour deux fonctions f et g de la variable spatiale \vec{x} avec développements en série de Fourier

$$f(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} F(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (2.34)$$

nous avons

$$\int d\vec{x} g^*(\vec{x}) f(\vec{x}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} G^*(\vec{k}) F(\vec{k}). \quad (2.35)$$

Avec l'expression de $\varphi(x)$ dérivée précédemment, on arrive à l'expression du Hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation :

$$H(t) = \int d\vec{k} \frac{\omega_k}{2} \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right]. \quad (2.36)$$

Après renormalisation de l'énergie du vide – même argument et procédure que dans le cas de la boucle continue – à l'aide du produit normal, le Hamiltonien devient

$$H(t) = \int d\vec{k} \frac{\omega_k}{2} : \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right] : = \int d\vec{k} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (2.37)$$

Finalement, on peut s'intéresser à l'opérateur **impulsion**, $P = (H, \vec{P})$. Cet opérateur est donné par

$$P^\mu = \int d\vec{x} T^{0\mu}, \quad (2.38)$$

d'où on déduit

$$\vec{P} = - \int d\vec{x} \dot{\varphi} (\vec{\nabla} \varphi). \quad (2.39)$$

Cela s'exprime – suite à une nouvelle utilisation du théorème de Parseval – en fonction des opérateurs $a_{\vec{k}}$ et $a_{\vec{k}}^\dagger$ comme

$$\vec{P} = \int d\vec{k} \frac{\vec{k}}{2} \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right]. \quad (2.40)$$

Basé sur cette expression, l'impulsion du vide diverge. En conséquence, une renormalisation de l'impulsion est nécessaire, ce qui peut être réalisé par le produit normal, de la même manière que pour l'énergie. Nous allons alors réécrire l'opérateur impulsion comme

$$\vec{P} = - \int d\vec{x} \dot{\varphi} : (\vec{\nabla} \varphi) : = \int d\vec{k} \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (2.41)$$

Les opérateur de création entretiennent avec l'opérateur impulsion les relations de commutation

$$[P^\mu, a_{\vec{k}}^\dagger] = k^\mu a_{\vec{k}}^\dagger. \quad (2.42)$$

En conclusion, l'opérateur $a_{\vec{k}}^\dagger$ crée un quantum d'excitation associé à l'onde plane dont le vecteur d'onde est \vec{k} , interprété comme la présence d'une particule de masse m se propageant avec l'impulsion \vec{k} . L'application de $a_{\vec{k}}^\dagger$ sur le vide $|0\rangle$ engendre une particule de

quadri-impulsion l^μ . L'excitation multiple d'une onde plane est possible, les particules correspondantes peuvent alors occuper le même état quantique de propagation : il s'agit de **bosons**.

Finalement, le vide de la théorie est détruit par tous les opérateurs d'annihilation $a_{\vec{k}}$,

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \vec{k}. \quad (2.43)$$

L'espace de Fock de la théorie comprend alors tous les états de la forme $|0\rangle$, $|\vec{k}_1\rangle$, $|\vec{k}_1 \vec{k}_1\rangle$, etc.

Chapitre 2 – Exercices

Exercice 2.1

Pour le cas du champ scalaire réel massif, démontrer que les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme donnée en Éq. (2.7).

Exercice 2.2

Démontrer que la relation (2.23) conduit à la relation (2.10).

Exercice 2.3

À partir du développement (2.29), démontrer que le champ φ satisfait à l'équation de Klein-Gordon.

Exercice 2.4

Démontrer les relations (2.32) à partir de relations (2.31).

Exercice 2.5

Démontrer les relations de commutation (2.42).

❖ Chapitre 3 : Quantification du champ scalaire complexe

Dans ce chapitre, nous allons généraliser la discussion précédente à un champ scalaire complexe, et nous allons montrer que ce dernier correspond à une particule scalaire chargée. Un champ scalaire complexe $\varphi(t, \vec{x})$ est l'association de deux champs scalaires réels,

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(t, \vec{x}) + i \varphi_2(t, \vec{x}) \right). \quad (3.1)$$

Son champ conjugué s'écrit alors

$$\varphi^*(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(t, \vec{x}) - i \varphi_2(t, \vec{x}) \right). \quad (3.2)$$

Nous allons alors pouvoir réutiliser les résultats obtenus lors du Chapitre précédent pour les composantes φ_1 et φ_2 .

3.1 Lagrangien et tenseur énergie-impulsion

Le Lagrangien du champ scalaire complexe peut alors être exprimé – en premier lieu – comme la somme des Lagrangiens individuels associés aux champs φ_1 et φ_2 ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1) (\partial^\mu \varphi_1) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2) (\partial^\mu \varphi_2) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_2^2. \quad (3.3)$$

Sachant que $\varphi^* \varphi = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)/2$, ce Lagrangien peut se réécrire

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi = (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) + V(\varphi^* \varphi), \quad (3.4)$$

où nous avons de nouveau introduit le potentiel scalaire $V(\varphi^* \varphi) = m^2 \varphi^* \varphi$, qui ne contient que le terme de masse pour le champ libre considéré ici. Les variables canoniques décrivant le champ scalaire complexe peuvent alors être choisies comme φ et φ^* . Les équations d'Euler-Lagrange associées correspondent aux équations de Klein-Gordon pour φ et φ^* ,

$$(\square + m^2) \varphi = 0 \quad \text{et} \quad (\square + m^2) \varphi^* = 0. \quad (3.5)$$

Le tenseur énergie-impulsion se calcule selon la prescription donnée en Éq. (2.22), sachant qu'il faut maintenant sommer sur les champs canoniques compris dans le Lagrangien. Pour le champ scalaire complexe, on obtient

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} (\partial^\nu \varphi_i) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi) (\partial^\nu \varphi^*) + (\partial^\mu \varphi^*) (\partial^\nu \varphi) + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

3.2 Hamiltonien et quantification canonique

Les développements en séries de Fourier des champs scalaires réels φ_1 et φ_2 sont donnés par

$$\varphi_1(x) = \int d\tilde{k} \left[a_{\vec{k}_1}^- e^{-ikx} + a_{\vec{k}_1}^+ e^{ikx} \right], \quad (3.7)$$

$$\varphi_2(x) = \int d\vec{k} \left[a_{\vec{k}_2} e^{-ikx} + a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (3.8)$$

avec les opérateurs de création et d'annihilation associés aux deux champs. Le champ complexe se décompose alors comme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(x) + i \varphi_2(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\vec{k} \left[(a_{\vec{k}_1} + i a_{\vec{k}_2}) e^{-ikx} + (a_{\vec{k}_1}^\dagger + i a_{\vec{k}_2}^\dagger) e^{ikx} \right]. \quad (3.9)$$

Cela permet d'écrire des opérateurs de création et d'annihilation pour le champ complexe φ ,

$$a_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_{\vec{k}_1} + i a_{\vec{k}_2} \right] \quad \text{et} \quad b_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_{\vec{k}_1} - i a_{\vec{k}_2} \right] \quad (3.10)$$

tels que le champ scalaire complexe s'écrit

$$\varphi(x) = \int d\vec{k} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + b_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (3.11)$$

$$\varphi^*(x) = \int d\vec{k} \left[b_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right]. \quad (3.12)$$

Il est à noter que – contrairement au champ scalaire réel – nous avons ici deux opérateurs dans la décomposition en série de Fourier. En particulier il est à noter que $b_{\vec{k}}^\dagger \neq a_{\vec{k}}$. Les relations de commutation associées sont

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = [b_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (3.13)$$

$$[a_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^\dagger] = [b_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = 0. \quad (3.14)$$

Le Hamiltonien s'obtient en intégrant la composante temporelle du tenseur énergie-impulsion donné en Éq. (3.6),

$$H(t) = \int d\vec{x} : \left[\dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + (\vec{\nabla} \varphi^*)(\vec{\nabla} \varphi) + V(\varphi^* \varphi) \right] :, \quad (3.15)$$

où nous avons directement écrit le produit normal afin de tenir compte de la renormalisation de l'énergie du vide nécessaire. Comme pour le champ scalaire réel, l'intégrale peut être réécrit en utilisant le théorème de Parseval, ce qui donne

$$H(t) = \int d\vec{k} \omega_k : \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger \right] : = \int d\vec{k} \omega_k \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right]. \quad (3.16)$$

Finalement, l'impulsion correspond à l'intégrale de la composante T^{0i} du tenseur énergie-impulsion,

$$\vec{P}(t) = - \int d\vec{x} : \left[(\vec{\nabla} \varphi^*) \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^* (\vec{\nabla} \varphi) \right] : = \int d\vec{k} \vec{k} \left[a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right]. \quad (3.17)$$

Les opérateurs $a_{\vec{k}}^\dagger$ et $b_{\vec{k}}^\dagger$ correspondent alors tous les deux à la création d'un quantum d'excitation associé à une onde plane d'énergie ω_k et de vecteur d'onde \vec{k} , c.a.d. une particule de quadri-impulsion $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$ avec $\omega_k^2 = m^2 + \vec{k}^2$. Quelle est alors la différence entre ces deux opérateurs ?

3.3 Invariance de jauge et charge électrique

Afin de répondre à la question ci-dessus, nous allons nous appuyer sur le concept d'*invariante de jauge*. Plus précisément, nous allons considérer une transformation de jauge de groupe $U(1)$. Lors d'une telle rotation complexe, le champ φ se transforme comme

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi e^{iq\theta}, \quad (3.18)$$

$$\varphi^* \rightarrow \tilde{\varphi}^* = \varphi^* e^{-iq\theta}, \quad (3.19)$$

avec une constante q et le paramètre θ associé à la rotation. Nous supposons pour le moment que θ ne dépend pas de l'endroit x , c.a.d. $\partial_\mu \theta = 0$, on parle alors d'une *transformation globale* de jauge. On montre facilement que

$$\tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} = \varphi^* \varphi \quad \text{et} \quad (\partial_\mu \tilde{\varphi}^*)(\partial^\mu \tilde{\varphi}) = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi). \quad (3.20)$$

Nous pouvons alors conclure que le Lagrangien du champ scalaire complexe – voir Éq. (3.4) – est invariante sous une transformation de jauge $U(1)$ globale. Il est à noter que la situation serait différente dans le cas d'une transformation locale où $\theta = \theta(x)$ et $\partial_\mu \theta \neq 0$.

Afin d'explorer plus en détail cette invariance, nous allons considérer une transformation infinitésimale,

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi e^{iq\theta} \simeq \varphi (1 + iq\theta), \quad (3.21)$$

$$\varphi^* \rightarrow \tilde{\varphi}^* = \varphi^* e^{-iq\theta} \simeq \varphi^* (1 - iq\theta), \quad (3.22)$$

où les termes d'ordre q^2 et supérieur ont été négligés. Ce même comportement est retrouvé pour les dérivées du champ,

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \tilde{\varphi} = \partial_\mu \varphi e^{iq\theta} \simeq \partial_\mu \varphi (1 + iq\theta), \quad (3.23)$$

$$\partial_\mu \varphi^* \rightarrow \partial_\mu \tilde{\varphi}^* = \partial_\mu \varphi^* e^{-iq\theta} \simeq \partial_\mu \varphi^* (1 - iq\theta). \quad (3.24)$$

Les variations de φ et $\partial_\mu \varphi$ sont alors données par

$$\delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi = iq\theta \varphi, \quad (3.25)$$

$$\delta\varphi^* = \tilde{\varphi}^* - \varphi^* = -iq\theta \varphi^*, \quad (3.26)$$

$$\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu \tilde{\varphi} - \partial_\mu \varphi = iq\theta \partial_\mu \varphi, \quad (3.27)$$

$$\delta(\partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \tilde{\varphi}^* - \partial_\mu \varphi^* = -iq\theta \partial_\mu \varphi^*. \quad (3.28)$$

Sachant que la variation du Lagrangien est nulle, nous pouvons alors écrire

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta(\partial_\mu\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} \delta\varphi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} \delta(\partial_\mu\varphi^*) = 0, \quad (3.29)$$

L'utilisation de l'égalité

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right] = \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \quad (3.30)$$

ainsi que les équations d'Euler-Lagrange mènent alors à

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\delta\varphi^* \right] = iq \partial_\mu \left[\varphi^*(\partial^\mu\varphi) - (\partial^\mu\varphi^*)\varphi \right] = 0. \quad (3.31)$$

Basé sur ce résultat, nous définissons

$$J^\mu = iq \left[\varphi^*(\partial^\mu\varphi) - (\partial^\mu\varphi^*)\varphi \right] = iq \left(\varphi^* \overleftrightarrow{\partial} \varphi \right), \quad (3.32)$$

interprété comme *quadri-courant électrique*, qui se conserve

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.33)$$

La *charge électrique* correspond à l'intégrale sur la partie temporelle du courant,

$$Q(t) = \int d\vec{x} J^0(t, \vec{x}) = iq \int d\vec{x} : \left[\varphi^* \overleftrightarrow{\partial} \varphi \right] : , \quad (3.34)$$

où de nouveau nous avons introduit le produit normal afin de correctement renormaliser la charge électrique du vide. L'utilisation du théorème de Parseval permet d'exprimer la charge en fonction des opérateurs $a_{\vec{k}}$ et $b_{\vec{k}}$,

$$Q(t) = \int d\vec{k} \left[(+q) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + (-q) b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right]. \quad (3.35)$$

La différence entre les deux opérateurs est alors liée à la charge électrique : l'opérateur $a_{\vec{k}}^\dagger$ crée une *particule* de charge $(+q)$, tandis que $b_{\vec{k}}^\dagger$ crée une *antiparticule* de charge opposée $(-q)$.

3.4 Propagateur de Feynman et T-produit

En présence d'une source, l'équation de Klein-Gordon est modifiée afin d'inclure le terme de source,

$$(\square + m^2)\varphi(x) = S(x). \quad (3.36)$$

Afin de résoudre cette équation, on pose

$$\varphi(x) = \int d^4y G(x-y) S(y), \quad (3.37)$$

où $G(x-y)$ est la *fonction de Green* ou le *propagateur* de y vers x . La combinaison des deux équations donne l'égalité suivante pour le terme de source,

$$S(x) = \int d^4y (\square_x + m^2)G(x-y) = \int d^4y \delta^4(x-y) S(y), \quad (3.38)$$

d'où on obtient une équation différentielle pour le propagateur,

$$(\square_x + m^2) G(x-y) = \delta^4(x-y). \quad (3.39)$$

Le propagateur associé au champ scalaire obéit alors à une équation de Klein-Gordon.

Nous allons reformuler cette équation dans l'espace impulsion, grâce aux transformées de Fourier définies par

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k) e^{-ik(x-y)} \quad \text{et} \quad \delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)}. \quad (3.40)$$

Cela implique

$$\int d^4k (\square_x + m^2) G(k) e^{-ik(x-y)} = \int d^4k (-k^2 + m^2) G(k) e^{-ik(x-y)} = \int d^4k e^{-ik(x-y)}, \quad (3.41)$$

et finalement

$$\boxed{(-k^2 + m^2) G(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2}.} \quad (3.42)$$

Afin de revenir dans l'espace x , il faut alors calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} G(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-1}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 e^{-ik^0(x^0-y^0)} \frac{-1}{(k^0)^2 - \omega_k^2}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

où dans la dernière étape la partie temporelle a été séparée de la partie spatiale et le dénominateur a été réécrit selon $k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = (k^0)^2 - \omega_k^2$. La partie spatiale est sans difficulté, mais la partie temporelle contient un pôle en $(k^0)^2 = \omega_k^2$. L'intégrale peut être évaluée à l'aide du *théorème des résidus*.

Deux prescriptions se proposent quant au traitement des pôles :

— *Prescription de Lienard-Wiechert* : déplacement des deux pôles "vers le bas", c.a.d.

$$G(x - y) = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 - y^0 < 0 \Leftrightarrow x^0 < y^0, \quad (3.44)$$

on n'a alors pas de propagation vers le passé;

— *Prescription de Feynman* : on déplace le pôle en $k^0 = \omega_k$ "vers le bas" et le pôle en $k^0 = -\omega_k$ "vers le haut". Cette prescription donne lieu à des particules à énergie positive se propageant vers le futur et à des particules à énergie négative se propageant vers le passé.

Ici, nous allons nous placer dans la prescription de Feynman.

Finalement, on obtient pour le propagateur de Feynman

$$\begin{aligned} G_F(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{i}{2\omega_k} e^{-ik^0(x^0-y^0)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{i}{2\omega_k} e^{ik^0(x^0-y^0)} \right] \\ &= i \int d\vec{k} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

On définit le produit chronologiquement ordonné (**T-produit**) de deux opérateurs comme

$$\mathbf{T} \{A(x) B(y)\} = \theta(x^0 - y^0) A(x) B(y) + \theta(y^0 - x^0) B(y) A(x). \quad (3.46)$$

On peut alors montrer que le propagateur de Feynman est lié à un T-produit selon

$$\boxed{-i G_F(x - y) = \langle 0 | \mathbf{T} \{ \varphi(x) \varphi^\dagger(y) \} | 0 \rangle .} \quad (3.47)$$

Ce résultat s'interprète comme une **particule** se propageant de y vers x si $x^0 > y^0$ et comme une **antiparticule** se propageant de x vers y si $y^0 > x^0$.

Chapitre 3 – Exercices

Exercice 3.1

Démontrer l'expression du Hamiltonien donnée en (3.15) en calculant l'intégrale de la composante T^{00} du tenseur impulsion-énergie. Montrer ensuite que l'impulsion spatiale associée est donnée par la première expression donnée en (3.17) (il n'est pas demandé d'appliquer le théorème de Parseval afin de démontrer la deuxième expression).

Exercice 3.2

En utilisant les relations de commutation (2.31), démontrer les relations de commutation (3.13) et (3.14).

Exercice 3.3

Calculer directement la quadri-divergence du courant J^μ défini en (3.32). En vous aidant de l'équation de Klein-Gordon, montrer que le courant se conserve.

Exercice 3.4

Montrer que le propagateur de Feynman s'écrit comme proposé en (3.45).

Exercice 3.5

Démontrer la relation donnée en (3.47) entre le propagateur de Feynman et le T-produit de φ et φ^\dagger .

❖ Chapitre 4 : Quantification du champ électromagnétique

Ayant complété la discussion de la quantification du champ scalaire et ayant introduit le propagateur ainsi que le T-produit, nous sommes maintenant prêts à avancer vers la discussion du champ électromagnétique en tant que représentant d'un champ de jauge. La discussion des champs fermioniques suivra dans le prochain chapitre.

4.1 Équations de Maxwell et invariance de jauge

Pour rappel, le champ électrique \vec{E} ainsi que le champ magnétique \vec{B} dérivent du potentiel électrique ϕ ainsi que du potentiel vecteur \vec{A} ,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.2)$$

La théorie classique de l'électromagnétisme est gouvernée par les *équations de Maxwell*,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Afin de passer à l'écriture covariante, on introduit le quadri-potentiel A ainsi que le quadri-courant J ,

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad J^\mu = (\rho, \vec{j}). \quad (4.7)$$

Le *tenseur électromagnétique* est alors défini par

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (4.8)$$

il contient les composantes des champs électrique et magnétique. Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu}. \quad (4.9)$$

Le tenseur électromagnétique est invariant sous la transformation de jauge

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \theta. \quad (4.10)$$

On a alors une infinité de choix possibles pour le quadri-potentiel donnant la même configuration physique du champ électromagnétique.

On se place dans la *jauge de Lorenz*, définie telle que

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.11)$$

Avec ce choix, les équations de Maxwell deviennent

$$\boxed{\square A^\mu = J^\mu.} \quad (4.12)$$

On y reconnaît l'équation de Klein-Gordon avec terme de source, mais sans terme de masse.

La solution de l'équation précédente peut s'écrire

$$A^\mu(x) = \int d^4y G_{\text{ret}}(x-y) J^\mu(y), \quad (4.13)$$

où la fonction de Green est le propagateur retardé de Lienard-Wiechert. On en déduit que

$$G_{\text{ret}}(k) = -\frac{1}{k^2}, \quad (4.14)$$

puis la solution pour le potentiel vecteur,

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \int d^4y \frac{1}{4\pi r} \delta(r - (x^0 - y^0)) J^\mu(y) = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{y} \frac{J^\mu(t_y = t_x - r, \vec{y})}{r}. \quad (4.15)$$

La contribution en $x = (t, \vec{x})$ provient des points source, situés en \vec{y} . Elle a été rayonnée à l'instant $t_y = t_x - r$ antérieur car elle a dû se propager à la vitesse de la lumière ($c = 1$) sur la distance $r = |\vec{x} - \vec{y}|$.

La structure de l'onde plane se propageant dans le vide peut être comprise à travers la solution

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{-ikx}, \quad (4.16)$$

où ϵ est le vecteur polarisation. L'équation de Klein-Gordon (4.12) sans source implique que $k^2 = 0$. De plus, imposant la jauge de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, implique

$$\epsilon_\mu k^\mu = 0. \quad (4.17)$$

En choisissant $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, on déduit que la polarisation temporelle est égale à la polarisation longitudinale,

$$\epsilon^0 = \epsilon^3. \quad (4.18)$$

Nous pouvons alors écrire le vecteur polarisation, comme une somme sur la polarisation transversale et la polarisation temporelle et longitudinale,

$$\epsilon^\mu = \epsilon_\perp^\mu + \alpha k^\mu, \quad (4.19)$$

avec $\alpha = \epsilon^0/\omega$. La polarisation temporelle et longitudinale peut être absorbé par une transformation de jauge telle que

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \theta \quad (4.20)$$

en choisissant $\theta = -i\alpha e^{-ikx}$. Les polarisations physiques sont alors les polarisations transversales ϵ_\perp^μ .

Dans le référentiel du laboratoire, c.a.d. le référentiel associé au vecteur d'onde k^μ , on introduit la base

$$e^\mu(\vec{k}, \lambda = 0) = (1, \vec{0}) \quad \text{et} \quad e^\mu(\vec{k}, \lambda = i) = (1, \vec{e}_i). \quad (4.21)$$

On peut alors montrer que

$$e^\mu(\vec{k}, \lambda) e_\mu(\vec{k}, \sigma) = \eta_{\lambda\sigma} \quad \text{et} \quad \sum_\lambda \frac{e_\mu(\vec{k}, \lambda) e_\nu(\vec{k}, \lambda)}{e(\vec{k}, \lambda) e(\vec{k}, \lambda)} = \eta_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

4.2 Lagrangien et tenseur énergie-impulsion

Le Lagrangien de la théorie de Maxwell s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - J_\mu A^\mu, \quad (4.23)$$

les variables canoniques associées sont A_α et $\partial_\beta A_\alpha$. Sachant que le premier terme peut se réécrire comme

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \partial_\mu A_\nu F_{\sigma\rho}, \quad (4.24)$$

le Lagrangien ci-dessous peut s'écrire

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \partial_\mu A_\nu F_{\sigma\rho} - \frac{\lambda}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu)^2 - \eta^{\mu\nu} J_\nu A_\mu. \quad (4.25)$$

Les équations d'Euler-Lagrange,

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}, \quad (4.26)$$

correspondent alors à la relation

$$\boxed{\square A^\mu + (\lambda - 1) \partial^\mu(\partial A) = J^\mu.} \quad (4.27)$$

En jauge de Lorenz, $\partial A = 0$, ou pour $\lambda = 1$ on retrouve alors la théorie de Maxwell.

Le tenseur énergie-impulsion s'obtient selon Éq. (2.22). Pour $\lambda = 0$ et $J^\mu = 0$, on obtient

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} (\partial^\nu A_\alpha) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\alpha} (\partial^\nu A_\alpha) + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F \cdot F. \quad (4.28)$$

Cette expression vérifie naturellement la conservation $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

La transformation de jauge donnée en Éq. (4.20) laisse invariant le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$, mais pas le tenseur énergie-impulsion comme défini ci-dessus. En effet, la variation associée à cette transformation de jauge est donnée par

$$\delta T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu (\partial_\alpha \theta) = \delta(F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu). \quad (4.29)$$

Afin de rendre le tenseur énergie-impulsion invariant de jauge, on inclut alors le terme supplémentaire tel que

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}(\partial^\nu A_\alpha) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F \cdot F + F^{\mu\alpha}(\partial_\alpha A^\nu) = -F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F \cdot F, \quad (4.30)$$

ce qui change pas la conservation

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.31)$$

et ce qui donne bien

$$\delta T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.32)$$

au niveau de la transformation de jauge ci-dessus. L'Hamiltonien est alors donné par

$$\boxed{\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2,} \quad (4.33)$$

et le vecteur de Poynting, exprimant le flux d'énergie, est donné par

$$\Pi^i = T^{0i} = \epsilon_{ijk}E^jB^k \quad \Rightarrow \quad \vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{B}. \quad (4.34)$$

4.3 Quantification à la Gupta-Bleuler

Pour $\lambda = 0$, le Lagrangien de la théorie de Maxwell dans le vide, c.a.d. en absence de source, est donné par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

les variables canoniques étant A_α et les moments conjugués

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha)} = F^{\alpha 0}. \quad (4.36)$$

On en conclut que la composante temporelle de Π s'annule,

$$\Pi^0 = F^{00} = 0, \quad (4.37)$$

ce qui constitue un obstacle sérieux à la quantification, car un opérateur dans l'espace de Fock ne peut pas s'annuler. Une possible solution serait de considérer seulement \vec{A} et choisir la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, mais cela ne respecterait pas l'invariance de Lorentz.

Nous allons ici considérer la théorie gouvernée par le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - J_\mu A^\mu, \quad (4.38)$$

qui ne correspond pas strictement à l'électromagnétisme à la Maxwell. En effet, l'espace de Fock associé à ce Lagrangien est plus général, car il contient également les états non physique de polarisation longitudinale et temporelle. Nous allons, dans un premier temps, quantifier

la théorie basée sur ce Lagrangien plus générale, puis, dans un second temps, restreindre l'espace de Fock aux états physiques. Cette méthode est la *quantification à la Gupta-Bleuler*.

Nous allons considérer le Lagrangien donné en Éq. (4.38), nous placer en jauge de Feynman ($\lambda = 1$) et dans le vide ($J^\mu = 0$),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (4.39)$$

Les variables canoniques sont alors A^α , et les moments conjugués sont

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = F^{\alpha 0} - \eta^{0\alpha}(\partial A). \quad (4.40)$$

On impose les relations de commutations

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] = i \eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.41)$$

$$[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = [\Pi^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] = 0. \quad (4.42)$$

Le développement de Fourier du potentiel A^μ correspond à la somme sur les ondes planes et s'écrit

$$A_\mu(x) = \int d\vec{k} \sum_{\lambda=0}^3 \left[a(\vec{k}, \lambda) e_\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e_\mu(\vec{k}, \lambda) e^{ikx} \right], \quad (4.43)$$

où l'opérateur $a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$ correspond à la création d'un quantum électromagnétique d'impulsion \vec{k} et de polarisation $e_\mu(\vec{k}, \lambda)$. L'opérateur $a(\vec{k}, \lambda)$ est l'annihilateur associé,

$$a(\vec{k}, \lambda) |0\rangle = 0. \quad (4.44)$$

Leur commutateur doit vérifier la relation

$$[a(\vec{k}, \lambda), a^\dagger(\vec{k}, \lambda)] = -\eta^{\lambda\sigma} (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \quad (4.45)$$

afin de garantir les relations de commutation imposées ci-dessus. Cependant, cette relation conduit à l'existence d'états de norme négative. Si l'on considère, par exemple, la création d'un quantum de polarisation temporelle,

$$|\psi\rangle = a^\dagger(\vec{k}, \lambda = 0) |0\rangle, \quad (4.46)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \langle 0 | a(\vec{k}, \lambda = 0) a^\dagger(\vec{k}, \lambda = 0) |0\rangle = \langle 0 | [a(\vec{k}, \lambda = 0), a^\dagger(\vec{k}, \lambda = 0)] |0\rangle \\ &= -(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta(\vec{0}) \langle 0 | 0 \rangle < 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ceci est lié au fait que l'espace de Fock obtenu n'est pas celui de la théorie de Maxwell. En effet, il contient en plus des états non physiques. On rappelle que la condition $\partial A = 0$ ne peut pas être satisfaite par les opérateurs. En revanche, elle peut servir pour sélectionner

le sous-espace de Fock correspondant à la théorie de l'électromagnétisme à la Maxwell. En effet, ce sous-espace peut être défini en imposant

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = 0. \quad (4.48)$$

L'opérateur ∂A s'exprime

$$\partial A = \partial_\mu A^\mu(x) = \partial_\mu A_+^\mu(x) + \partial_\mu A_-^\mu(x), \quad (4.49)$$

telle que les deux parties correspondent respectivement à la solution à énergie positive et énergie négative,

$$\partial_\mu A_+^\mu(x) = -i \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu a(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx}, \quad (4.50)$$

$$\partial_\mu A_-^\mu(x) = i \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu a^+(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}. \quad (4.51)$$

On peut alors conclure qu'une telle décomposition tient aussi pour le champ A^μ ,

$$A^\mu(x) = A_+^\mu(x) + A_-^\mu(x). \quad (4.52)$$

La condition donnée en Éq. (4.48) est alors équivalente à sélectionner la composante de A^μ à énergie positive,

$$A_+^\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 a(\vec{k}, \lambda) e^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx}. \quad (4.53)$$

Si l'on impose en plus

$$\partial_\mu A_+^\mu(x) = 0, \quad (4.54)$$

on retrouve une expression équivalente à Éq. (4.18),

$$\left[a(\vec{k}, \lambda = 0) - a(\vec{k}, \lambda = 3) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (4.55)$$

Chaque état physique peut alors s'écrire

$$|\psi\rangle = |\psi_\perp\rangle \oplus |\phi\rangle, \quad (4.56)$$

où $|\psi_\perp\rangle$ contient les polarisations transversales et $|\phi\rangle$ contient les polarisations temporelle et longitudinale. La structure de $|\phi\rangle$ est fortement contrainte, cette contrainte correspond à l'égalité classique entre les polarisations ϵ^0 et ϵ^3 de l'onde plane.

4.4 Propagateur de Feynman

Le propagateur de Feynman du champ électromagnétique s'exprime comme

$$G_F(x - y) = i \int d\tilde{k} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right]. \quad (4.57)$$

Tout comme pour le champ scalaire discuté lors des chapitres précédents, cette expression est liée à un T-produit,

$$i \eta^{\mu\nu} G_F(x - y) = \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \} | 0 \rangle. \quad (4.58)$$

Chapitre 4 – Exercices

Exercice 4.1

Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $G_{\text{ret}}(x)$ définie en Éq. (4.13) est donnée par l'expression donnée en Éq. (4.14). En déduire l'expression du propagateur donnée en Éq. (4.15).

Exercice 4.2

Montrer que les équations d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien (4.23) se mettent sous la forme donnée en Éq. (4.27)

Exercice 4.3

En partant de la définition (4.30), démontrer les expressions données en (4.33) et (4.34).

Exercice 4.4

Démontrer l'expression du propagateur donnée en Éq. (4.57). Démontrer ensuite la relation donnée en Éq. (4.58) entre le propagateur de Feynman et le T-produit.

❖ Chapitre 5 : Quantification du champ fermionique

Le dernier type de particule à traiter avant de pouvoir parler des interactions sont les champs fermioniques. Nous allons considérer ici les champs fermioniques de spin 1/2, c.a.d. des champs de Dirac décrivant les fermions du modèle standard (leptons et quarks).

5.1 Spineurs et équation de Dirac

Un champ de Dirac est représenté par un spineur

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

qui obéit à l'équation de Dirac,

$$(\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi = (\not{\partial} - m) \psi = 0. \quad (5.2)$$

Il est à noter que l'équation de Dirac implique l'équation de Klein-Gordon. À partir du spineur ψ on définit les objets

$$\psi^\dagger = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \psi_3^* \ \psi_4^*), \quad (5.3)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ -\psi_3^* \ -\psi_4^*). \quad (5.4)$$

L'équation de Dirac admet des solutions à énergie positive au repos,

$$u(\vec{0}, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(\vec{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

ainsi que des solutions à énergie négative au repos,

$$v(\vec{0}, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v(\vec{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Les solutions de quadri-impulsion k à énergie positive et négative s'écrivent alors

$$u(\vec{k}, \alpha) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + E_k)}} u(\vec{0}, \alpha) \quad \text{et} \quad v(\vec{k}, \alpha) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + E_k)}} v(\vec{0}, \alpha) \quad (5.7)$$

pour $\alpha = 1, 2$. Ces spineurs vérifient les égalités

$$u^\dagger(\vec{k}, \alpha) u(\vec{k}, \beta) = \frac{E_k}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

$$v^\dagger(\vec{k}, \alpha) v(\vec{k}, \beta) = \frac{E_k}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.9)$$

$$v^\dagger(-\vec{k}, \alpha) u(\vec{k}, \beta) = 0, \quad (5.10)$$

$$u^\dagger(-\vec{k}, \alpha) v(\vec{k}, \beta) = 0. \quad (5.11)$$

5.2 Lagrangien et tenseur énergie-impulsion

Le Lagrangien décrivant un champ de Dirac massif et libre est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (5.12)$$

Les variables canoniques sont les champs ψ_α et $\bar{\psi}_\alpha$, les moment conjugués associés sont $\partial_\mu \psi_\alpha$ et $\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha$. L'évaluation des équations d'Euler-Lagrange mène bien aux équations de Dirac pour ψ et $\bar{\psi}$,

$$(i \overleftarrow{\partial} - m) \psi = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\psi} (i \overrightarrow{\partial} - m) = 0. \quad (5.13)$$

Si l'on considère le Lagrangien plus simple

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\psi} (i \overrightarrow{\partial} - m) \psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (5.14)$$

on peut conclure que ce dernier est équivalent à celui donné plus haut, car

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{L}} + \tilde{\mathcal{L}}^*). \quad (5.15)$$

La différence des deux Lagrangiens correspond à une quadri-divergence,

$$\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} = -\frac{i}{2} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi]. \quad (5.16)$$

Nous pouvons alors conclure qu'il y a conservation d'un courant. Ce courant peut être mis en évidence en considérant la transformation de jauge du groupe $U(1)$

$$\psi_\alpha \longrightarrow \tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha e^{iq\theta}. \quad (5.17)$$

L'imposition de l'invariance de jauge mène alors à la conservation du courant

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{avec} \quad J^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (5.18)$$

interprété de nouveau comme le courant électrique. Finalement, le tenseur énergie-impulsion est donné par

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\varphi_i = \psi_\alpha, \bar{\psi}_\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} (\partial^\nu \varphi_i) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.19)$$

$$= \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial^\nu \psi) - (\partial^\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi]. \quad (5.20)$$

5.3 Quantification, Hamiltonien, impulsion et charge électrique

Afin de quantifier le champ de Dirac, nous allons considérer son développement en série de Fourier,

$$\psi(x) = \int d\vec{k} \sum_s [b(\vec{k}, s) u(\vec{k}, s) e^{-ikx} + d^\dagger(\vec{k}, s) v(\vec{k}, s) e^{ikx}] \quad (5.21)$$

où l'élément différentiel $d\vec{k}$ est donnée par

$$d\vec{k} = \frac{m}{E_k} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (5.22)$$

En promouvant les coefficients b et d au rang d'opérateur, il convient d'introduire les relations d'*anti-commutation*

$$\{b(\vec{k}, \alpha), b^\dagger(\vec{p}, \beta)\} = \{d(\vec{k}, \alpha), d^\dagger(\vec{p}, \beta)\} = (2\pi)^3 \frac{E_k}{m} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.23)$$

Tous les autres anti-commutateurs sont nuls. Ces relations impliquent que

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.24)$$

L'Hamiltonien est donnée par la composante temporelle du tenseur énergie-impulsion,

$$H = \int d\vec{x} T^{00} = \int d\vec{x} \frac{i}{2} \left[\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^0 \psi \right]. \quad (5.25)$$

En introduisant la renormalisation de l'énergie du vide à travers le produit normal et après application du théorème de Parseval, on obtient

$$H = \int d\vec{k} E_k \sum_{s=1,2} : \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d(\vec{k}, s) d^\dagger(\vec{k}, s) \right] : \quad (5.26)$$

$$= \int d\vec{k} E_k \sum_{s=1,2} \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) + d^\dagger(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \right]. \quad (5.27)$$

Attention au fait que les opérateurs fermioniques *anti-commutent*, on a alors : $dd^\dagger = -d^\dagger d$. Dans le même esprit, l'opérateur impulsion est donné par

$$P^\mu = \int d\vec{x} T^{0\mu} = \int d\vec{x} \frac{i}{2} \left[\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \right], \quad (5.28)$$

ce qui mène à

$$P^\mu = \int d\vec{k} k^\mu \sum_{s=1,2} : \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d(\vec{k}, s) d^\dagger(\vec{k}, s) \right] : \quad (5.29)$$

$$= \int d\vec{k} k^\mu \sum_{s=1,2} \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) + d^\dagger(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \right]. \quad (5.30)$$

Finalement, la charge électrique est identifiée avec la composante temporelle du courant,

$$Q = \int d\vec{x} J^0 = q \int d\vec{x} \psi^\dagger \psi, \quad (5.31)$$

ce qui donne

$$Q = q \int d\vec{k} \sum_{s=1,2} \left[b^\dagger(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d^\dagger(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \right]. \quad (5.32)$$

L'opérateur $b^\dagger(\vec{k}, s)$ exprime alors la création d'une particule d'énergie E_k , d'impulsion \vec{k} , de spin s , et de charge q , tandis que l'opérateur $d^\dagger(\vec{k}, s)$ exprime la création d'une particule avec la même énergie, la même impulsion, le même spin, mais avec charge opposée $-q$.

5.4 Propagateur de Feynman

Comme lors de la discussion du champ scalaire, le champ fermionique peut s'écrire comme l'intégrale sur toutes les sources accompagnées de leurs propagateurs respectifs,

$$\psi(x) = \int d^4y G(x-y) S(y). \quad (5.33)$$

L'utilisation de l'équation de Dirac permet alors de montrer que le propagateur satisfait également à une équation de Dirac avec source,

$$(i \not{\partial} - m) G(x-y) = \delta(x-y). \quad (5.34)$$

En utilisant les transformées de Fourier, on obtient

$$(\not{k} - m) G(k) = 1, \quad (5.35)$$

et en conséquence

$$G(k) = \frac{1}{\not{k} - m} = (\not{k} - m)^{-1} = \frac{\not{k} + m}{(k^0)^2 - E_k^2}. \quad (5.36)$$

Attention au caractère matriciel de ce propagateur! Passant de nouveau par le théorème des résidues afin d'évaluer l'intégrale

$$G_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G_F(k) e^{-ikx}, \quad (5.37)$$

on obtient le propagateur de Feynman

$$G_F(x-y) = -i \int d\tilde{k} [\theta(x^0 - y^0) \Lambda_+(k) e^{-ikx} + \theta(y^0 - x^0) \Lambda_-(k) e^{ikx}], \quad (5.38)$$

avec les solutions à énergie positive et négative

$$\Lambda_+(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \quad \text{et} \quad \Lambda_-(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}. \quad (5.39)$$

Ce propagateur peut s'exprimer sous forme d'un T-produit de deux champs fermioniques,

$$\langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle = i [G_F(x-y)]_{\alpha\beta}. \quad (5.40)$$

Chapitre 5 – Exercices

Exercice 5.1

À partir la transformation de jauge donnée en Éq. (5.17), construire le courant donné en Éq. (5.18) et montrer qu'il se conserve.

Exercice 5.2

À partir de l'expression donnée en Eq. (5.28), démontrer l'expression de l'opérateur impulsion donnée en Eq. (5.30).

Exercice 5.3

Démontrer les relations d'anti-commutation données en Éq. (5.24).

Exercice 5.4

Démontrer l'expression de la charge électrique donnée Éq. (5.32) en utilisant les relations données en Éq. (5.10) et Éq. (5.11).

Exercice 5.5

Démontrer la relation (5.40) entre le propagateur de Feynman et le T-produit.

❖ Chapitre 6 : Champs en interaction

Ayant vu la quantification canonique de divers type de champs, nous sommes maintenant prêts à décrire l'interaction entre particules élémentaires, comme p.ex. des collisions auprès d'un collisionneur, la désintégration d'une particule, l'annihilation de matière noire, la conversion $\mu - e$ dans un atome, etc.

Le but ultime est de développer la description de tels processus en terme de *diagrammes de Feynman*, qui constituent à la fois une représentation graphique des processus et une prescription mathématique pour le calcul de l'amplitude associée. Typiquement, on cherche à calculer la *section efficace* associée à un certain processus.

Nous allons commencer cette thématique par la discussion de la théorie des perturbations avant d'introduire le théorème de Wick, nécessaire pour ensuite élaborer les *règles de Feynman*.

6.1 Schéma de Schrödinger et schéma de Heisenberg

Considérons une théorie libre décrite par l'Hamiltonien $H_{0,S}$. Dans le *schéma de Schrödinger*, les états évoluent avec le temps,

$$i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = H_{0,S}(t) |\psi, t\rangle . \quad (6.1)$$

La solution de cette équation peut s'écrire en faisant appel à l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$,

$$|\psi, t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\psi, t_0\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}(t, t_0) = e^{-H_{0,S}(t-t_0)} . \quad (6.2)$$

L'opérateur d'évolution satisfait aux propriétés

$$\mathcal{U}(t, t) = 1 , \quad (6.3)$$

$$\mathcal{U}^\dagger(t, t_0) = \mathcal{U}^{-1}(t, t_0) , \quad (6.4)$$

$$\mathcal{U}(t_1, t_2) = \mathcal{U}^{-1}(t_2, t_1) , \quad (6.5)$$

$$\mathcal{U}(t_1, t_3) = \mathcal{U}(t_1, t_2) \mathcal{U}(t_2, t_3) \quad \text{pour } t_1 > t_2 > t_3 . \quad (6.6)$$

Dans le *schéma de Heisenberg*, les états sont gélés et l'évolution temporelle est portée par les opérateurs. La relation entre un opérateur exprimé dans le schéma de Heisenberg et ce même opérateur exprimé dans le schéma de Schrödinger est donnée par

$$\mathcal{A}_H(t) = \mathcal{U}^{-1}(t, t_0) \mathcal{A}_S \mathcal{U}(t, t_0) , \quad (6.7)$$

en supposant que l'évolution démarre à $t = t_0$. À cet instant, on a l'égalité $\mathcal{A}_H(t_0) = \mathcal{A}_S$. On peut montrer que

$$\dot{\mathcal{A}}_H(t) = \frac{d\mathcal{A}_H}{dt} = \frac{\partial \mathcal{A}_H}{\partial t} + i [H_H, \mathcal{A}_H] , \quad (6.8)$$

où H_H est l'Hamiltonien exprimé dans le schéma de Heisenberg.

6.2 Théorie des perturbations

De manière générale, il est impossible de calculer $\mathcal{U}(t, t_0)$, surtout en présence de termes d'interaction dans l'Hamiltonien. Il est alors impossible de prédire le comportement d'un système quantique.

Ici, nous allons considérer le cas particulier où le terme d'interaction est petit devant l'Hamiltonien libre. Nous supposons alors que le Hamiltonien peut s'écrire comme une somme,

$$H = H_0 + H_1, \quad (6.9)$$

de l'Hamiltonien libre H_0 et l'Hamiltonien d'interaction H_1 . Ce dernier est supposé "petit" est peut ainsi être considéré comme une *perturbation*. De plus, nous supposons que $H_1 = 0$ pour $t < t_0$.

Pour donner un exemple, considérons l'Hamiltonien

$$H = H_0 + H_1 = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2 + \epsilon(t)X^4. \quad (6.10)$$

Si $\epsilon(t)$ est "petit", ce terme constitue perturbation de l'oscillateur harmonique décrit par les deux premiers termes.

Pour donner un deuxième exemple faisant appel à un champ scalaire, considérons le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \lambda\varphi^4, \quad (6.11)$$

où l'Hamiltonien associé

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4. \quad (6.12)$$

Le terme $\lambda\varphi^4$ est un terme d'interaction entre quatre champs scalaires. Si le paramètre de couplage λ est "petit", il s'agit d'une perturbation du Lagrangien ou Hamiltonien libre.

Dans ce qui suit, nous allons adresser la question comment obtenir une expression pour l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$ dans cette situation.

6.3 Schéma d'interaction et matrice \mathcal{S}

Le *schéma d'interaction* consiste à séparer l'opérateur d'évolution tel qu'il s'écrit comme un produit de l'opérateur d'évolution due à l'Hamiltonien libre et l'opérateur d'évolution associé à l'interaction perturbative,

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}_0(t, t_0) \mathcal{U}_i(t, t_0). \quad (6.13)$$

On en déduit que

$$\mathcal{U}_i(t, t_0) = \mathcal{U}_0^{-1}(t, t_0) \mathcal{U}(t, t_0), \quad (6.14)$$

puis on obtient pour la dérivée

$$i \frac{d\mathcal{U}_i}{dt} = \mathcal{U}_0^{-1} H_{I,S} \mathcal{U}_0 \mathcal{U}_i = H_I \mathcal{U}_i, \quad (6.15)$$

où on a pu identifier l'Hamiltonien d'interaction H_I exprimé dans le schéma de Heisenberg sous l'effet de l'évolution \mathcal{U}_0 seul, c.a.d. comme si la perturbation était absente.

L'opérateur d'évolution \mathcal{U}_i peut être calculé de manière *perturbative*. Si l'on suppose que l'interaction prend effet à $t = t_0$, nous avons $\mathcal{U}_i(t_0, t < t_0) = 1$. La relation donnée en Éq. (6.15) implique que

$$\frac{d\mathcal{U}_i}{dt} = -i H_I \mathcal{U}_i. \quad (6.16)$$

L'intégration de cette relation entre $t = t_0$ et $t = t_f$ donne

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\mathcal{U}_i}{dt} dt = \mathcal{U}_i(t_f) - \mathcal{U}_i(t_0) = \mathcal{U}_i(t_f) - 1 = -i \int_{t_0}^{t_f} H_I(t) \mathcal{U}_i(t) dt. \quad (6.17)$$

On obtient alors pour l'opérateur \mathcal{U}_i la relation

$$\mathcal{U}_i(t_f) = 1 - i \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) \mathcal{U}_i(t), \quad (6.18)$$

qui donne une prescription itérative ou récursive pour le calcul de l'opérateur \mathcal{U}_i . En effet, l'insertion itérative de l'expression obtenue sous l'intégrale mène au développement

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i(t_f) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) + (-i)^2 \int_{t_1}^{t_f} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ & + (-i)^3 \int_{t_1}^{t_f} dt_1 \int_{t_2}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (6.19)$$

En considérant les permutations des temps t_1, t_2, t_3, \dots , on peut montrer que cela est équivalent à

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i(t_f) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) + (-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \dots \\ & + (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t_f} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_f} dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} + \dots \end{aligned} \quad (6.20)$$

Nous avons alors développé l'opérateur d'évolution \mathcal{U}_i de manière perturbative selon les puissances de l'Hamiltonien d'interaction H_I . L'expression ci-dessus peut encore se réécrire comme

$$\mathcal{U}_i(t_f) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^{t_f} dt H_I(t) \right] \right\} \quad (6.21)$$

Finalement, on supposant que la région d'interaction occupe tout l'espace, nous identifions $t_0 = -\infty$ et $t_f = +\infty$. Dans cette limite, l'opérateur d'évolution devient la *matrice d'interaction*,

$$\boxed{\mathcal{S} = T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right] \right\} = T \left\{ \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(t) \right] \right\}} \quad (6.22)$$

6.4 Théorème de Wick

Dans cette partie du cours, nous allons élaborer des relations entre produits de champs, notamment entre produit normal et T-produit d'un certain nombre de champs. Ces relations, élaborées initialement par Dyson et Wick (1949-1950), puis utilisées par Feynman dans le cadre de la théorie quantique des champs, nous seront indispensables dans l'élaboration des règles de Feynman pour la description d'interactions entre particules élémentaires. Nous allons discuter séparément les cas de champs bosoniques et fermioniques.

6.4.1 Cas de champs bosoniques

De manière générale, un champ bosonique φ se décompose en une partie à énergie positive, φ^+ , et une partie à énergie négative, φ^- , tel que

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x). \quad (6.23)$$

Autrement dit, nous avons

$$\varphi^+(x) |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0| \varphi^-(x) = 0. \quad (6.24)$$

On s'intéresse au produit $\varphi_1\varphi_2$ de deux champs bosoniques φ_1 et φ_2 ,

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1^+ + \varphi_1^-, \quad (6.25)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2^+ + \varphi_2^-. \quad (6.26)$$

Pour ces deux champs, le produit normal et le T-produit sont respectivement donnés par

$$:\varphi_1\varphi_2: = \varphi_1^+\varphi_2^+ + \varphi_1^-\varphi_2^+ + \varphi_2^-\varphi_1^+ + \varphi_1^-\varphi_2^-, \quad (6.27)$$

$$T\{\varphi_1\varphi_2\} = \theta(t_1 - t_2)\varphi_1\varphi_2 + \theta(t_2 - t_1)\varphi_2\varphi_1. \quad (6.28)$$

On en déduit d'abord

$$\varphi_1\varphi_2 - :\varphi_1\varphi_2: = [\varphi_1^+, \varphi_2^-], \quad (6.29)$$

puis, en appliquant le T-produit,

$$T\{\varphi_1\varphi_2\} = :\varphi_1\varphi_2: + \overline{\varphi_1\varphi_2}, \quad (6.30)$$

avec la définition du *crochet chronologique*

$$\overline{\varphi_1\varphi_2} = \langle 0| T\{\varphi_1\varphi_2\} |0\rangle. \quad (6.31)$$

L'expression donnée en Éq. (6.42) est connue sous le nom du *théorème de Wick* pour deux champs bosoniques.

Nous allons considérer maintenant le produit de trois champs bosoniques, $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$. Sans restriction nous pouvons choisir l'instant t_3 comme l'instant le plus antérieur, c.a.d. $t_3 < t_1$ et $t_3 < t_2$, ou encore

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = T\{\varphi_1\varphi_2\}\varphi_3. \quad (6.32)$$

En utilisant les résultats obtenus ci-dessus pour le produit des deux champs $\varphi_1\varphi_2$, on obtient théorème de Wick pour trois champs bosoniques,

$$\boxed{T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = : \varphi_1\varphi_2\varphi_3 : + \overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3 + \overline{\varphi_2\varphi_3}\varphi_1 + \overline{\varphi_1\varphi_3}\varphi_2.} \quad (6.33)$$

De manière similaire, le T-produit de quatre champs fermionique peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\} = & : \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : \\ & + \overline{\varphi_1\varphi_2} : \varphi_3\varphi_4 : + \overline{\varphi_1\varphi_3} : \varphi_2\varphi_4 : + \overline{\varphi_1\varphi_4} : \varphi_2\varphi_3 : \\ & + \overline{\varphi_2\varphi_3} : \varphi_1\varphi_4 : + \overline{\varphi_2\varphi_4} : \varphi_1\varphi_3 : + \overline{\varphi_3\varphi_4} : \varphi_1\varphi_2 : \\ & + \overline{\varphi_1\varphi_2}\overline{\varphi_3\varphi_4} + \overline{\varphi_1\varphi_3}\overline{\varphi_2\varphi_4} + \overline{\varphi_1\varphi_4}\overline{\varphi_2\varphi_3}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

correspondant au théorème de Wick pour quatre champs bosoniques.

6.4.2 Cas de champs fermioniques

De la même manière que le champ bosonique, un champ bosonique ψ s'écrit comme la somme sur une partie à énergie positive, ψ^+ , et une partie à énergie négative, ψ^- ,

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x), \quad (6.35)$$

tel que

$$\psi^+(x) |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0| \psi^-(x) = 0. \quad (6.36)$$

On s'intéresse au produit $\psi_1\psi_2$ de deux champs fermioniques ψ_1 et ψ_2 ,

$$\psi_1 = \psi_1(x_1) = \psi_1^+ + \psi_1^-, \quad (6.37)$$

$$\psi_2 = \psi_2(x_2) = \psi_2^+ + \psi_2^-. \quad (6.38)$$

Pour ces deux champs, le produit normal et le T-produit sont respectivement donnés par

$$: \psi_1 \psi_2 : = \psi_1^+ \psi_2^+ + \psi_1^- \psi_2^- - \psi_2^- \psi_1^+ + \psi_1^- \psi_2^-, \quad (6.39)$$

$$T\{\psi_1 \psi_2\} = \theta(t_1 - t_2) \psi_1 \psi_2 - \theta(t_2 - t_1) \psi_2 \psi_1. \quad (6.40)$$

On en déduit d'abord

$$\psi_1 \psi_2 - : \psi_1 \psi_2 : = \{\psi_1^+, \psi_2^-\}, \quad (6.41)$$

puis, en appliquant le T-produit,

$$\boxed{T\{\psi_1 \psi_2\} = : \psi_1 \psi_2 : + \overline{\psi_1 \psi_2},} \quad (6.42)$$

avec la définition du *crochet chronologique*

$$\overline{\psi_1 \psi_2} = \langle 0| T\{\psi_1 \psi_2\} |0\rangle. \quad (6.43)$$

L'expression donnée en Éq. (6.42) est connue sous le nom du *théorème de Wick* pour deux champs fermioniques.

De la même manière que pour les champs bosoniques discutés ci-dessus, mais en faisant attention aux anti-commutations et signes, on démontre le théorème de Wick pour trois, quatre, ... fermions. Pour trois fermions, cela donne

$$\boxed{T\{\psi_1\psi_2\psi_3\} = : \psi_1\psi_2\psi_3 : + \overline{\psi_1}\psi_2\psi_3 + \overline{\psi_2}\psi_3\psi_1 - \overline{\psi_1}\psi_3\psi_2.} \quad (6.44)$$

6.4.3 Cas de plusieurs produits

Dans la pratique (voir prochain chapitre), il faudra souvent évaluer le T-produit de plusieurs produits normaux de champs. Dans ce contexte, il convient de démontrer l'expression

$$\begin{aligned} T\{ : \varphi_1\varphi_2 : : \varphi_3\varphi_4 : \} &= : \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : + : \overline{\varphi_1}\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : + : \overline{\varphi_1}\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : \\ &+ : \overline{\varphi_1}\varphi_2\overline{\varphi_3}\varphi_4 : + : \overline{\varphi_1}\varphi_2\varphi_3\overline{\varphi_4} : \\ &+ : \overline{\varphi_1}\varphi_2\varphi_3\overline{\varphi_4} : + : \overline{\varphi_1}\varphi_2\overline{\varphi_3}\varphi_4 : . \end{aligned} \quad (6.45)$$

Il est à noter qu'il n'y a pas de crochets entre φ_1 et φ_2 , ni entre φ_3 et φ_4 .

Chapitre 6 – Exercices

Exercice 6.1

Démontrer le théorème de Wick pour quatre champs bosoniques.

Exercice 6.2

Démontrer la relation donnée en Éq. (6.45).

Devoir maison

Merci de rendre votre devoir soit sous forme papier soit par email au plus tard le **19 nov. 2024**. Pour rappel, les deux devoirs maisons donnent un potentiel bonus de 2/20 sur la note de l'examen final du module.

Partie 1

Démontrer le théorème de Wick pour trois champs fermioniques.

Partie 2

Soit une théorie scalaire comprenant le scalaire réel ϕ définie par le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^3 - \kappa\phi^4.$$

1. Identifier le terme cinétique, le terme de masse ainsi que le(s) terme(s) d'interaction de ce Lagrangien.
2. Donner une visualisation en terme de vertex où diagramme de Feynman pour le(s) terme(s) d'interaction.
3. Rappeler l'expression définissant la matrice d'interaction \mathcal{S} à partir du Lagrangien d'interaction.
4. Calculer la matrice \mathcal{S} à l'ordre 2 du Lagrangien d'interaction.
5. Interpréter chaque terme de l'expression obtenue en terme d'un diagramme de Feynman.
6. Identifier finalement les termes parmi eux obtenus ci-dessus qui contribuent au processus de diffusion

$$\phi\phi \rightarrow \phi\phi.$$