PHYS 111 – Mécanique
Exercice 3-3 : Parabole de sûreté
Difficulté : ★★☆☆

Énoncé

À On s'intéresse au mouvement de chute d'un projectile ponctuel P de masse m, lancé à $t = 0$, depuis le point O à la vitesse v_0 dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale. L'intensité g du champ de pesanteur est constante.

1. Calculer à l'instant t, les coordonnées du point P. En déduire l'équation de la trajectoire.

2. Déterminer la portée maximale du tir quand on fait varier l'angle α en gardant la norme du vecteur vitesse $\vec{v}_0$ constante.

3. Déterminer l'altitude maximale qui peut être atteinte par le tir, toujours à vitesse v_0 constante.

4. En supposant encore la norme de $\vec{v}_0$ constante mais l'angle α variable, trouver l'équation de la courbe dans le plan xOz séparant les points pouvant être atteints de ceux qui ne le seront jamais.

Résolution

Choix du système étudié : la masse m.

Repère : On se place dans un référentiel galiléen, lié au sol. On le munit d'un axe z dirigé vers le haut, avec un vecteur unitaire $\vec{e}_z$ dirigé vers le haut (on pourrait faire le choix inverse, certains signes changeraient dans la suite).

Bilan des forces exercées sur le système :

– poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$.

1. La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à la masse m, s'écrit

$$\vec{P} = m\vec{a} \text{ soit } m\vec{g} = m\vec{a} \text{ et donc } \vec{a} = \vec{g}$$

soit en explicitant les coordonnées de ces deux vecteurs,

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

La notation $\ddot{x}$ désigne une dérivée seconde par rapport au temps et cette égalité pourrait aussi s'écrire, de manière un peu plus lourde,

$$\begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

On intègre une première fois par rapport au temps,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -gt + b \end{pmatrix}$$

où a et b désignent des constantes d'intégration. On les détermine grâce à la condition initiale sur la vitesse, on sait qu'à $t = 0$,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

et donc $a = v_0 \cos\alpha$ et $b = v_0 \sin\alpha$, soit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

On intègre de nouveau pour avoir la position,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\alpha + c \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + d \end{pmatrix}$$

où c et d sont des constantes d'intégration. On sait qu'à $t = 0$, le projectile se trouve au point O, de coordonnées (0,0), on doit donc avoir $c = d = 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\alpha \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Pour obtenir l'**équation de la trajectoire** (z en fonction de x), il faut éliminer t, on peut exprimer t en fonction de x,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

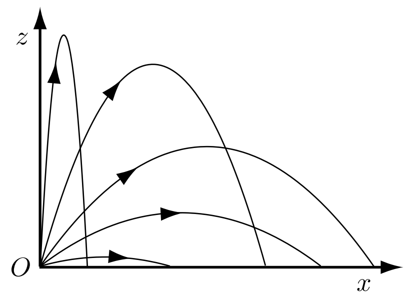
et remplacer dans l'expression de z, ce qui donne

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)\sin\alpha$$

soit

$$\boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + x\tan\alpha}$$

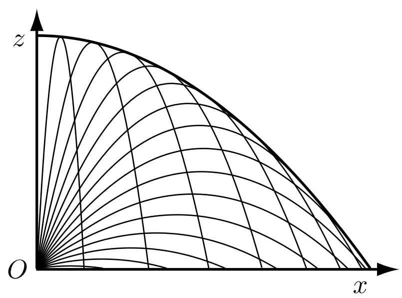
C'est l'équation d'une parabole.



2. La **portée du tir** est la distance au bout de laquelle le projectile atteint le sol. C'est la coordonnée x pour laquelle $z = 0$. Il faut résoudre $z = 0$, soit
$$0 = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$
La solution $x = 0$ ne nous intéresse pas, elle correspond au point de lancer du projectile, on sait déjà que la trajectoire passe par ce point. En divisant par x on trouve donc
$$0 = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{x}{\cos^2\alpha} + \tan\alpha$$
soit
$$x = \frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha\tan\alpha = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha$$
soit finalement, puisque $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)$,
$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$
Cette portée est maximale lorsque le sinus est maximal, c'est-à-dire lorsqu'il vaut 1 (pour $2\alpha = \pi/2$ soit $\alpha = \pi/4$), et la portée maximale vaut
$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

3. Connaissant la trajectoire
$$z = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$
on cherche la valeur maximale de z qui peut être atteinte. Pour cela, on cherche la valeur de x pour laquelle la dérivée de z s'annule (il s'agit bien d'un maximum car l'équation précédente décrit une parabole à la concavité tournée vers le bas). En dérivant l'équation précédente par rapport à x, on a
$$\frac{dz}{dx} = 0 = -\frac{g}{v_0^2}\frac{x}{\cos^2\alpha} + \tan\alpha$$
soit
$$x = \frac{v_0^2}{g}\tan\alpha\cos^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\alpha)$$
On remarque que l'altitude maximale est atteinte à la moitié de la portée du tir, comme on pouvait s'y attendre intuitivement. En reportant cette valeur dans la trajectoire, on trouve l'altitude au sommet de la trajectoire parabolique
$$z_{\text{sommet}} = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{v_0^4}{4g^2}\frac{\sin^2(2\alpha)}{\cos^2\alpha} + \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\alpha)\tan\alpha$$
Ne soyons pas effrayé par cette expression, elle se simplifie,
$$z_{\text{sommet}} = -\frac{v_0^2}{8g}\frac{\sin^2(2\alpha)}{\cos^2\alpha} + \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\alpha)\tan\alpha$$
puis en réutilisant $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)$,
$$z_{\text{sommet}} = -\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha + \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha$$
soit finalement
$$z_{\text{sommet}} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$$
Cette altitude est maximale lorsque le sinus vaut 1, pour $\alpha = \pi/2$ (tir à la verticale),
$$\boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

4. Soit un point de coordonnées (X, Z). Ce point peut-il être atteint par un lancer à la vitesse v_0 ? Cette question revient à se demander s'il existe une valeur de α pour laquelle l'équation
$$Z = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{X^2}{\cos^2\alpha} + X\tan\alpha$$
est vérifiée, X et Z étant fixés. En remarquant que
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$
l'équation à résoudre s'écrit
$$-\frac{g}{2v_0^2}X^2 - \frac{g}{2v_0^2}X^2\tan^2\alpha + X\tan\alpha - Z = 0$$
où l'inconnue est α ou mieux, $\tan\alpha$. C'est une équation du second degré en $\tan\alpha$, récrivons-là de manière plus explicite,
$$-\frac{gX^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha + X\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2}X^2 - Z = 0$$
Elle n'a de solution que si le discriminant Δ est positif,
$$\Delta = X^2 - 4\frac{gX^2}{2v_0^2}\left(\frac{g}{2v_0^2}X^2 + Z\right) \geq 0$$
Il faut donc que
$$\left(1 - \frac{g^2X^2}{v_0^4}\right) - \frac{2gZ}{v_0^2} \geq 0$$
Ceci est l'intérieur d'une parabole qu'on appelle **parabole de sûreté**, définie par
$$Z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}X^2$$
Elle est représentée ci-dessous, c'est l'enveloppe de toutes les trajectoires ayant une vitesse initiale donnée.



On retrouve le fait que pour $X = 0$, le point le plus haut qui puisse être atteint est à $Z = v_0^2/2g$ (ce qu'on avait troucé à la question **3**) De même, le point le plus lointain qui puisse être atteint en $Z = 0$ est à $X = v_0/g$ (voir la question **2**).

