

Quelques notions de cosmologie

Pierre Salati^{1,2}

¹ Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTh,
9 Chemin de Bellevue, B.P. 110, 74941 Annecy-le-Vieux Cedex

² Université Savoie Mont Blanc, B.P. 1104, 73011 Chambéry Cedex
`salati@lapth.cnrs.fr` & `pierre.salati@univ-smb.fr`
téléphone 04.50.09.16.69
site web <http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/salati/>



Plan du cours

- Mardi 22 Novembre 2016 – 2H + 2H – Le chapitre **I** est consacré au modèle de Friedmann–Lemaître. La métrique de Robertson et Walker décrit un espace homogène et isotrope à tout instant. Elle permet une description théorique de l'évolution de l'univers grâce à la relativité générale dont nous dériverons les équations. Nous étudierons ensuite la mise en évidence de l'accélération de l'expansion grâce aux supernovae de type Ia. Le diagramme (luminosité vs red-shift) des supernovae SNeIa indique que l'univers serait essentiellement gouverné aujourd'hui par une constante cosmologique ou bien par un fluide dont la pression est négative.

- Mardi 29 Novembre 2016 – 2H + 2H – Selon le modèle du big-bang, l'univers naît dans un état de température et densité virtuellement infinies. Le fluide qui l'emplit ne cesse ensuite de se refroidir et de se dilater. Il est en équilibre aux premiers instants mais évolue rapidement vers un état découplé. Ce comportement, caractéristique des explosions, est désormais bien compris. Les différentes populations de particules se découplent peu à peu,

à l’instar des neutrinos et, plus tard, du fond de rayonnement cosmologique micro-onde. Dans ce chapitre **II**, nous nous intéresserons à la thermodynamique du fluide de matière et de rayonnement présent lors des trois premières minutes. Nous passerons ensuite à la théorie de George Gamow selon laquelle l’hélium a été en grande partie synthétisé pendant cette période.

● Mardi 6 Décembre 2016 – 2H + 2H – Je programme à priori cette séance qui nous permettra tout d’abord de bien clore les chapitres précédents. Nous passerons ensuite au fond de rayonnement cosmologique micro-onde (CMB) dont l’existence a été prédite par Ralph Alpher, un étudiant de Gamow, et Robert Herman. La boule de feu qui emplissait l’univers aux premiers instants s’est refroidie et son vestige apparaît désormais sous la forme d’un rayonnement dont le spectre est celui d’un corps noir porté à une température de 2.73 K. Prédit en 1948, le CMB a été découvert de manière fortuite en 1964 par Arno Penzias and Robert Wilson, coiffant au poteau l’équipe de Robert Dicke de Princeton. Au début des années 1970, Harrison, Peebles, Yu et Zel’dovich réalisent que l’univers primordial doit être légèrement inhomogène à un niveau d’environ 10^{-5} à 10^{-4} . Le fluide primordial est en effet parcouru d’ondes de densité – en fait des ondes sonores – qui plus tard s’effondreront sous l’effet de leur propre poids afin de constituer les amas de galaxies. En 1977, Rashid Sunyaev calcule l’empreinte de ces inhomogénéités de densité sur le CMB. Ce rayonnement est presque parfaitement isotrope mais les ondes sonores primordiales doivent lui laisser de petites anisotropies dont les variations relatives de température sont de l’ordre de $\Delta T/T \sim 30 \mu\text{K}$. Elles seront découvertes en 1992 par John Mather et George Smoot grâce au satellite COBE. Le chapitre **III** constitue une introduction pédestre aux ondes de densité et inhomogénéités qui parcourent le fluide cosmique. Nous étudierons leur évolution et leur empreinte sur le CMB.

Chapitre I

Le modèle de Friedmann–Lemaître et l’expansion de l’univers

La possibilité d’un univers en expansion a été longtemps considérée comme une idée farfelue par Albert Einstein lui-même, qui a d’ailleurs introduit dans ses équations une constante cosmologique afin de bloquer toute expansion de l’espace. L’idée a été proposée par Alexandre Friedmann de Saint-Petersbourg en 1922 et par Georges Lemaître de Louvain en 1927 pour lesquels l’univers est en expansion sous l’effet d’une force d’origine gravitationnelle. Dans leur modèle, l’espace est homogène et isotrope à tout instant en sorte que la métrique de Robertson et Walker peut être employée dans les équations de la relativité générale. Nous les dériverons après avoir spécifié le contenu matériel de l’univers. Nous montrerons que plusieurs évolutions sont possibles et discuterons l’effet d’une éventuelle constante cosmologique.

Les observation de Edwin Hubble indiquent que l’espace se dilate et que les objets semblent nous fuir avec une vitesse proportionnelle à leur distance. Nous verrons qu’une autre interprétation est possible et étudierons comment certains objets appelés chandelles standards permettent de prolonger le diagramme de Hubble (luminosité vs red-shift) à de très grandes distances. Les supernovae de type Ia sont des sources très intenses dont la luminosité absolue est constante et permettent donc de paver l’espace. La détermination de leur distance de luminosité en fonction de leur décalage vers le rouge est un test cosmologique important que nous analyserons. Il a permis en 1998 [1] de montrer que l’expansion de l’espace est en train d’accélérer alors que l’on s’attendait au contraire. L’univers serait dominé par une constante cosmologique ou un fluide de pression négative.

1) Le bréviaire de l’abbé Lemaître.

L’univers apparaît étonnamment homogène sur des échelles de l’ordre d’une centaine de mégaparsecs. Il semble également isotrope d’où sa description grâce à la métrique de Robertson et Walker

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} , \quad (\text{I.1})$$

qui constitue le cadre géométrique du modèle cosmologique standard de Friedmann et de Lemaître. Plusieurs remarques s’imposent. Tout d’abord, l’intervalle de temps dt qu’une horloge au repos indique est égal à l’intervalle de temps propre $d\tau$. Le système de coordonnées (I.1) est donc en chute libre – ou plutôt en expansion libre – et le temps

cosmologique t se comporte exactement comme si la gravité était absente en vertu du principe d'équivalence. Ensuite, les coordonnées spatiales r , θ et ϕ permettent de repérer la position d'une étoile ou d'une galaxie sur la trame cosmique des coordonnées de Robertson et Walker – trame qui par ailleurs suit l'expansion de l'univers. Ce dernier évolue au gré des variations du facteur d'échelle $a(t)$. Les galaxies s'éloignent les unes des autres essentiellement parce que le réseau cosmique sur lequel elles reposent se dilate lui-même. A tout instant t , le taux d'expansion est défini par

$$H(t) = \frac{d \ln a}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} . \quad (\text{I.2})$$

Les coordonnées angulaires θ et ϕ ont leur signification euclidienne usuelle. La métrique de Robertson–Walker se comporte comme dans un espace plat à trois dimensions **vis à vis des petits déplacements perpendiculaires à la ligne de visée radiale**. En particulier, l'énergie que rayonne de manière isotrope une source ponctuelle se répartit sur une sphère dont la surface est toujours donnée par le terme conventionnel $S = 4\pi a^2 r^2$. Remarquons toutefois que le rayon de cette sphère – la distance physique entre son centre O et tout point M de sa surface – n'est égal au produit $a(t) \times r$ que dans un espace plat dont la courbure $k = 0$ – voir Fig. I.1. Dans ce cas, les surfaces méridiennes obtenues en fixant la longitude ϕ sont également des plans euclidiens. En faisant varier la colatitute θ à r fixé, le point M décrit un cercle méridien du pôle nord N en $\theta = 0$ jusqu'au pôle sud S en $\theta = \pi$. Lorsque la courbure $k > 0$, les surfaces méridiennes ne sont plus planes mais peuvent se concevoir comme les 2D surfaces d'hypersphères 3D s'étendant en direction d'une quatrième dimension spatiale de plongement. L'origine O de notre système de coordonnées devient alors le pôle nord de cette hypersphère. Les points N et S se retrouvent alors sur un cercle parallèle qui entoure le pôle nord O et qui délimite sur l'hypersphère une surface bombée dont l'aire est supérieure à la valeur euclidienne $\pi a^2 r^2$. L'univers a une géométrie sphérique et est fermé puisqu'un voyageur se déplaçant droit devant lui finirait toujours par revenir à son point de départ.

Problème n° I-1 – Niveau [1] : *Interpréter la coordonnée radiale r comme le rayon du cercle parallèle mentionné précédemment et projeté sur le plan équatorial de l'hypersphère. Prendre $a = 1$ et montrer qu'une augmentation dr engendre sur le point M le déplacement*

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} . \quad (\text{I.3})$$

Dans le cas hyperbolique où $k < 0$, il n'y a pas de plongement possible dans un espace euclidien de dimension supérieure. La surface englobée par le cercle parallèle est maintenant plus petite que dans le cas plat et chaque point se comporte comme une selle de cheval.

La métrique de Robertson–Walker (I.1) est associée aux connexions affines

$$\Gamma_{ij}^0 = -H g_{ij} \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = H \delta_j^i , \quad (\text{I.4})$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = - (1 - kr^2) r \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = - (1 - kr^2) r \sin^2 \theta , \quad (\text{I.5})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} , \quad (\text{I.6})$$

et

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = - \sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cotan \theta . \quad (\text{I.7})$$

Problème n° I-2 – Niveau [3] : Considérons le Lagrangien effectif construit à partir de l'élément métrique $d\tau^2$

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \quad (\text{I.8})$$

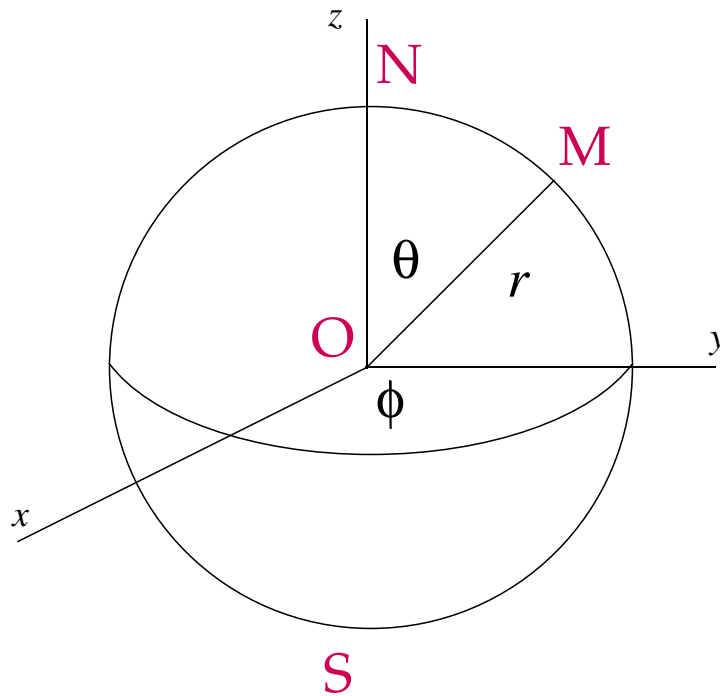
où $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dp$ est la dérivée de la variable x^μ par rapport au paramètre p qui joue dans ce problème le rôle d'un temps effectif. Montrer que les équations du mouvement associées à \mathcal{L}

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (\text{I.9})$$

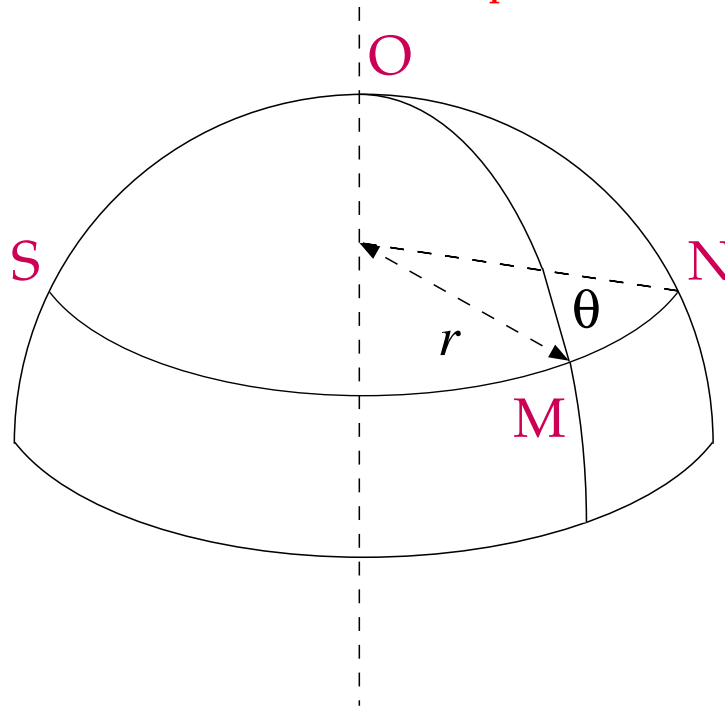
conduisent directement aux géodésiques

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0 . \quad (\text{I.10})$$

A partir de la métrique de Robertson–Walker, dériver les connexions affines (I.4), (I.5), (I.6) et (I.7).



L'univers euclidien correspond à $k = 0$.



Le cas sphérique est associé à $k > 0$.

Figure I.1: Les coordonnées sphériques r , θ et ϕ ont leur signification euclidienne usuelle lorsque l'espace est plat – $k = 0$. En particulier, les surfaces méridiennes définies par une valeur constante de ϕ sont des plans. Lorsque l'univers est sphérique avec $k > 0$, chacun de ces plans méridiens devient la surface d'une hypersphère 3D dont le pôle nord est maintenant l'origine O de notre système de coordonnées.

Problème n° I-3 – Niveau [3] : Le tenseur de courbure de Riemann–Christoffel s'exprime en fonction des connexions affines $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ grâce à

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\beta\eta}^{\alpha} , \quad (\text{I.11})$$

alors que le tenseur de Ricci correspond à la contraction $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$. Montrer que dans le cadre du modèle de Friedmann–Lemaître les seuls éléments non-nuls du tenseur de Ricci sont

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{et} \quad R_{ij} = g_{ij} \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2} \right\} . \quad (\text{I.12})$$

2) Constante cosmologique et expansion de l'univers.

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'univers décrite par le tenseur de Ricci au tenseur impulsion–énergie $T_{\mu\nu}$ de la matière à l'origine du champ gravitationnel

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (\text{I.13})$$

Einstein a inclus le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ comme une correction aux relations initiales destinée à éviter l'expansion de l'univers. Cette **constante cosmologique** peut être interprétée de deux manières différentes. Tout d'abord, elle peut être introduite comme une constante fondamentale de la Nature au même titre que la constante G de gravitation de Newton. En ce cas, elle doit rester dans la partie gauche de l'équation (I.13) qui traite de la géométrie de l'espace–temps. La constante Λ a les dimensions de l'inverse d'une longueur au carré L_{Λ}^{-2} où

$$L_{\Lambda} = \sqrt{3} h^{-1} \text{Gpc} = 5.3 \times 10^{27} h^{-1} \text{cm} , \quad (\text{I.14})$$

à comparer avec la valeur de l'échelle de Planck

$$L_P = \left\{ \frac{\hbar G}{c^3} \right\}^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm} . \quad (\text{I.15})$$

Suivant cette approche, L_P et L_{Λ} sont toutes deux les échelles fondamentales de la gravitation. L'alternative consiste à interpréter la constante cosmologique comme le tenseur impulsion–énergie d'une composante emplissant l'univers et contribuant à son évolution au même titre que les baryons ou les photons. Le tenseur $\Lambda g_{\mu\nu}$ doit donc apparaître dans

le membre de droite de la relation (I.13) comme une contribution au tenseur impulsion–énergie égale à

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} . \quad (\text{I.16})$$

Le tenseur impulsion–énergie d’un fluide de densité d’énergie ρ et de pression P peut s’écrire

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho) U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} , \quad (\text{I.17})$$

où $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ désigne la 4–vitesse. La constante cosmologique s’interprète dès lors comme un fluide – au repos par rapport aux coordonnées de Robertson et Walker – dont la pression P_Λ et la densité d’énergie ρ_Λ sont reliées par

$$-P_\Lambda = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} . \quad (\text{I.18})$$

Lorsque $\Lambda > 0$, la densité d’énergie est positive alors que la pression est de manière à priori absurde négative. Pour un fluide réparti uniformément, une telle pression négative engendre un travail de dilatation positif qui a tendance à nourrir l’expansion et donc à l’accélérer par une phase d’inflation exponentielle. De manière paradoxale également, la pression négative est source de confinement lorsque le fluide est concentré maintenant dans une région limitée de l’espace. Le vieux modèle du sac de quarks du MIT est fondé sur l’existence au sein des nucléons d’une densité d’énergie du vide $B > 0$. La pression associée $P_\Lambda = -B$ est négative et contrebalance la pression cinétique de Fermi des quarks, réalisant ainsi leur confinement. A cause de ces propriétés si bizarres, un tel fluide dont le tenseur impulsion–énergie est donné par la relation (I.16) est dénommé quintessence ou cinquième élément tant il se comporte à l’opposé de ce que nous connaissons de notre environnement quotidien. Nous verrons ultérieurement qu’un champ scalaire φ fournit un modèle plausible de quintessence.

Nous sommes désormais prêts à dériver les équations du modèle de Friedmann–Lemaître qui décrivent l’expansion de l’univers. Nous supposons ici que le fluide cosmique est associé au tenseur impulsion–énergie donné par l’équation (I.17) auquel à la fois la matière et la quintessence – ou constante cosmologique – contribuent avec

$$\rho = \rho_M + \rho_\Lambda . \quad (\text{I.19})$$

La matière est non–relativiste et donc de pression nulle alors que $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Au cours de l’expansion, la matière est diluée et sa densité d’énergie ρ_M décroît comme a^{-3} alors que la constante cosmologique ρ_Λ ne varie pas.

Problème n° I-4 – Niveau [2] : Dériver l'évolution du facteur d'échelle $a(t)$ à partir du tenseur de Ricci (I.12) et de la relation (I.17). Montrer que la composante temps-temps des équations d'Einstein (I.13) se traduit par

$$\left\{ \frac{\dot{a}}{a} \right\}^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} , \quad (\text{I.20})$$

alors que les composantes spatiales conduisent à

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \{ \rho + 3P \} . \quad (\text{I.21})$$

Dans notre système d'unités, la vitesse de la lumière est $c = 1$.

L'évolution de a est complètement déterminée par l'équation fondamentale (I.20). Aujourd'hui, cette relation s'écrit

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho^0 - \frac{k}{a_0^2} \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_C^0 . \quad (\text{I.22})$$

Elle permet de définir la densité de fermeture ρ_C^0 comme la valeur critique pour laquelle l'univers est plat et où $k = 0$. La densité actuelle ρ_M^0 de matière peut être exprimée par rapport à cette densité critique ρ_C^0

$$\Omega_M = \rho_M^0 / \rho_C^0 . \quad (\text{I.23})$$

Il en va de même pour la constante cosmologique

$$\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda / \rho_C^0 . \quad (\text{I.24})$$

Nous discuterons les différentes évolutions possibles de l'univers en fonction de ces paramètres fondamentaux Ω_M et Ω_Λ qui sont en passe d'être déterminés avec précision grâce à l'observation du fond de rayonnement micro-onde ainsi que par les recherches des supernovae SNeIa. La courbure Ω_K est définie par

$$\Omega_K = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} . \quad (\text{I.25})$$

L'univers est sphérique si $\Omega_K < 0$. C'est le cas dans la région située au-dessus de la droite $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ dans le diagramme $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ de la figure I.6. L'évolution du facteur d'échelle $a(t)$ se réduit à un simple problème de mécanique du point matériel le long d'un axe. Il s'agit en fait de déterminer la position $x = a(t)/a_0$ d'une particule se mouvant sur une droite en fonction du temps $\tau = H_0 t$.

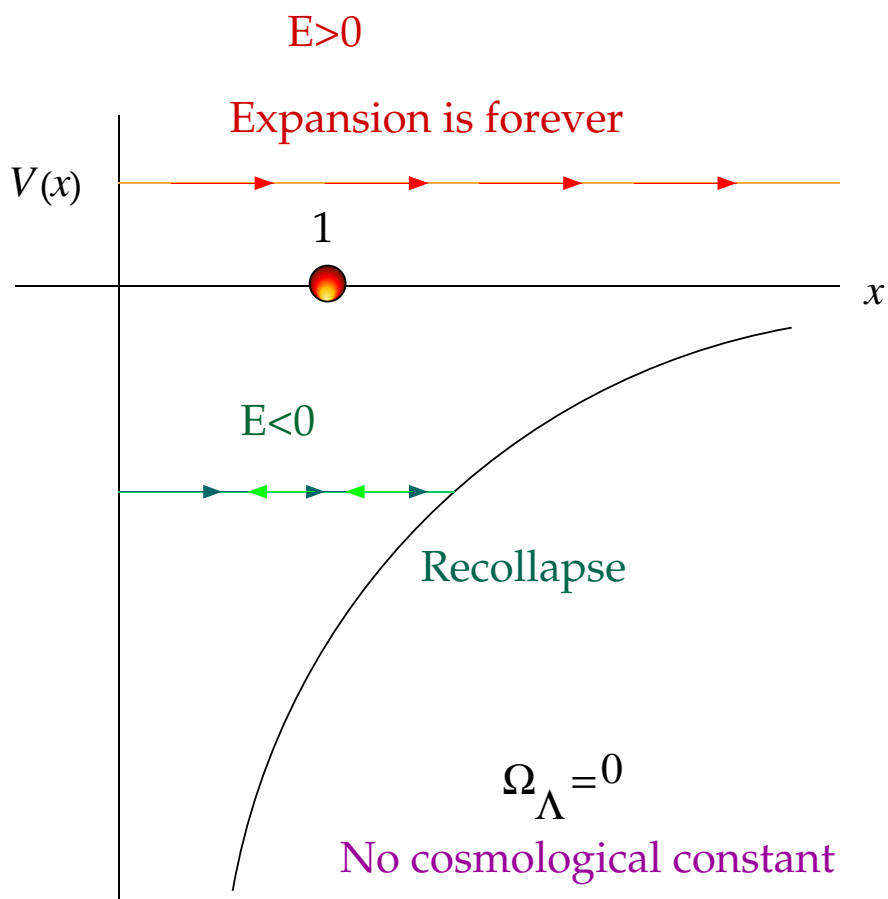


Figure I.2: Ce cas correspond à une constante cosmologique nulle avec $\Omega_{\Lambda} = 0$. Le sort de l'univers dépend uniquement de son contenu de matière $\Omega_M = 1 - E$. Une valeur négative de E correspond à une trajectoire qui croise V . La particule fictive du texte rebondit en arrière et l'univers se recontracte. Pour $E \geq 0$, l'expansion est éternelle.

Problème n° I-5 – Niveau [1] : Montrer que la relation (I.20) peut encore s'écrire sous la forme

$$\dot{x}^2 + V(x) = E , \quad (\text{I.26})$$

où $\dot{x} = dx/d\tau$ et $E \equiv \Omega_K$. Dériver le potentiel effectif que ressent la particule

$$V(x) = -\frac{\Omega_M}{x} - \Omega_\Lambda x^2 . \quad (\text{I.27})$$

La relation (I.26) exprime la conservation de l'énergie mécanique de notre particule fictive. L'évolution de x dépend de la forme du potentiel effectif $V(x)$ et plusieurs cas sont à distinguer en fonction de valeurs de Ω_Λ .

En l'absence de constante cosmologique – $\Omega_\Lambda = 0$ – le potentiel V est képlérien. L'évolution du facteur d'échelle est présentée dans la figure I.2. Le destin de l'univers dépend du signe de Ω_M . Pour $\Omega_M > 1$ et donc $E < 0$, l'univers est sphérique et finira par se recontracter dans le futur. Le facteur d'échelle a évolue en décrivant une cycloïde. Lorsque maintenant $\Omega_M = 1$ soit donc $E = 0$, l'univers est plat et se dilate à jamais. Finalement, pour $\Omega_M < 1$ ou $E > 0$, l'expansion est également éternelle et la géométrie est hyperbolique. Remarquons que par définition Ω_M est positif.

Lorsque la constante cosmologique est négative, le potentiel fictif V augmente de $-\infty$ pour $x = 0$ jusqu'à $+\infty$ quand x est grand. Quelle que soit la valeur de l'énergie effective E , la trajectoire rebondit sur le potentiel et l'univers se recontracte. Il peut cependant atteindre sa taille actuelle $x = 1$ où $V = E - 1$. Dans le cas de la figure I.3, les valeurs de Ω_Λ et Ω_M ont été choisies de manière à ce que le potentiel soit nul en $x = 1$ alors que $E = 1$. Pour de fortes valeurs de Ω_M et de $(-\Omega_\Lambda)$, le potentiel $V(x)$ devient terriblement pentu. Le mouvement de notre particule fictive est si rapide que l'âge de l'univers devient inférieur à la limite de ~ 8 Gyr provenant des naines blanches du disque galactique – voir plus loin la discussion de l'équation (I.35).

Finalement, pour $\Omega_\Lambda > 0$, le potentiel V présente un maximum valant

$$V_{\text{Max}} = -\frac{3}{2^{2/3}} \Omega_M^{2/3} \Omega_\Lambda^{1/3} , \quad (\text{I.28})$$

en $x_{\text{Max}} = (\Omega_M/2\Omega_\Lambda)^{1/3}$. Si l'énergie effective E excède V_{Max} , notre particule représentative grimpe jusqu'au sommet M du potentiel et bascule de l'autre côté. Après une période de décélération correspondant à $x < x_{\text{Max}}$, l'expansion de l'univers se met à s'emballer. Par contre dans le cas où $E < V_{\text{Max}}$, l'univers se recontracte. Cette éventualité correspond à

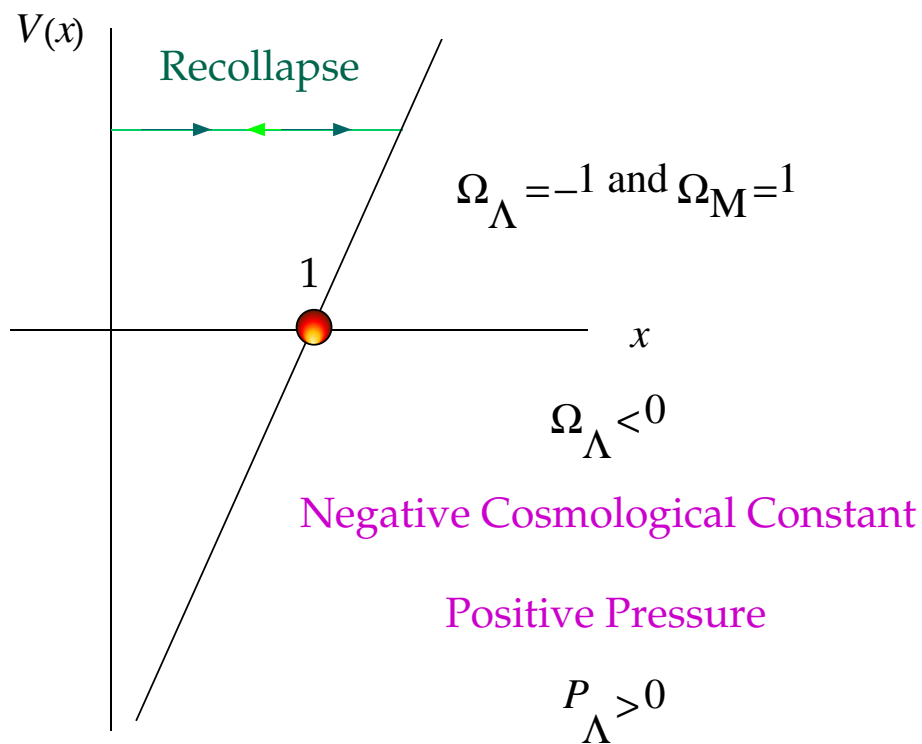


Figure I.3: Si la constante cosmologique est négative, la pression associée P_{Λ} est positive et inhibe l'expansion en forçant l'univers à se recontracter après une phase de dilatation.

Positive Cosmological Constant

$$\Omega_{\Lambda} > 0$$

Negative Pressure

$$P_{\Lambda} < 0$$

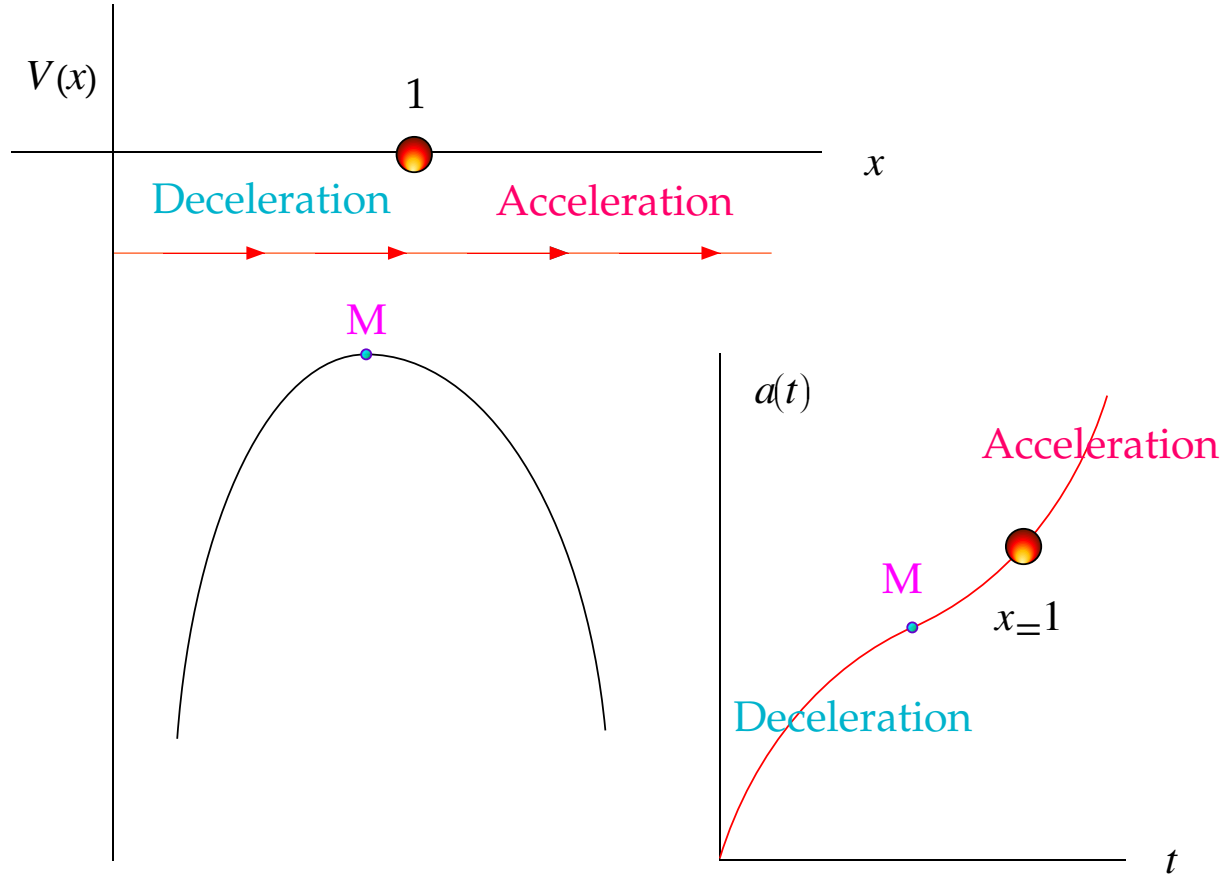


Figure I.4: Dans le cas d'une constante cosmologique positive, la pression associée négative P_{Λ} est le moteur de l'expansion. Après une période de décélération durant laquelle le sommet M du potentiel effectif est atteint, l'univers bascule de l'autre côté de la colline et se met à dévaler la pente. Suivant ce scénario, nous sommes aujourd'hui en $x = 1$ dans une phase d'accélération avec $\ddot{a} > 0$.

la région située sous la ligne correspondante de la figure I.6. L'univers est aujourd'hui en phase d'accélération si la condition $x_{\text{Max}} < 1$ est remplie de manière à ce que la particule représentative devale la pente lorsque $x = 1$. Cela se traduit par $\Omega_{\Lambda} > \Omega_{\text{M}}/2$. Remarquons finalement la présence d'une région grisée dans le coin supérieur gauche de la figure I.6 avec l'inscription No Big Bang. Dans cette partie du diagramme $(\Omega_{\text{M}}, \Omega_{\Lambda})$, deux conditions contradictoires tentent d'être satisfaites en même temps. D'une part, l'univers doit se recontracter car l'énergie E n'excède pas la valeur maximale V_{Max} du potentiel. D'autre part – parce que cette région grisée est au dessus de la ligne de démarcation $\Omega_{\Lambda} = \Omega_{\text{M}}/2$ – nous devrions être aujourd'hui en phase d'accélération et la position $x = 1$ devrait se trouver de l'autre côté de la colline, une région qui n'est pas atteinte à cause du rebond sur le potentiel. Cette région grisée correspond à une configuration dans laquelle l'univers tel que nous le connaissons ne peut exister.

3) A la recherche des supernovae SNeIa.

Un test cosmologique crucial est la détermination de la relation entre distance de luminosité d_L et décalage vers le rouge z de chandelles standards. Dans un espace plat et statique, une source de luminosité absolue L brille à la distance r avec la luminosité apparente l telle que

$$L = 4\pi r^2 l . \quad (\text{I.29})$$

La même relation est utilisée pour définir d_L en cosmologie lorsque l'espace n'est plus euclidien et qu'il se dilate au cours du temps. Considérons une source lointaine – un quasar ou une galaxie – de luminosité absolue L . Cet objet est au repos par rapport à la trame en expansion des coordonnées de Robertson–Walker. Il est situé à la co-distance r_1 de la Terre. La quantité de lumière émise par cette source à l'instant t_1 et pendant l'intervalle de temps δt_1 représente une énergie totale $\delta W_e = L \delta t_1$. Cette énergie est rayonnée de manière isotrope en sorte que lorsqu'elle atteint aujourd'hui la Terre, elle s'est répartie sur une sphère dont la surface est $4\pi r_1^2 a_0^2$. La luminosité apparente l est par définition la quantité d'énergie reçue par unité de temps et par unité de surface d'un télescope. L'énergie δW_e émise par le passé pendant le laps de temps δt_1 est observée maintenant sur la durée plus longue δt_0 donnée par

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = (1 + z) = \frac{a_0}{a_1} . \quad (\text{I.30})$$

L'espace se dilatant d'un facteur a_0/a_1 , les ondes électromagnétiques sont étirées alors qu'elles se propagent dans le vide intergalactique. Toutes les longueurs d'onde sont alors décalées vers le rouge et la quantité d'énergie qui est collectée à l'arrivée est également

réduite du même facteur $(1+z)$. Dans la mesure où la luminosité apparente peut s'écrire

$$l = \left\{ \frac{\delta W_e}{4\pi r_1^2 a_0^2} \right\} \frac{\delta t_1}{\delta t_0} \frac{1}{(1+z)} , \quad (\text{I.31})$$

nous dérivons une distance de luminosité égale à

$$d_L = r_1 a_0 (1+z) , \quad (\text{I.32})$$

pour une source située à la co-distance r_1 .

Nous aimerions maintenant établir la relation entre la distance de luminosité d_L d'une source et son décalage vers le rouge z .

Problème n° I-6 – Niveau [2] : La relation entre le facteur d'échelle réduit $x = a(t)/a_0$ et le décalage vers le rouge – **ou encore redshift** – que présente la lumière émise à l'instant t est précisée dans l'équation (I.30). En partant des relations (I.26) et (I.27), montrer que la variation dz du redshift s'écrit en fonction de dt

$$H_0 dt = \frac{-dz}{(1+z) \sqrt{F(z)}} , \quad (\text{I.33})$$

où la fonction $F(z)$ est définie par

$$F(z) = (1+z)^2 (1+z \Omega_M) - z(2+z) \Omega_\Lambda . \quad (\text{I.34})$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer l'âge de l'univers sous la forme d'une intégrale sur le redshift

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = H_0^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{F(z)}} . \quad (\text{I.35})$$

Si Ω_M augmente ou si Ω_Λ décroît en devenant de plus en plus négatif, la croissance subséquente de la fonction $F(z)$ conduit à des valeurs faibles de l'âge de l'univers. La partie inférieure droite de la figure I.6 est alors exclue – voir la portion correspondante grisée – car la valeur de t_0 n'y dépasse pas la limite inférieure de 8 Gyr déjà mentionnée.

Un photon émis à l'instant t_1 est reçu aujourd'hui à l'instant t_0 . La co-distance de la source est r_1 . La propagation de la lumière est caractérisée par un intervalle de temps propre $d\tau = 0$ en sorte que

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (\text{I.36})$$

Problème n° I-7 – Niveau [1] : Montrer que le membre de droite de l'égalité (I.36) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(\sqrt{k} r_1) & \quad k > 0 \text{ (spherical)} \\ r_1 & \quad k = 0 \text{ (flat)} \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh^{-1}(\sqrt{-k} r_1) & \quad k < 0 \text{ (hyperbolic)} \end{aligned}$$

Montre ensuite que le membre de gauche de cette égalité (I.36) se transforme en

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} . \quad (\text{I.37})$$

Montrer finalement que lorsque l'espace n'est pas plat, i.e., pour $k \neq 0$

$$\frac{\sqrt{\pm k}}{a_0 H_0} = \sqrt{|\Omega_K|} . \quad (\text{I.38})$$

Nous sommes désormais prêts à dériver la relation entre d_L et z . Dans un espace plat, nous pouvons immédiatement affirmer que

$$d_L = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} . \quad (\text{I.39})$$

Dans le cas d'un univers sphérique ($k > 0$) ou hyperbolique ($k < 0$), le calcul est un zeste moins évident. Il est bon de montrer tout d'abord que

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_K|}} \sqrt{|k|} r_1 , \quad (\text{I.40})$$

de manière à dériver la relation conventionnelle

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_K|}} \mathcal{S} \left\{ \sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} \right\} , \quad (\text{I.41})$$

où $\mathcal{S}(x) = \sin x$ pour une géométrie sphérique ($k > 0$) et $\mathcal{S}(x) = \sinh x$ dans le cas d'un univers hyperbolique ($k < 0$). Les paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ entrent en jeu via Ω_K et la fonction $F(z)$. Si nous étendons la définition de $\mathcal{S}(x)$ au cas plat ($k = 0$) avec une valeur égale à x , l'équation (I.39) s'obtient directement à partir de la relation générale (I.41) en remarquant que le terme de courbure $\sqrt{|\Omega_K|}$ se simplifie. Nous pouvons appliquer nos calculs au cas où la constante cosmologique est nulle.

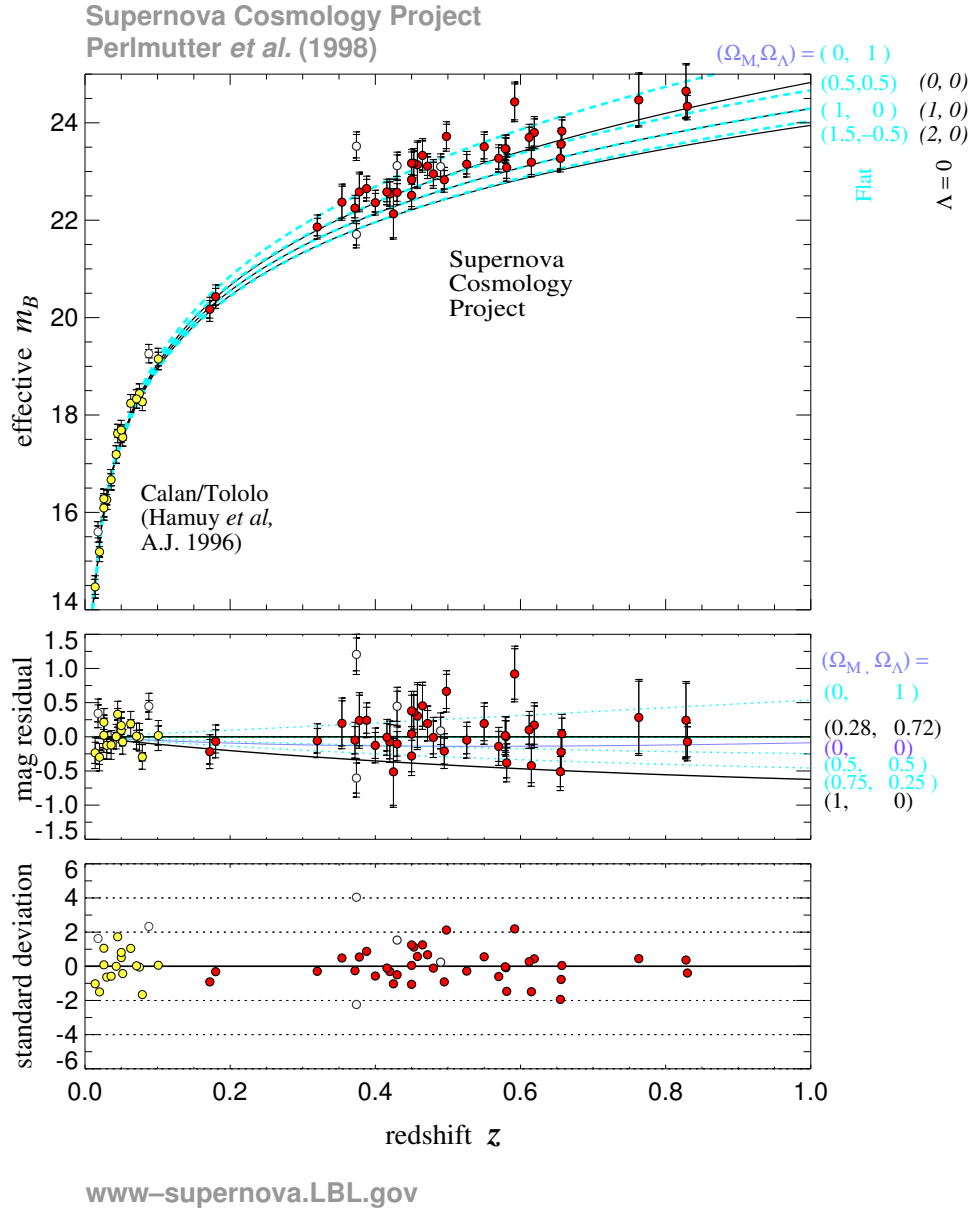


Figure I.5: La magnitude apparente de deux échantillons de supernovae SNeIa est présentée en fonction du décalage vers le rouge des objets. Le groupe en jaune correspond à des sources locales alors que les points rouges se réfèrent à des supernovae lointaines situées à des distances cosmologiques [1].

Problème n° I-8 – Niveau [3] : Montrer que lorsque $\Omega_\Lambda = 0$, la distance de luminosité s'exprime en fonction du redshift z grâce à

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{\left\{ q_0 z + (q_0 - 1) \left(-1 + \sqrt{1 + 2 q_0 z} \right) \right\}}{q_0^2}, \quad (\text{I.42})$$

où le paramètre de décélération $q_0 = \Omega_M / 2$.

La mesure de la relation entre d_L et z permet de déterminer une certaine combinaison des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ .

Problème n° I-9 – Niveau [1] : Près de la Terre, la relation (I.41) peut être développée en une série faisant intervenir z . En écrivant la fonction $F(z)$ au premier ordre en z , montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{F(z)}} \simeq 1 + \left\{ \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2} - 1 \right\} z + \dots \quad (\text{I.43})$$

Lorsque l'argument x est petit, l'égalité $\sin x \simeq x \simeq \sinh x$ est pratiquement vérifiée. Exprimer la distance de luminosité d_L jusqu'au second ordre en z de manière à obtenir

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left\{ z + (1 - q_0) \frac{z^2}{2} + \dots \right\}, \quad (\text{I.44})$$

où le paramètre q_0 est maintenant égale à la combinaison $\Omega_M / 2 - \Omega_\Lambda$.

Parce que les mesures vont au-delà de notre voisinage immédiat – des valeurs du redshift allant jusqu'à $z \sim 0.8$ sont obtenues – la bonne combinaison de paramètres qui entre en jeu dans notre problème est plutôt $(\Omega_M - \Omega_\Lambda)$. Dans le panneau supérieur de la figure I.5, la dégénérescence est manifeste pour $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.5, 0.5)$ et $(0, 0)$ ainsi que pour les cas $(1.5, -0.5)$ et $(2, 0)$.

La détermination de la distance d_L requiert la mesure de la luminosité apparente l ainsi que la connaissance de la luminosité absolue L . Il faut donc choisir une classe d'objets qui émettent toujours la même quantité d'énergie. De telles sources s'appellent des **chandelles standards** et leurs caractéristiques – magnitude absolue, durée d'émission et spectre – sont supposées être indépendantes de l'espace et du temps. Les supernovae

Supernova Cosmology Project
Perlmutter *et al.* (1998)

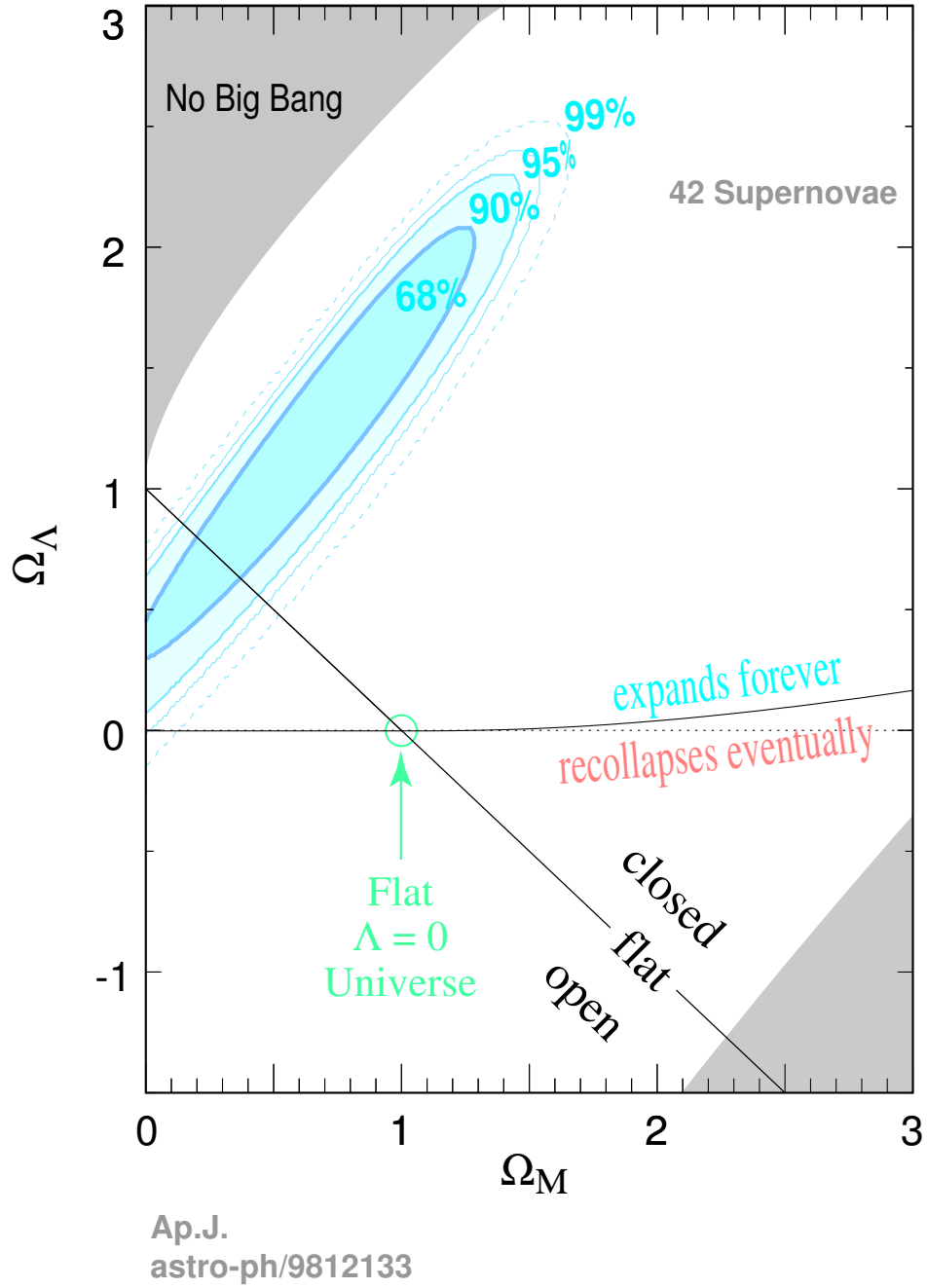


Figure I.6: Implications des observations des supernovae sur les valeurs des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ [1].

SNeIa sont des étoiles naines blanches qui accrètent le gaz contenu dans l’enveloppe stellaire étendue d’un compagnon. Lorsque la masse de la naine blanche atteint le seuil fatidique de Chandrasekhar – soit $\sim 1.4 M_\odot$ – les électrons qui assurent la pressurisation de l’astre deviennent ultra-relativistes et l’indice adiabatique Γ_1 du matériau interne passe en dessous de la valeur critique $4/3$. L’équilibre hydrostatique de la naine blanche devient alors instable et son coeur s’effondre. Densité et température augmentent très rapidement jusqu’à ce que le carbone et l’oxygène entrent en fusion thermonucléaire. Dans les conditions dégénérées qui règnent au centre de l’étoile, la pression dépend peu de la température et cette dernière n’étant plus régulée par la gravité, la réaction s’emballe et devient explosive. Une onde de choc et de combustion se propage alors à travers l’étoile à des vitesses subsoniques. Les simulations numériques semblent indiquer en effet qu’une telle déflagration du carbone est plus à même d’expliquer la courbe de lumière et les abondances finales mesurées qu’une détonation supersonique qui produirait presque exclusivement du fer. Puisque la masse qui fusionne est toujours donnée par la valeur critique de Chandrasekhar, on s’attend à ce que les supernovae SNeIa soient de bonnes chandelles standards. Pendant l’explosion, la luminosité de pic atteint $10^{10} L_\odot$. La supernova devient aussi brillante que la galaxie hôte qui l’abrite et elle est alors visible jusqu’à des distances cosmologiques. Située à $z = 0.4$, elle est en effet détectable en 10 minutes sur un télescope de 2.5 m de diamètre. L’événement dure un mois environ. La détection des supernovae cosmologiques est possible en surveillant en permanence des galaxies lointaines et en comparant les images collectées jour après jour.

L’observation permet de déterminer la magnitude apparente m ainsi que le redshift z des sources. La relation entre d_L et z permet d’atteindre les paramètres cosmologiques tout en s’affranchissant de notre méconnaissance de la constante de Hubble H_0 . La relation (I.41) peut en effet s’écrire

$$d_L = \frac{c}{H_0} \mathcal{G} \{z, \Omega_M, \Omega_\Lambda\} \quad , \quad (\text{I.45})$$

où la fonction \mathcal{G} ne dépend que du redshift z et des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ . Pour de petits décalages vers le rouge, cette expression se simplifie en

$$\mathcal{G} \{z, \Omega_M, \Omega_\Lambda\} \simeq z + \left\{ \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2} + 1 \right\} \frac{z^2}{2} \quad . \quad (\text{I.46})$$

La magnitude apparente m est définie à partir de la luminosité l via

$$m = -2.5 \lg_{10} l + C \quad , \quad (\text{I.47})$$

où C est une constante. La magnitude absolue M correspond à la valeur qu’aurait m si l’on plaçait la source à la distance canonique de 10 pc. Magnitudes absolue M et apparente m sont donc liées par

$$m - M = 5 \lg_{10} d_L - 5 \quad , \quad (\text{I.48})$$

où la distance de luminosité d_L est exprimée en parsecs [pc].

Problème n° I-10 – Niveau [1] : Montrer que la magnitude apparente s'exprime comme la somme

$$m = 5 \lg_{10} \{\mathcal{G}\} + M + 5 \lg_{10} \left\{ \frac{c}{H_0} (10 \text{ Gpc})^{-1} \right\} + 45 . \quad (\text{I.49})$$

Le premier terme dans le membre de droite de l'équation (I.49) n'est fonction que du redshift z et des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ . Les autres contributions se comportent comme la magnitude effective constante

$$\mathcal{M} = M + 5 \lg_{10} \left\{ \frac{c}{H_0} (10 \text{ Gpc})^{-1} \right\} + 45 , \quad (\text{I.50})$$

qui dépend à la fois de la magnitude absolue M de la classe de chandelles standards choisie et de la constante de Hubble H_0 . Les recherches de supernovae locales permettent de calibrer leur luminosité absolue M – voir les points jaunes dans les mesures de la figure I.5. La distance des objets proches peut être déterminée grâce à d'autres estimateurs. Puisque dans notre voisinage immédiat la relation m - z se simplifie en

$$m = 5 \lg_{10} z + \mathcal{M} , \quad (\text{I.51})$$

la magnitude \mathcal{M} peut être mesurée. L'analyse d'un échantillon de supernovae proches permet donc d'atteindre leur magnitude absolue M et ainsi la constante de Hubble H_0 . Fort heureusement, ces difficultés n'affectent en rien la détermination d'un éventuel écart entre le comportement de la magnitude apparente m et la loi en $\lg_{10} z$ susceptible d'apparaître à haut redshift. Aux distances cosmologiques, la relation (I.51) devient

$$m = \mathcal{M} + 5 \lg_{10} z + 5 \lg_{10} \left\{ 1 + \left(\Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2} + 1 \right) \frac{z}{2} + \dots \right\} . \quad (\text{I.52})$$

Le second groupe de points rouges de la figure I.5 est constitué de supernovae lointaines dont le redshift est $z \sim 0.4 - 0.8$. Dans cette région, les paramètres Ω_M et Ω_Λ entrent en jeu dans la courbe reliant d_L à z . Nous avons précédemment montré que l'observation des supernovae contraignait la différence $\Omega_\Lambda - \Omega_M$. C'est pourquoi la région bleue permise par les mesures du Supernova Cosmology Project Collaboration – voir figure I.6 – a cette forme oblongue si caractéristique. La collaboration High- z supernova search team obtient

$\Omega_M(\Lambda = 0) = -0.35 \pm 0.18$ et $\Omega_M(\Omega_K = 0) = 0.24 \pm 0.1$ alors que le Supernova Cosmology Project mesure [1] $1.3\Omega_M - \Omega_\Lambda \simeq -0.4 \pm 0.2$ et

$$\Omega_M(\Omega_K = 0) = 0.28 \begin{array}{c} +0.08 \\ -0.09 \end{array} \text{ (stat)} \begin{array}{c} +0.05 \\ -0.04 \end{array} \text{ (syst)} . \quad (\text{I.53})$$

Un univers plat uniquement constitué de matière – $\Omega_M = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$ – est fortement exclu. L’observation à 3σ d’une valeur positive pour Ω_Λ est très excitante et constitue un défi à notre entendement car une telle composante n’a pas été prédite. Les observations de WMAP confortent le modèle d’un univers plat contenant $\sim 30\%$ de matière ainsi que $\sim 70\%$ d’une composante complètement inconnue se comportant comme une constante cosmologique ou un fluide de quintessence. Cette énergie noire serait ainsi la source principale de gravité au niveau cosmologique.

References

- [1] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [2] P. J. Steinhardt, L. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999).

Chapitre II

Introduction à la nucléosynthèse primordiale

Le modèle standard du big-bang repose sur trois observations fondamentales. Edwin Hubble a mis en évidence la fuite des galaxies, montrant ainsi que l'univers est en expansion. Arno Penzias and Robert Wilson ont découvert un fond de rayonnement radio d'origine cosmologique, vestige de la boule de feu primordiale. Finalement l'hélium, qui contribue pour le quart de la matière ordinaire – dite baryonique – en masse, n'a pas été synthétisé dans les étoiles. La majeure partie s'est formée au tout début, pendant les trois premières minutes. Ce chapitre présente succinctement les mécanismes de cette nucléosynthèse primordiale à l'issue de laquelle l'hydrogène initial est transmuté en éléments légers allant du deutérium au lithium. L'accord entre les prédictions de la théorie et les abondances observées dans les objets les plus vieux est remarquable. Il constitue un succès important du modèle standard du big-bang.

1) Le plasma primordial.

Le cadre dans lequel la nucléosynthèse primordiale se déroule est assez bien compris. Aux tout premiers instants, l'univers est constitué d'un gaz extrêmement chaud et dense. La matière telle que nous la connaissons aujourd'hui existait à l'époque sous une forme totalement dissociée. Les particules qui sont synthétisées à grand peine dans de gigantesques accélérateurs tels le LHC existaient alors à l'état endémique, sans cesse s'annihilant entre elles et se reformant à partir d'autres espèces, tant la température était élevée.

1.1) Un peu de thermodynamique.

Considérons une population de particules que nous noterons de manière générique par A . Au moment où se déroule la nucléosynthèse primordiale, nous serons essentiellement concernés par les photons, les neutrinos ainsi que par les électrons et leurs antiparticules, les positrons. Les collisions sont si nombreuses que les diverses espèces se thermalisent entre elles et ont la même température T . De plus, l'asymétrie entre matière et antimatière est négligeable en première approximation, de sorte que la densité des particules A est égale à celle de leurs antipartenaires \bar{A} . Le potentiel chimique μ_A affecté au gaz des particules A est donc identique à $\mu_{\bar{A}}$, celui des antiparticules \bar{A} . De surcroît, les réactions

d'annihilation et de recréation telles que

$$A + \bar{A} \rightleftharpoons e^- + e^+ , \quad (\text{II.1})$$

ou encore

$$3\gamma \rightleftharpoons e^- + e^+ \rightleftharpoons 2\gamma , \quad (\text{II.2})$$

sont si rapides que l'équilibre chimique est atteint, avec

$$\mu_A + \mu_{\bar{A}} = \mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 2\mu_\gamma = 3\mu_\gamma . \quad (\text{II.3})$$

Electrons et positrons sont susceptibles de s'annihiler pour donner deux photons. Il est aussi possible d'obtenir trois photons dans l'état final. Lorsque ces réactions sont à l'équilibre, le potentiel chimique des photons est nul. Le spectre du rayonnement électromagnétique est alors celui d'un corps noir, régit par la distribution de Planck. Le potentiel chimique μ_A est également l'opposé de $\mu_{\bar{A}}$. Cette dernière relation, assortie de l'absence d'asymétrie entre matière et antimatière, conduit au fait que les potentiels chimiques de toutes les espèces s'annulent. La densité des particules A est alors donnée par la statistique de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac. Elle s'exprime par l'intégrale sur l'impulsion \vec{p} de la fonction de distribution correspondante

$$n_A = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} g_A \left\{ e^{E/kT} - \epsilon \right\}^{-1} , \quad (\text{II.4})$$

où ϵ vaut 1 quand le spin de la particule est entier (boson) alors que le cas $\epsilon = -1$ correspond à un spin demi-entier (fermion). L'énergie E correspondant à l'impulsion \vec{p} est reliée à la masse M des particules A par

$$E^2 = M^2 + p^2 . \quad (\text{II.5})$$

La vitesse de la lumière c est prise égale à 1. La température du milieu est T et h désigne la constante de Planck. Le nombre d'états de spin différents est noté g_A . Cette dégénérescence de spin vaut 1 pour des particules de spin 0 tel que le pion neutre π^0 . Elle vaut 2 pour des fermions de spin demi-entier tel que l'électron e^- , le positron e^+ ou le neutrino ν . Pour le photon γ , g_A correspond aux états d'hélicité transverse et vaut 2. Si de surcroît, on travaille dans un système d'unités où la constante réduite de Planck $\hbar = h/2\pi$ et la constante de Boltzmann k valent 1, l'expression (II.4) se simplifie en

$$n_A = \frac{g_A}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty x^2 dx \left\{ e^y - \epsilon \right\}^{-1} , \quad (\text{II.6})$$

où $x = p/T$ et $y = E/T$. Pour restituer les unités usuelles, il convient de multiplier par le bon cocktail de constantes \hbar , k et c afin de convertir des degrés Kelvins au cube en cm^{-3} .

Problème n° II-1 – Niveau [1] : Montrer qu'il convient alors de multiplier l'expression (II.6) par le facteur

$$\left(\frac{k}{\hbar c}\right)^3 = 83.22 \text{ K}^{-3} \text{ cm}^{-3} . \quad (\text{II.7})$$

Dans la limite des fortes températures, la masse M devient négligeable devant T et les particules sont ultra-relativistes, avec des vitesses moyennes proches de la célérité c de la lumière. Les variables x et y sont quasiment égales de sorte que la densité se simplifie en

$$n_A = \frac{g_A}{\pi^2} T^3 \zeta(3) \begin{cases} 1 & (\text{Boson}) \\ 3/4 & (\text{Fermion}) \end{cases} , \quad (\text{II.8})$$

où $\zeta(3) = 1.20205$. On remarquera avec profit que le rapport n_A/T^3 est alors constant. Pour des photons, ce rapport vaut environ $20 \text{ K}^{-3} \text{ cm}^{-3}$. Pour des neutrinos à 2 états de spin, il est d'environ $15 \text{ K}^{-3} \text{ cm}^{-3}$. Dans la limite des basses températures, le gaz devient non-relativiste. Dans ce régime, le rapport $a = M/T$ est très grand devant 1 et la densité se simplifie en :

$$n_A = g_A T^3 e^{-a} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{3/2} . \quad (\text{II.9})$$

La densité d'énergie ρ et la pression P du gaz composé des particules A sont respectivement données par l'intégrale sur l'espace des phases de l'énergie E et du produit $\vec{p} \cdot \vec{v}/3$ correspondant à chaque état quantique de propagation :

$$\rho_A = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} g_A \left\{ \frac{E}{e^{E/kT} - \epsilon} \right\} , \quad (\text{II.10})$$

et

$$P_A = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} g_A \left\{ \frac{pv/3}{e^{E/kT} - \epsilon} \right\} . \quad (\text{II.11})$$

On suppose ici que le plasma primordial se comporte comme un gaz parfait. Il est vrai que son énergie thermique l'emporte largement sur son énergie potentielle d'interaction à distance. Cette hypothèse n'est toutefois plus valable dans le cas de la transition de phase quarks/hadrons où les interactions fortes réussissent à confiner les quarks au sein de particules telles que les protons, les neutrons et les pions. Si l'on travaille de nouveau dans des unités où $\hbar = k = c = 1$, la densité d'énergie se réduit à l'intégrale sans dimension

$$\rho_A = \frac{g_A}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty x^2 dx \left(\frac{y}{e^y - \epsilon} \right) . \quad (\text{II.12})$$

Il convient alors de multiplier cette expression par la quantité

$$\left(\frac{k^4}{\hbar^3 c^3} \right) \simeq 1.15 \times 10^{-21} \text{ J cm}^{-3} \text{ K}^{-4} , \quad (\text{II.13})$$

afin de restituer les unités usuelles. Dans le régime non-relativiste des basses températures pour lequel T est très petit devant M , la densité d'énergie ρ est négligeable. Elle se comporte en effet de façon exponentielle en e^{-a} . Par contre, dans la limite ultra-relativiste où M est cette fois négligeable devant la température T , l'expression (II.12) se simplifie.

Problème n° II-2 – Niveau [2] : Montrer que la densité d'énergie d'un gaz de bosons ou de fermions ultra-relativistes (donc sans masse ou de masse négligeable) est donnée par :

$$\rho_A = \frac{\pi^2}{15} \frac{g_A}{2} T^4 \begin{cases} 1 & \text{(Boson)} \\ 7/8 & \text{(Fermion)} \end{cases} . \quad (\text{II.14})$$

On s'aidera de la relation

$$\int_0^\infty dx \left(\frac{x^n}{e^x - \epsilon} \right) = \Gamma(n+1) \zeta(n+1) \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon = 1 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases} , \quad (\text{II.15})$$

que l'on démontrera. La fonction $\zeta(s)$ est définie par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} , \quad (\text{II.16})$$

et $\Gamma(s)$ désigne la fonction Gamma d'Euler.

La densité d'énergie associée à un gaz de photons est alors donnée par la relation

$$\rho_\gamma = a_\gamma T^4 . \quad (\text{II.17})$$

Le coefficient a_γ vaut

$$a_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{k^4}{\hbar^3 c^3} \right) = 7.57 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} , \quad (\text{II.18})$$

et est relié à la constante de Stefan par $\sigma_S = a_\gamma c / 4$. Il est commode d'exprimer l'énergie volumique du plasma primordial en utilisant comme unité la densité d'énergie du gaz de photons pris à la même température. La population des particules A est alors caractérisée par le nombre effectif de degrés de liberté

$$g_{\text{eff}}(A) = \frac{\rho_A}{\rho_\gamma} . \quad (\text{II.19})$$

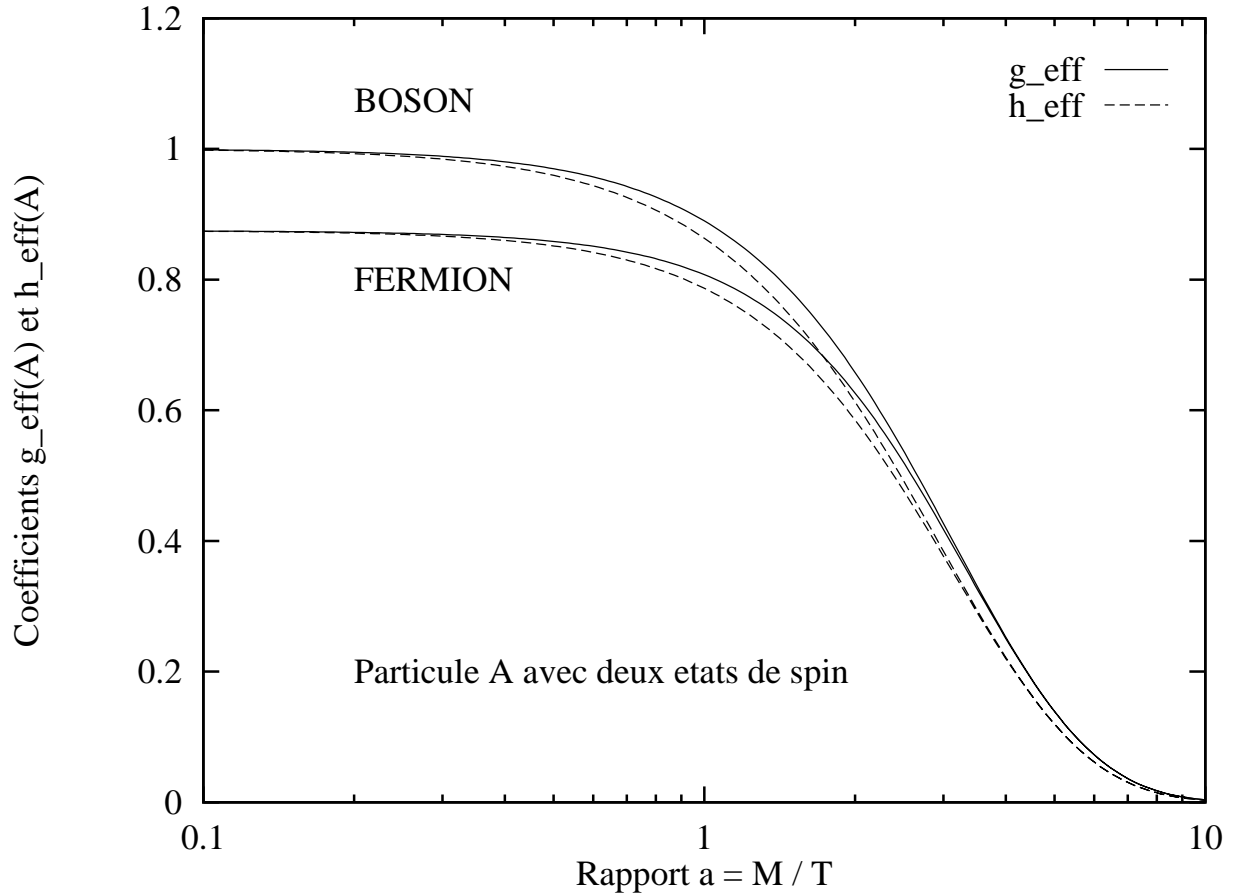


Figure II.1: Cette figure se rapporte à une particule A à 2 états de spin, de sorte que $g_A = 2$. Les densités d'énergie et d'entropie sont exprimées en fonction de celles d'un gaz de photons de même température. Le nombre effectif g_{eff} de degrés de liberté se rapportant à l'énergie est tracé en trait continu dans le cas de bosons (courbe supérieure) et de fermions (courbe inférieure). Le nombre effectif h_{eff} caractérise l'entropie du gaz des particules A et est tracé en tirets. Les densités d'énergie et d'entropie varient en fonction du rapport a de la masse M des particules A à la température T du gaz.

La figure II.1 présente le cas d'une particule A ayant deux états de spin ($g_A = 2$). Dans le régime ultra-relativiste, le rapport $a = M/T$ tend vers 0 et le coefficient g_{eff} tend vers 1 pour des bosons et vers $7/8$ pour des fermions. Lorsque la température s'abaisse par rapport à la masse M , le rapport a augmente et la densité d'énergie diminue. L'évolution de g_{eff} en fonction du rapport M/T est donnée par les deux courbes en trait continu de la figure II.1. Dans le régime non-relativiste ($a \gg 1$), les comportements des bosons et des fermions sont identiques car tous deux se réduisent à la statistique de Maxwell-Boltzmann.

L'entropie du plasma primordial se calcule en prenant un potentiel chimique nul pour toutes les espèces. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, il vient

$$T \sigma_A = \rho_A + P_A , \quad (\text{II.20})$$

où σ_A désigne l'entropie volumique du gaz des particules A .

Dans le système d'unités où $\hbar = k = c = 1$, la densité d'entropie s'exprime par une intégrale sans dimension :

$$\sigma_A = \frac{g_A}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty x^2 dx \left\{ y + \frac{x^2}{3y} \right\} \{e^y - \epsilon\}^{-1} . \quad (\text{II.21})$$

Dans le régime ultra-relativiste, il est possible de relier simplement les densités d'entropie et d'énergie

$$\sigma_A = \frac{4}{3} \frac{\rho_A}{T} = \frac{4\pi^2}{45} \frac{g_A}{2} T^3 \begin{cases} 1 & (\text{Boson}) \\ 7/8 & (\text{Fermion}) \end{cases} . \quad (\text{II.22})$$

De même, l'entropie d'un gaz quelconque peut être exprimée en fonction de l'entropie σ_γ du gaz de lumière pris à la même température. Le coefficient correspondant cette fois à la densité d'entropie est défini par

$$h_{\text{eff}}(A) = \frac{\sigma_A}{\sigma_\gamma} . \quad (\text{II.23})$$

Le comportement de h_{eff} est présenté dans la figure II.1 par les deux courbes en tirets. A haute température, les coefficients g_{eff} et h_{eff} sont égaux. Ils deviennent différents dans le régime non-relativiste où bosons et fermions se comportent de manière identique.

Les densités d'énergie et d'entropie du plasma primordial sont données par les coefficients correspondants $g_{\text{eff}}(T)$ et $h_{\text{eff}}(T)$ qui prennent en compte toutes les espèces susceptibles d'exister à l'époque considérée

$$g_{\text{eff}}(T) = \frac{\rho(T)}{\rho_\gamma(T)} \quad \text{et} \quad h_{\text{eff}}(T) = \frac{\sigma(T)}{\sigma_\gamma(T)} . \quad (\text{II.24})$$

A une température donnée, seules contribuent vraiment les particules qui se comportent de façon ultra-relativiste et dont la masse est inférieure à la température. En exprimant ces densités en unités correspondant au gaz de lumière, les coefficients $g_{\text{eff}}(T)$ et $h_{\text{eff}}(T)$ du plasma s'écrivent comme une somme sur les états de spin des bosons et des fermions qui, à la température T , se comportent de façon ultra-relativiste :

$$g_{\text{eff}}(T) \simeq h_{\text{eff}}(T) \simeq \sum_{M_B < T} \frac{g_B}{2} + \sum_{M_F < T} \frac{7}{16} g_F . \quad (\text{II.25})$$

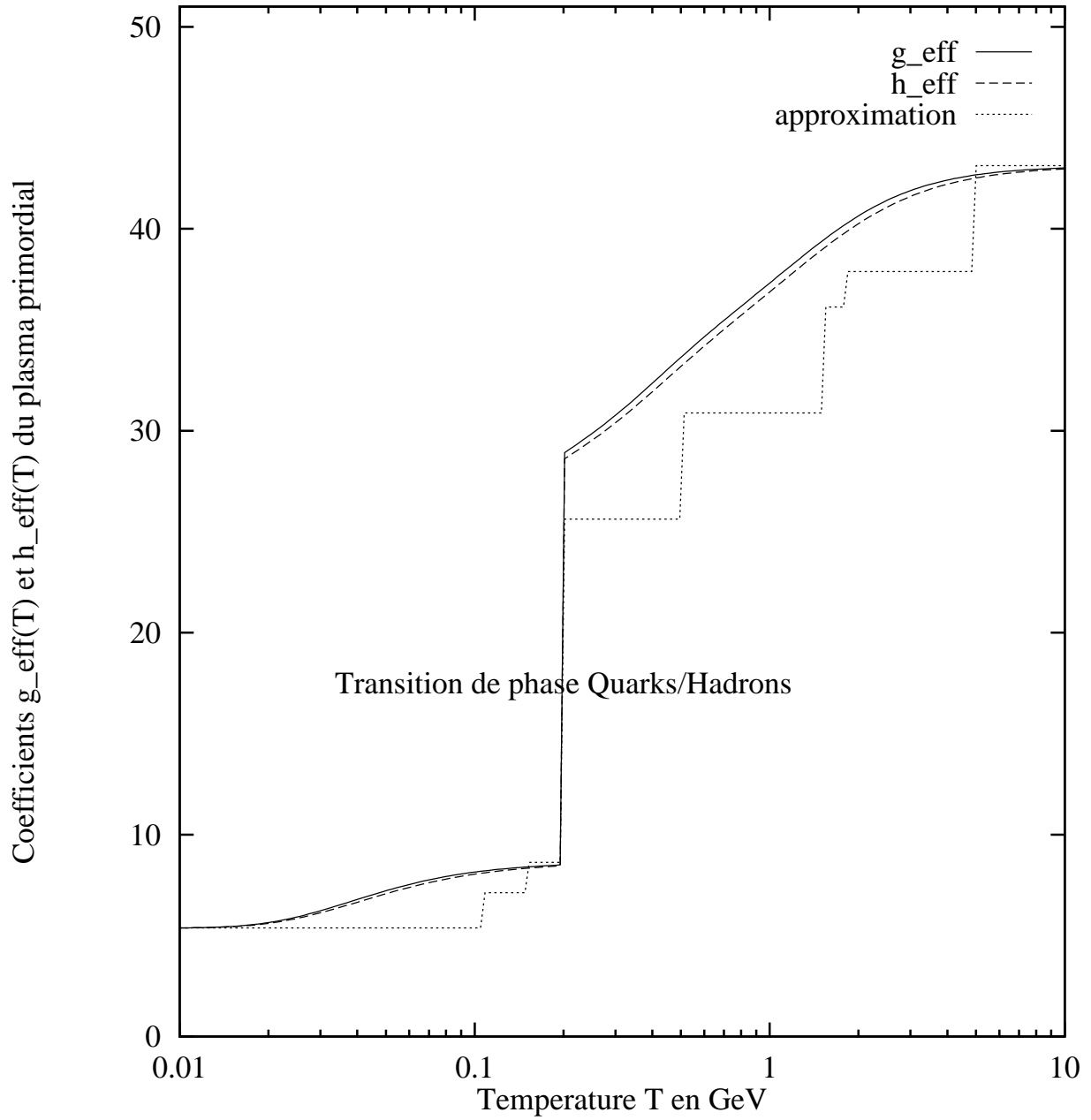


Figure II.2: Les nombres effectifs de degrés de liberté g_{eff} (trait plein) et h_{eff} (tirets) décrivent respectivement les densités d'énergie et d'entropie du plasma primordial, densités ramenées au gaz de photons. Ces coefficients diminuent lorsque la température T s'abaisse de 10 GeV à 10 MeV dans la mesure où de plus en plus d'espèces disparaissent au cours du refroidissement. Les pointillés représentent l'approximation (II.25) discutée dans le texte.

Problème n° II-3 – Niveau [1] : Montrer que pour une température de 1 MeV, la densité d'énergie du gaz primordial est donné par $g_{\text{eff}} = 43/8$. On supposera qu'il y a trois familles de neutrinos légers à deux états de spin.

Dans la figure II.2, les coefficients relatifs à l'énergie $g_{\text{eff}}(T)$ et à l'entropie $h_{\text{eff}}(T)$ ont été calculés exactement en prenant en compte directement les intégrales (II.12) et (II.21). La courbe en trait continu donne l'évolution de g_{eff} lorsque la température s'abaisse de 10 GeV à 10 MeV. Les tirets se rapportent au nombre effectif h_{eff} de degrés de liberté entropiques. La courbe en pointillés représente le comportement en escalier de l'approximation (II.25). Ses variations sont saccadées car dès que la température devient inférieure à la masse d'une espèce donnée, celle-ci cesse immédiatement d'être prise en compte dans l'expression (II.25). Cependant, sa contribution réelle à la densité d'énergie globale ne s'estompe que progressivement. L'approximation (II.25) est toutefois satisfaisante.

1.2) L'expansion de l'univers.

La distribution des galaxies est homogène à grande échelle, dès lors que l'on considère des domaines dont la taille excède la centaine de mégaparsecs (1 Mpc \sim 3 millions d'années lumière). De même, les grandes structures sont réparties de manière isotrope, sans variation avec la direction vers laquelle on pointe le télescope. Cette isotropie est confirmée par l'absence de fortes inhomogénéités dans le fond de rayonnement cosmologique micro-onde, vestige de la boule de feu primordiale qui emplissait l'univers à son début. L'homogénéité et l'isotropie de l'espace-temps conduisent à décrire sa géométrie grâce à l'élément de métrique de Robertson et Walker

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} . \quad (\text{II.26})$$

L'espace physique à trois dimensions est symétrique de façon maximale. Si le paramètre k est nul, on retrouve la métrique de Minkowski d'un espace plat avec un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Si k est positif, l'espace physique tri-dimensionnel est sphérique. Tout explorateur partant droit devant lui finit par revenir à son point de départ. L'univers est alors de taille finie. Si k est négatif, l'espace est infini et hyperbolique, avec une courbure négative. Les équations de la relativité générale permettent de relier l'évolution temporelle du facteur d'échelle $R(t)$ à la densité d'énergie ρ du gaz qui emplit l'espace :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} . \quad (\text{II.27})$$

La dérivée temporelle de $R(t)$ est dénotée par \dot{R} , G désigne la constante de gravitation universelle de Newton et le paramètre H est le taux d'expansion de l'univers à un instant t donné. Les deux termes dans le membre de droite de l'équation d'expansion (II.27) sont à l'heure actuelle du même ordre de grandeur. Si l'on remonte dans le passé, le terme de courbure augmente en $1/R^2$ alors que le terme d'énergie augmente beaucoup plus rapidement. Il varie tout d'abord en $1/R^3$ tant que la densité d'énergie est dominée par la matière non-relativiste. Puis, lorsque l'on se rapproche des tous premiers instants, quand l'univers est rempli d'un gaz essentiellement ultra-relativiste, il varie en $1/R^4$. La nucléosynthèse primordiale se déroule lorsque la température de l'univers est d'environ 3×10^9 Kelvins. Le paramètre d'échelle $R(t)$ est alors un milliard de fois plus faible qu'aujourd'hui et l'expression (II.27) est totalement dominée par le terme relié à la densité d'énergie :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho . \quad (\text{II.28})$$

Une autre conséquence de la relativité générale est la conservation du tenseur impulsion énergie du contenu matériel de l'espace. Cette propriété conduit à la conservation de l'entropie du plasma primordial au cours de l'expansion de l'univers. Considérons un volume se dilatant en suivant l'expansion de l'espace. Un tel volume s'appelle un **covolume** car ses coordonnées comobiles r , θ et ϕ ne varient pas au cours du temps. Prenons pour simplifier un volume égal à R^3 . L'entropie du plasma primordial contenu dans ce covolume s'écrit :

$$S = \sigma(T) R^3 , \quad (\text{II.29})$$

et ne varie pas au cours du temps. La relation (II.24) permet d'exprimer directement l'entropie S en fonction de la température T et du facteur d'échelle $R(t)$:

$$S = h_{\text{eff}}(T) \frac{4\pi^2}{45} T^3 R^3 . \quad (\text{II.30})$$

En première approximation, on peut négliger les variations du coefficient h_{eff} avec la température. La figure II.2 montre bien que h_{eff} ne varie que d'un facteur 8 lorsque la température diminue de trois ordres de grandeur, passant de 10 GeV à 10 MeV. La conservation de l'entropie implique donc que le produit de la température par le facteur d'échelle est constant :

$$T \times R(t) = \text{Constante} . \quad (\text{II.31})$$

En exprimant la densité d'énergie du plasma primordial en fonction de la densité d'énergie du gaz de photons pris à la même température, la relation (II.28) conduit à une équation différentielle décrivant l'évolution dans le temps de la température

$$-\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8\pi G}{3} g_{\text{eff}}(T) \frac{\pi^2}{15} T^4 \right)^{1/2} . \quad (\text{II.32})$$

Problème n° II-4 – Niveau [1] : Montrer que l'expression (II.32) peut se mettre sous la forme

$$-\frac{\dot{T}}{T^3} = \left(\frac{8\pi^3 G}{45} g_{\text{eff}}(T) \right)^{1/2} . \quad (\text{II.33})$$

Si l'on néglige les variations du coefficient g_{eff} avec la température, en déduire que la relation entre le temps t écoulé depuis la création de l'univers et la température T est donnée par :

$$\frac{1}{T^2} \simeq \left(\frac{32\pi^3 G}{45} g_{\text{eff}}(T) \right)^{1/2} t . \quad (\text{II.34})$$

On choisira comme condition initiale une température infinie à l'instant $t = 0$.

Afin d'évaluer numériquement l'expression précédente, il convient de définir la masse de Planck, masse ou énergie associée à la constante de gravitation G de Newton. Cette dernière vaut environ $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ et on peut la multiplier par le bon mélange de constantes fondamentales \hbar et c afin d'en dériver une énergie typique. En jouant sur les unités de ces diverses quantités, on trouve que l'énergie correspondante, dénommée énergie de Planck ou encore masse de Planck en vertu de l'identité entre la masse et l'énergie, est donnée par :

$$M_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \simeq 1.96 \times 10^9 \text{ J} \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV} . \quad (\text{II.35})$$

Dans la mesure où l'inverse d'un MeV correspond au laps de temps $\hbar/1 \text{ MeV}$, soit encore à 6.6×10^{-22} seconde, la relation (II.34) se réduit à :

$$t \simeq \frac{1.7 \text{ seconde}}{\sqrt{g_{\text{eff}}(T)}} \left(\frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 . \quad (\text{II.36})$$

Au moment de la nucléosynthèse primordiale, la température est comprise entre 0.1 et 1 MeV, soit encore entre 1 et 10 milliards de Kelvins. L'univers a alors un âge compris entre une seconde et trois minutes.

2) La transmutation proton-neutron.

Au-dessus d'une température de ~ 1 MeV, tous les noyaux sont dissociés en protons et neutrons. Ces derniers ne cessent de se transmuter, les protons se transformant en neutrons et vice-versa. Les interactions faibles sont responsables de ces réactions qui, à haute température, sont très rapides. Cependant, vers une température de 1 MeV, les interactions faibles ne sont plus assez virulentes et elles se découplent de l'équilibre thermodynamique. L'univers devient transparent aux neutrinos qui cessent toute interaction avec le reste du plasma primordial. De même, neutrons et protons ne se transforment plus entre eux. Ils gardent leur propre individualité. Puisque les neutrons sont libres, ils se désintègrent en protons et le rapport entre neutrons et protons diminue peu à peu. Ensuite, vers une température de ~ 0.1 MeV, soit un milliard de Kelvins, le deutérium n'est plus photodissocié par la fournaise environnante. Il peut se former et entraîner la synthèse de nombreux éléments légers, en particulier l' ^4He qui engloutit pratiquement tous les neutrons disponibles. Au bout d'une heure, la cuisson primordiale s'achève. Un quart de la matière se retrouve sous forme d'hélium.

2.1) Le découplage des neutrinos.

A basse énergie, la force faible procède par une interaction locale où les courants impliqués interagissent au même point de l'espace. Dans le cas de la transmutation entre neutrons et protons, les particules se couplent ponctuellement, de sorte que le Lagrangien effectif décrivant cette réaction s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \Psi_\nu \} \{ \bar{\Psi}_P \gamma^\mu (g_V + g_A \gamma_5) \Psi_N \} + \text{h.c.} . \quad (\text{II.37})$$

La constante de Fermi G_F est caractéristique des interactions faibles et vaut

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} . \quad (\text{II.38})$$

Le couplage vectoriel g_V et le couplage axial g_A du courant correspondant au couple proton-neutron ont été déterminés expérimentalement. Ils valent respectivement 1 (vectoriel) et 1.26 (axial). Le couplage du neutrino est purement chirale et fait intervenir la projection de la fonction d'onde sur l'état de chiralité gauche. Cette projection est assurée par l'opérateur $P_L = (1 - \gamma_5)/2$. La chiralité se confond avec l'hélicité lorsque la masse de la particule est négligeable devant son énergie. Dans le domaine d'énergie qui nous intéresse, pour une température de l'ordre du MeV, la section efficace typique qui caractérise l'interaction des neutrinos avec les particules environnantes est approximativement donnée par

$$\langle \sigma v \rangle \sim G_F^2 T^2 , \quad (\text{II.39})$$

de sorte que le taux de collision des neutrinos avec le plasma primordial est

$$\Gamma_c \sim G_F^2 T^2 \{n_{e^-} + n_{e^+} + n_\nu\} . \quad (\text{II.40})$$

Problème n° II-5 – Niveau [1] : Montrer que pour restituer les unités usuelles dans l'expression (II.39), il convient de la multiplier par le facteur $\hbar^2 c^2$. En déduire que le produit σv de la section efficace par la vitesse des particules vaut en moyenne

$$\langle \sigma v \rangle \sim 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^2 . \quad (\text{II.41})$$

Montrer rapidement qu'une température de 1 MeV correspond à 1.159×10^{10} Kelvins. En déduire que le taux de collision des neutrinos avec les autres particules du plasma primordial est donné par

$$\Gamma_c \sim 0.2 \text{ s}^{-1} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^5 . \quad (\text{II.42})$$

Le gaz de neutrinos est thermalisé avec l'ensemble du plasma environnant grâce aux multiples collisions qu'il entretient avec ce dernier. La thermalisation des neutrinos est assurée par leurs interactions avec les autres particules, interactions au cours desquelles l'énergie est échangée et tend à se répartir démocratiquement entre les diverses espèces. Le taux de collision décrit la rapidité avec laquelle la température T_ν des neutrinos relaxe vers la température T du reste du milieu. Cette dernière diminue comme l'inverse du facteur d'échelle R et son taux d'évolution est donc donné par le facteur d'expansion H de Hubble

$$H = \sqrt{\frac{8\pi^3}{45}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T)} \frac{T^2}{M_P} \sim 0.7 \text{ s}^{-1} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^2 . \quad (\text{II.43})$$

Le taux de collision Γ_c varie comme la cinquième puissance de la température alors que le taux d'expansion H diminue plus doucement, étant quadratique en T . A haute température, le taux de collision l'emporte donc sur le taux d'expansion. Pendant un temps typique de dilatation de l'univers, temps de l'ordre de l'inverse de H , la température T_ν des neutrinos a largement le temps de relaxer vers la température T du reste du plasma. Si des fluctuations statistiques viennent à perturber T_ν , les nombreuses interactions entre les neutrinos et les autres particules sont suffisamment rapides pour thermaliser le mélange des espèces et le gaz évolue très rapidement vers l'équilibre thermique. Au fur et à mesure de l'expansion, la température chute et le taux de collision diminue plus rapidement que le taux d'expansion. A basse température, il est devenu plus faible que H . Le raisonnement

précédent peut alors être inversé. Lorsque la température T s'abaisse, les collisions des neutrinos avec leur environnement deviennent si rares que T_ν n'a plus le temps de relaxer vers T . La probabilité qu'un neutrino interagisse pendant un temps typique d'expansion est devenu très inférieure à 1. La température du plasma évolue plus rapidement que celle des neutrinos de sorte que T_ν n'a plus le temps de rattraper T . Dans ce régime, le gaz primordial est alors complètement transparent aux neutrinos qui, du même coup, cessent également d'interagir entre eux. Les neutrinos se découplent de l'équilibre thermique pour constituer une population fossile. La transition se déroule au moment où Γ_c et H sont égaux, à une température de découplage T_d donnée par la relation

$$\frac{\Gamma_c}{H} = 1 \simeq 0.3 \left(\frac{T_d}{1 \text{ MeV}} \right)^3 . \quad (\text{II.44})$$

Le gel des neutrinos a donc lieu pour une température $T_d \simeq 1.5 \text{ MeV}$. En-dessous de cette température, les neutrinos constituent une population fossile et ne sont plus en équilibre thermodynamique avec le reste de la matière. Il n'est donc plus possible de définir une température au sens de la thermodynamique. Cependant, leur densité par covolume, donc par volume qui suit l'expansion de l'univers, est constante car il n'y a plus de création ou de disparition substantielle de ces particules. D'autre part, la quantité de mouvement p d'un neutrino est associée par la mécanique quantique à la longueur λ de l'onde neutrinique correspondante. Or λ subit l'expansion de l'univers de sorte qu'elle augmente au cours du temps. L'impulsion p diminue alors comme

$$p \sim \frac{\hbar}{\lambda} \propto R^{-1} . \quad (\text{II.45})$$

L'élément de volume $d^3\vec{x} d^3\vec{p}$ n'est pas affecté par l'expansion de l'univers. La densité des neutrinos dans l'espace des phases est alors constante et leur distribution statistique est gelée à sa valeur lors du découplage.

Problème n° II-6 – Niveau [2] : On considère des neutrinos de masse négligeable. Montrer qu'en-dessous de T_d , la fonction de distribution statistique des neutrinos est encore celle de Fermi-Dirac avec une température effective variant en R^{-1} . Cet exercice suggère qu'après la rupture de l'équilibre thermique, on peut encore définir une température T_ν qui est plus un paramètre d'échelle qu'une entité thermodynamique. Le produit $R \times T_\nu$ reste constant au cours du découplage.

Vers une température de 0.5 MeV , les électrons s'annihilent avec les positrons. Le dégagement de chaleur induit par ces réactions ne bénéficie qu'aux photons car les neutrinos n'interagissent plus avec le milieu. Ils ne sont donc plus susceptibles de recevoir

d'énergie. La température des photons augmente alors par rapport à celle des neutrinos. Le réchauffement correspondant se calcule en écrivant que l'entropie du mélange radiatif constitué des électrons, des positrons et des photons reste constante au cours du temps. L'annihilation des électrons constitue en fait un phénomène interne à ce gaz radiatif. En prenant un volume de taille typique $R = T_\nu^{-1}$, il vient

$$S_{\text{rad}} = h_{\text{eff}}(\text{rad}) \sigma_\gamma(T) T_\nu^{-3} = \text{Constante} , \quad (\text{II.46})$$

où le nombre effectif de degrés de liberté entropiques du mélange radiatif est donné par

$$h_{\text{eff}}(\text{rad}) = h_{\text{eff}}(\gamma) + 2 h_{\text{eff}}(e^-) . \quad (\text{II.47})$$

Problème n° II-7 – Niveau [1] : Avant l'annihilation des électrons, pour une température supérieure à leur masse $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, montrer que le coefficient $h_{\text{eff}}(\text{rad})$ vaut 11/4. Montrer qu'une fois les photons seuls, ce coefficient vaut 1. En déduire que l'annihilation des électrons et des positrons conduit au réchauffement

$$\frac{T}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} \sim 1.4 . \quad (\text{II.48})$$

Calculer la température actuelle des neutrinos. En déduire que la densité actuelle de chaque famille de neutrinos est d'environ 110 cm^{-3} .

La cinétique de l'expansion joue un rôle important pendant l'annihilation des électrons et le réchauffement des photons. C'est à ce moment-là que les neutrons se convertissent en protons et la quantité finale d'hélium dépend du temps que met l'univers à se refroidir de 10 à 1 milliard de Kelvins. L'évolution de la température est décrite par la relation (II.32) où le coefficient relatif à la densité d'énergie doit tenir compte d'une différence entre T_ν et T

$$g_{\text{eff}}(T) = 1 + 2 g_e(T) + \frac{7}{8} N_\nu \left(\frac{T_\nu}{T} \right)^4 . \quad (\text{II.49})$$

Le nombre de familles de neutrinos à deux états d'hélicité est dénoté par N_ν . L'invariance de l'entropie de la radiation conduit à relier la température des neutrinos T_ν à celle des photons T par

$$\{1 + 2 h_e(T)\} \left(\frac{T}{T_\nu} \right)^3 = \frac{11}{4} . \quad (\text{II.50})$$

Les évolutions de T et de T_ν au cours de l'expansion sont présentées dans la figure II.3. Les deux températures se découplent vers $\sim 1 \text{ MeV}$. En même temps, l'entropie des photons augmente ainsi que leur densité. Dans cette figure, le nombre N_ν de familles de

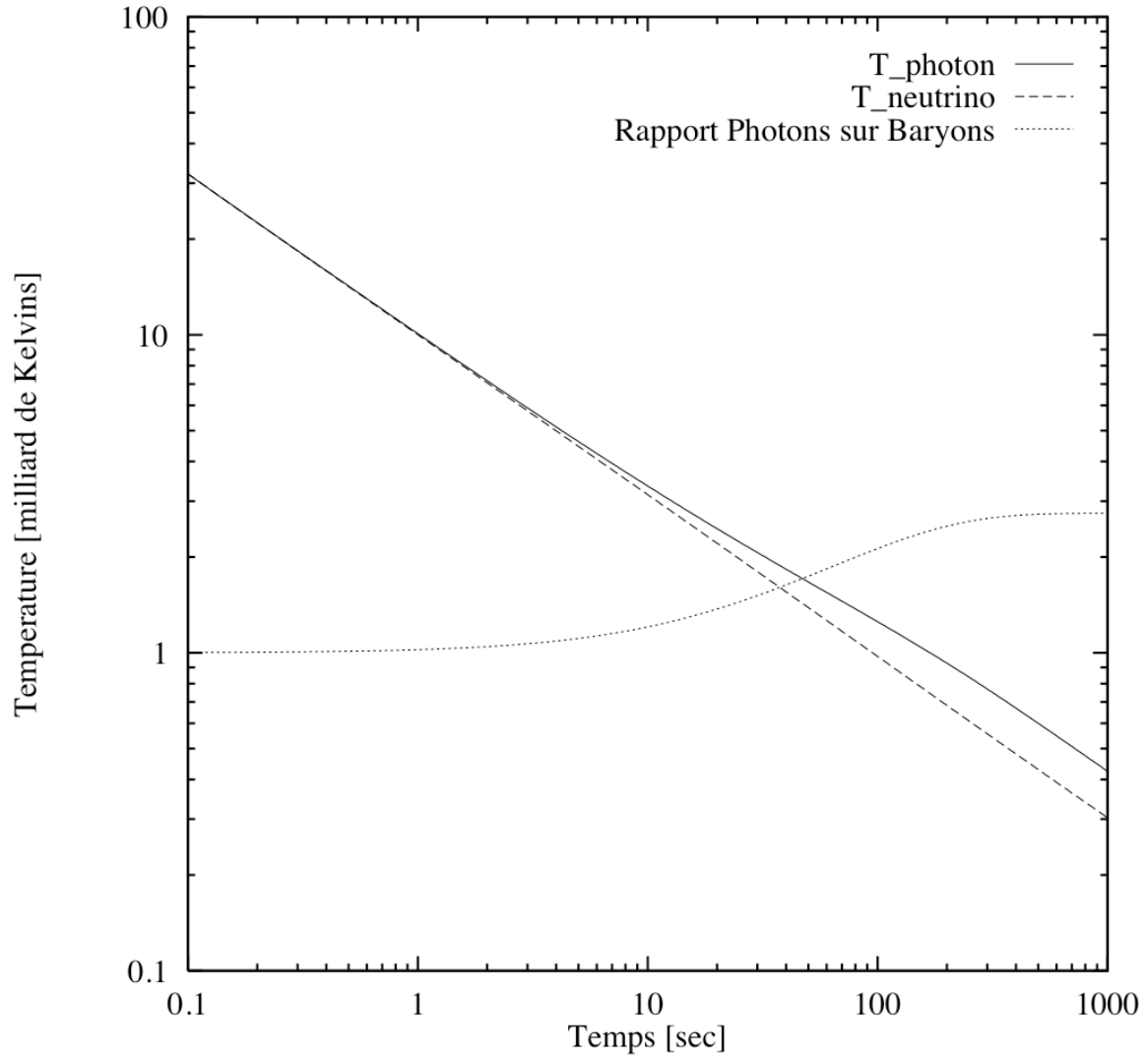


Figure II.3: La température du plasma primordial décroît rapidement au cours du temps. Vers 1 MeV, neutrinos et photons se découplent. C'est pourquoi l'annihilation entre les électrons et les positrons rechauffe uniquement les photons. Leur température devient légèrement supérieure à celle des neutrinos. De même, leur entropie augmente ainsi que le rapport n_γ/n_B .

neutrinos a été fixé à 3. Si d'un point de vue thermodynamique, l'asymétrie entre matière et antimatière est négligeable, elle ne l'est plus lorsque l'on considère les nucléons à partir desquels se formeront les noyaux atomiques au moment de la nucléosynthèse. Un très léger excès de baryons * sur les antibaryons survit à leur annihilation réciproque, vers une température de 1 GeV. Cette asymétrie est très faible car pour une population de 10 milliards de particules, il n'y a guère que quelques nucléons excédentaires qui demeurent ensuite à basse température. Le nombre baryonique se conservant, la densité associée n_B décroît comme R^{-3} . En vertu de la relation (II.31), le rapport de la densité des photons à celle des baryons se conserve au cours du temps, sauf au moment du réchauffement. La courbe en pointillés de la figure II.3 présente l'évolution de n_γ/n_B . Ce rapport augmente d'un facteur 11/4. Ensuite, il est de nouveau constant. La valeur typique de l'abondance baryonique actuelle est de $n_B/n_\gamma \sim 1 - 10 \times 10^{-10}$. Pendant l'annihilation entre les électrons et les positrons, le coefficient $g_{\text{eff}}(T)$ diminue de 43/8 à ~ 1.7 .

2.2) Protons, neutrons et interactions faibles.

Le Lagrangien (II.37) régit les interactions entre neutrons et protons. Ces particules apparaissent vis à vis des interactions faibles comme deux facettes de la même entité : le doublet d'isospin faible. C'est pourquoi les interactions faibles permettent la transformation des protons en neutrons et vice-versa. En s'aidant des règles de Feynman, il est possible de déduire l'élément de matrice qui préside aux réactions de transmutation entre ces deux espèces.

Problème n° II-8 – Niveau [3] : On supposera ici que l'énergie cinétique des particules mises en jeu est négligeable devant la masse M des nucléons. De même, la très légère différence de masse entre le neutron et le proton

$$Q = M_n - M_p = 939.56 \text{ MeV} - 938.27 \text{ MeV} = 1.293 \text{ MeV} , \quad (\text{II.51})$$

est faible en regard de M . Chaque nucléon se comporte alors comme une sorte d'atome qui émettrait et absorberait neutrinos et électrons à la place des photons. On démontrera la relation

$$\begin{aligned} \text{Trace} \{ \gamma_\mu \not{A} \gamma_\nu \not{B} \cdot (\alpha + \beta \gamma_5) \} &\times \text{Trace} \{ \gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} \cdot (1 + \gamma_5) \} \\ &= 32 \{ (\alpha + \beta) aA bB + (\alpha - \beta) aB bA \} . \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

*Baryon est le nom générique des neutrons et des protons.

Problème n° II-8 – Niveau [3] : On s'aidera du résultat précédent afin de montrer que l'élément de matrice décrivant les réactions de transmutation entre protons et neutrons s'écrit

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger = 8 G_F^2 (g_V^2 + 3g_A^2) M^2 E_e E_\nu . \quad (\text{II.53})$$

Les énergies de l'électron et du neutrino mis en jeu au cours de la réaction sont respectivement notées E_e et E_ν . Cet élément de matrice prend en compte la somme sur les spins des particules finales, la moyenne sur les spins des particules initiales et également la moyenne angulaire sur les impulsions.

Trois réactions permettent de transformer un neutron en proton :

$$n + \nu \rightarrow p + e^- \quad (\text{II.54})$$

$$n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu} \quad (\text{II.55})$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} . \quad (\text{II.56})$$

Le taux avec lequel se déroule la première réaction, par exemple, s'écrit comme une intégrale, sur la distribution statistique de Fermi $f_\nu(E_\nu)$ des neutrinos, de la section efficace correspondante :

$$\lambda(n + \nu \rightarrow p + e^-) = \int \frac{d^3 \vec{\nu}}{8\pi^3} (g_\nu = 2) f_\nu(E_\nu) \sigma |\vec{v}_\nu - \vec{v}_N| . \quad (\text{II.57})$$

Cette dernière est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma |\vec{v}_\nu - \vec{v}_N| &= \frac{1}{2M} \frac{1}{2E_\nu} \int d\tilde{P} d\tilde{e} (2\pi)^4 \delta^4(p_N + p_\nu - p_P - p_e) \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger \{1 - f_e(E_e)\} . \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Un facteur statistique $(1 - f_e)$ tient compte de la diminution de la probabilité de réaction si l'état final fermionique est déjà en partie occupé par un électron. L'élément différentiel $\tilde{d}p$, invariant par transformation de Lorentz, est défini par

$$\tilde{d}p = \frac{1}{2E} \frac{d^3 \vec{p}}{8\pi^3} . \quad (\text{II.59})$$

Le taux de transmutation de la réaction étudiée ici peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda(n + \nu \rightarrow p + e^-) &= \frac{1}{M} \int \tilde{d}\nu \tilde{d}P \tilde{d}e (2\pi)^4 \delta^4(p_N + p_\nu - p_P - p_e) \\ &\times f_\nu(E_\nu) (1 - f_e(E_e)) \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger . \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Problème n° II-9 – Niveau [3] : En s'aidant de la relation (II.53), développer l'expression (II.60) pour arriver à

$$\begin{aligned} \lambda(n + \nu \rightarrow p + e^-) &= \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \int v_e E_e^2 dE_e E_\nu^2 dE_\nu \\ &\times \{f_\nu(E_\nu) (1 - f_e(E_e)) \delta(Q + E_\nu - E_e)\} \quad . \quad (\text{II.61}) \end{aligned}$$

La vitesse de l'électron est dénotée par v_e . Montrer alors que dans le cas des réactions (II.55) et (II.56), le taux de transmutation est donné par une relation similaire où seul le terme entre accolades change. Ce dernier devient

$$\{f_e (1 - f_\nu) \delta(Q + E_e - E_\nu)\} \quad (\text{II.62})$$

dans le cas d'une interaction entre neutron et positron $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}$ et

$$\{(1 - f_e) (1 - f_\nu) \delta(Q - E_e - E_\nu)\} \quad (\text{II.63})$$

dans le cas de la désintégration du neutron en proton $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$.

Le taux de transmutation des trois réactions (II.54), (II.55) et (II.56) est finalement donné par la même intégrale

$$\begin{aligned} \lambda(n \rightarrow p) &= \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \int \left\{ 1 - \frac{m_e^2}{(Q + q)^2} \right\}^{1/2} q^2 (Q + q)^2 dq \\ &\times \left\{ e^{q/T_\nu} + 1 \right\}^{-1} \left\{ e^{-(Q + q)/T} + 1 \right\}^{-1} \quad , \quad (\text{II.64}) \end{aligned}$$

où seul varie le domaine d'intégration et, bien sûr, la signification physique de la variable q . En réduisant la fonction de Dirac dans l'expression (II.61), on peut identifier la variable q à E_ν et l'intégrale s'étend de 0 à $+\infty$. Dans la réaction (II.55), la variable q vaut $-E_\nu$ cette fois et elle varie de $-\infty$ à $-Q - m_e$. Finalement, dans le cas de la désintégration (II.56), $q = -E_\nu$ et le domaine d'intégration correspond à l'intervalle allant de $-Q + m_e$ à 0. Le taux de transmutation global d'un neutron en proton est donc directement donné par la relation (II.64) où q prend toutes les valeurs possibles, sauf celles pour lesquelles la vitesse électronique v_e n'est pas définie, *i.e.*, entre $-Q - m_e$ et $-Q + m_e$. Signalons finalement que la distribution statistique des neutrinos est décrite par une fonction de Fermi-Dirac dont la température est T_ν alors que le gaz d'électrons et de positrons est associé à la température T .

Problème n° II-10 – Niveau [3] : Montrer que le taux de transmutation d'un proton en neutron est donné par la même expression que précédemment

$$\lambda(p \rightarrow n) = \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \int \left\{ 1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2} \right\}^{1/2} q^2 (Q+q)^2 dq \times \left\{ e^{-q/T_\nu} + 1 \right\}^{-1} \left\{ e^{(Q+q)/T} + 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{II.65})$$

où la différence de masse Q entre protons et neutrons a été changée en $-Q$.

Problème n° II-11 – Niveau [2] : Montrer qu'à haute température, le taux de transmutation d'un neutron en proton est pratiquement égal au taux du processus inverse et vaut

$$\lambda(n \rightarrow p) \simeq \lambda(p \rightarrow n) \simeq \frac{7\pi}{30} G_F^2 (g_V^2 + 3g_A^2) T^5. \quad (\text{II.66})$$

Problème n° II-12 – Niveau [1] : Montrer que dans le régime où les températures des neutrinos et des photons sont égales, donc au-dessus de 1 MeV, les taux de transmutation entre neutrons et protons sont dans le rapport

$$\frac{\lambda(n \rightarrow p)}{\lambda(p \rightarrow n)} = e^{Q/T}. \quad (\text{II.67})$$

Problème n° II-13 – Niveau [2] : Dans cette question, on s'intéresse au taux de désintégration d'un neutron en proton. C'est la limite de basse température de l'expression (II.64). En négligeant la masse m_e de l'électron que l'on prendra égale à 0, montrer que ce taux se ramène à l'intégrale

$$\lambda(n \rightarrow p) = \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \int_{-Q}^0 Q^2 q^2 dq + 2Qq^3 dq + q^4 dq. \quad (\text{II.68})$$

En déduire que, dans cette limite, la durée de vie du neutron est donnée par

$$\tau_n^{-1} = \lambda(n \rightarrow p) = \frac{G_F^2}{60 \pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) Q^5. \quad (\text{II.69})$$

et vaut $\tau_n \sim 440$ secondes. La véritable valeur est $\tau_n = 889.1 \pm 2.1$ secondes. Commentaires ?

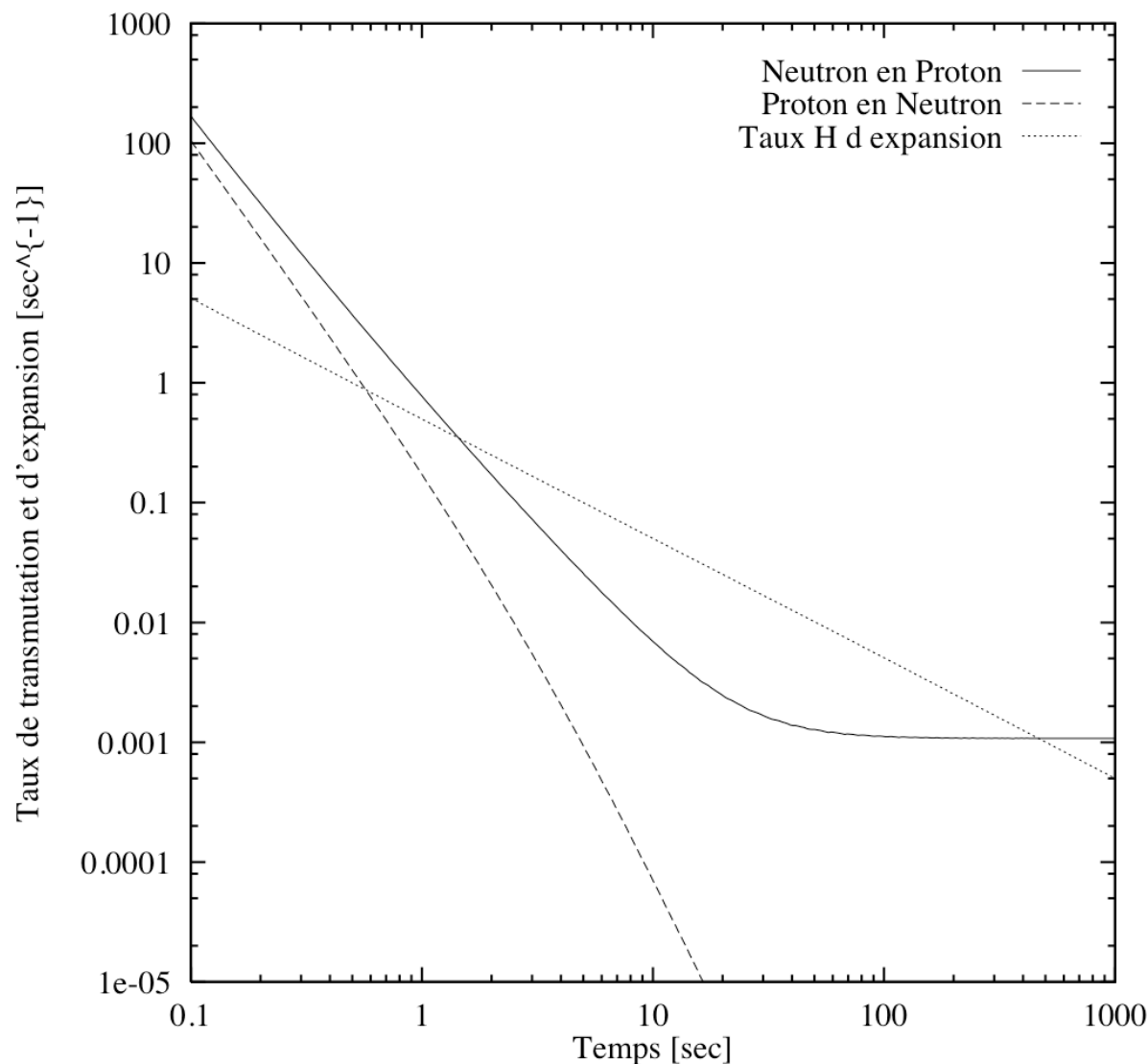


Figure II.4: Le taux de transmutation des neutrons en protons $\lambda(n \rightarrow p)$ (courbe en trait plein) ainsi que le taux de transmutation inverse $\lambda(p \rightarrow n)$ (courbe en tirets) sont tracés en fonction de l'âge de l'univers. Ces taux de réaction sont à comparer au taux H d'expansion. A haute température, l'équilibre neutron-proton est atteint. La probabilité de transmutation entre nucléons devient inférieure à 100% pendant un temps typique d'expansion lorsque la courbe en trait plein passe en dessous de la ligne en pointillés. L'équilibre neutron-proton est alors rompu.

2.3) Le gel des transmutations entre protons et neutrons.

Le nombre total de neutrons et de protons, donc le nombre de baryons, se conserve au sein d'un covolume, *i.e.*, d'un volume qui se dilate en suivant l'expansion de l'univers. L'évolution au cours du temps de la fraction X_n des neutrons est alors décrite par l'équation

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda(p \rightarrow n) X_p - \lambda(n \rightarrow p) X_n . \quad (\text{II.70})$$

Puisque la fraction X_p des protons est simplement donnée par $1 - X_n$, la relation précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{dX_n}{dt} + \{\lambda(n \rightarrow p) + \lambda(p \rightarrow n)\} X_n = \lambda(p \rightarrow n) . \quad (\text{II.71})$$

La figure II.4 présente l'évolution au cours du temps des taux de transmutation entre neutrons et protons. La réaction qui change un neutron en proton (courbe en trait plein) est toujours plus virulente que le mécanisme inverse (courbe en tirets). Il est en effet toujours plus facile de faire basculer un neutron en proton que de faire l'inverse car il en coûte moins d'énergie à cause de la différence Q entre les masses des deux espèces. Ces probabilités de transformation par unité de temps sont comparées au taux d'expansion H de l'univers (courbe en pointillés). A haute température, au delà de ~ 1 MeV, la transmutation entre neutrons et protons est beaucoup plus rapide que l'expansion de sorte que la fraction X_n relaxe très rapidement vers sa solution d'équilibre cinétique X_n^0 . Cette dernière s'obtient en annulant la dérivée dX_n/dt dans l'équation d'évolution (II.71). En vertu de la relation (II.67), l'équilibre cinétique correspond exactement au bon résultat déduit de la thermodynamique :

$$X_n^0 = \frac{\lambda(p \rightarrow n)}{\lambda(n \rightarrow p) + \lambda(p \rightarrow n)} = \left\{ 1 + e^{Q/T} \right\}^{-1} . \quad (\text{II.72})$$

Tant que la fraction X_n relaxe vers sa valeur d'équilibre X_n^0 plus vite que cette dernière ne décroît, on peut considérer que l'équilibre cinétique est effectivement atteint et que $X_n = X_n^0$. Le taux de relaxation de X_n vers X_n^0 est simplement donné par la somme

$$\Gamma_{\text{rel}} = \lambda(n \rightarrow p) + \lambda(p \rightarrow n) . \quad (\text{II.73})$$

Problème n° II-14 – Niveau [1] : Montrer que le taux typique de variation de la fraction d'équilibre est relié au taux d'expansion H

$$\Gamma_{\text{eq}} = -\frac{d \log(X_n^0)}{dt} \simeq \left\{ 1 + e^{-Q/T} \right\}^{-1} \left\{ \frac{Q}{T} \right\} H . \quad (\text{II.74})$$

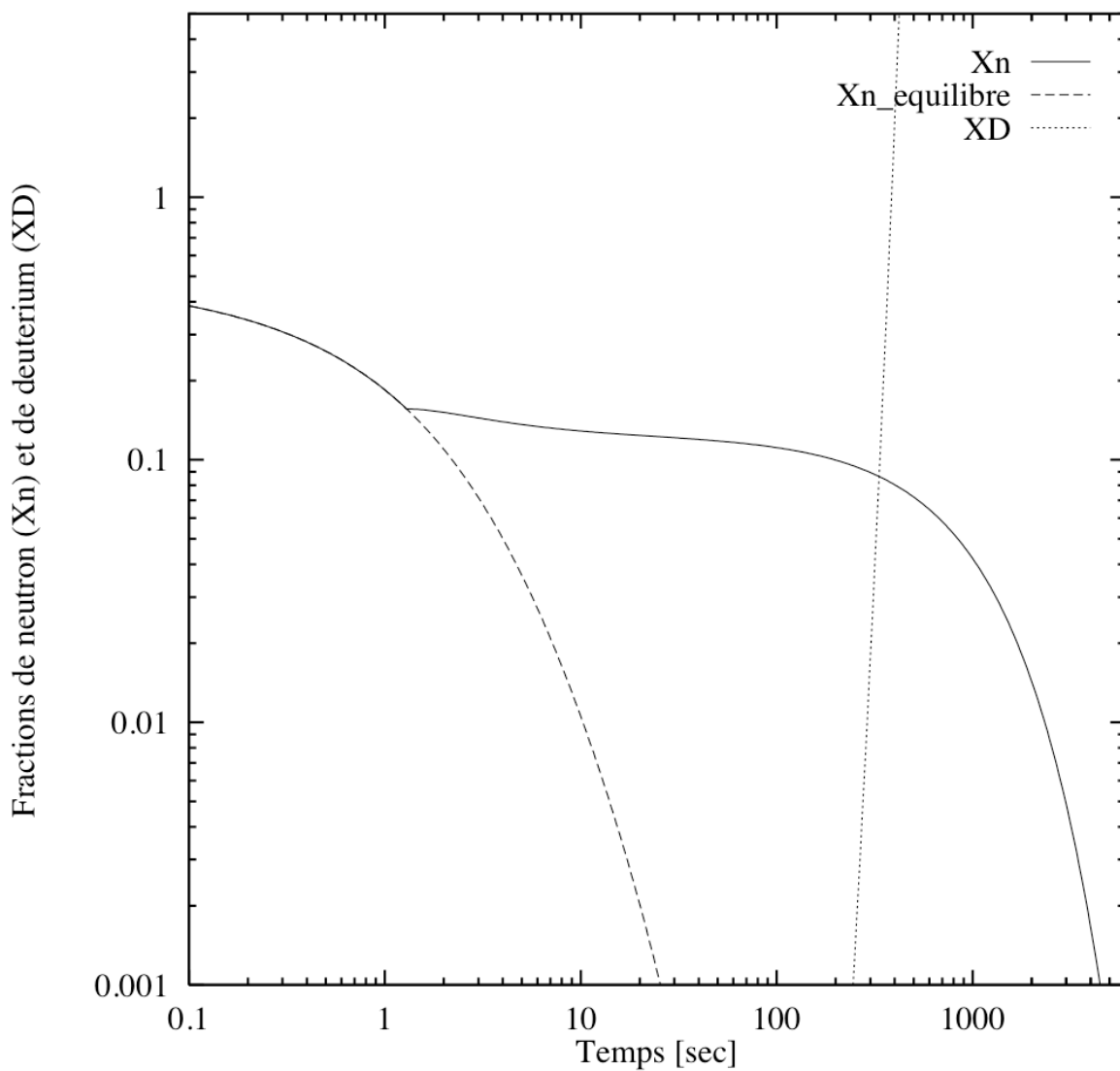


Figure II.5: La fraction de neutrons X_n est tracée en fonction du temps (courbe en trait plein). A haute température, elle est égale à sa valeur d'équilibre X_n^0 (courbe en tirets). Après le gel des réactions de transmutation entre protons et neutrons, X_n se découple de X_n^0 qui, pour sa part, diminue rapidement. Pendant une centaine de secondes, X_n évolue lentement sous l'effet des désintégrations des neutrons en protons. En l'absence de nucléosynthèse primordiale, les neutrons sont entièrement convertis en protons vers un âge $t \sim \tau_n \sim 10^3$ secondes. Cependant, à $t \sim 200$ secondes, la fraction X_D de deutérium augmente brutalement.

Lorsque l'univers est âgé d'environ 1 à 2 secondes, le taux d'expansion H est supérieur aux divers taux de transmutation et la probabilité qu'un neutron se transforme en proton, ou vice-versa, devient inférieure à 100% pendant un temps typique d'expansion de l'univers. Dans cette situation, la fraction X_n a de plus en plus de mal à relaxer vers sa valeur d'équilibre qu'elle n'arrive plus à rattraper. Le taux de relaxation Γ_{rel} devient inférieur à Γ_{eq} au moment où la courbe en trait plein passe en-dessous de la courbe en pointillés. A cet instant précis, la fraction X_n des neutrons se découple de l'équilibre et les transmutations entre particules gèlent. Neutrons et protons se comportaient un instant auparavant comme deux états quantiques différents d'une même entité : le nucléon. Après le découplage de l'équilibre proton-neutron, ils gardent leur individualité de sorte que les deux espèces ont des évolutions distinctes. La fraction X_n^0 diminue très rapidement et s'annule. L'évolution de X_n est alors décrite par l'équation simplifiée

$$\frac{dX_n}{dt} \simeq -\Gamma_{\text{rel}} . \quad (\text{II.75})$$

Vers un âge de l'ordre de 10^3 secondes, le taux d'expansion devient de nouveau inférieur au taux de transmutation des neutrons en protons. Ce dernier est alors constant. La valeur à laquelle il se stabilise n'est autre que l'inverse de la durée de vie du neutron dans le vide. Dans la figure II.4, on obtient $\tau_n \sim 928$ secondes, pas très loin de la valeur mesurée expérimentalement.

L'évolution de la fraction de neutrons X_n est présentée dans la figure II.5 (courbe en trait plein). La valeur d'équilibre X_n^0 correspond à la courbe en pointillés. Le découplage a lieu vers une température de ~ 1 MeV, au moment où X_n ne suit plus l'équilibre thermodynamique, pratiquement en même temps que le gel du gaz de neutrinos. C'est en effet à cet instant que les interactions faibles ne sont plus assez virulentes pour maintenir en équilibre les réactions des neutrinos avec le reste de la matière. La courbe en pointillés de la figure II.5 représente la montée brutale de l'abondance de deutérium. Vers une température de l'ordre du milliard de Kelvins, cet élément est formé en grande quantité par fusion de neutrons et de protons. La fraction X_D augmente rapidement. La figure II.5 a été tracée en faisant l'hypothèse que neutrons et protons libres constituaient la totalité des baryons de sorte que $X_n + X_p = 1$. Cette hypothèse n'est plus correcte dès lors que l'abondance de deutérium n'est plus négligeable. En fait, au moment où la fraction X_D devient égale à la fraction de neutrons X_n , il n'est plus possible de considérer que protons et neutrons sont seuls. Au moment où la courbe en pointillés s'apprête à franchir la courbe en trait plein, la quantité de deutérium est suffisante pour amorcer toute une chaîne de réactions nucléaires : la nucléosynthèse primordiale commence.

3) La synthèse des éléments légers.

3.1) Le deutérium : un passage obligé.

La thermodynamique statistique favorise l'état le plus probable, *i.e.*, l'état d'énergie libre F minimale

$$F = U - TS . \quad (\text{II.76})$$

Pendant le big-bang, la population des nucléons et des noyaux au sein desquels ils peuvent se regrouper ne déroge pas à cette règle. A très haute température, l'énergie libre est minimale lorsque l'entropie est maximale. Tous les noyaux sont donc dissociés à l'instar d'un liquide qui s'évapore lorsqu'on le chauffe. Les seuls représentants de la population baryonique sont donc des protons et des neutrons libres. Par contre, lorsque la température diminue, la thermodynamique favorise la formation des noyaux. Les nucléons perdent en effet de l'énergie interne U lorsqu'ils s'associent. Le défaut de masse correspondant est responsable de la cohésion du noyau qui, par ailleurs, est un état lié. L'énergie libérée lors de la transformation de l'hydrogène en hélium assure par exemple aux étoiles une source quasi inépuisable de chaleur et leur permet de briller pendant plusieurs milliards d'années. A basse température, les noyaux ont donc naturellement tendance à se former. Cependant, pendant le big-bang, la densité des nucléons est bien trop faible pour permettre aux réactions faisant intervenir plus de deux particules en même temps d'être plus rapides que l'expansion de l'univers et la décroissance de la température ambiante. Même si la thermodynamique favorise une très forte abondance d'hélium, noyau dont le défaut de masse est important, la réaction permettant à deux neutrons et à deux protons de s'associer directement au sein d'un noyau de ${}^4\text{He}$ est extrêmement peu probable et ne se déroule pratiquement jamais. La thermodynamique est ici tributaire de la cinétique chimique qui dicte l'évolution de l'abondance des divers éléments. Seules les réactions à deux particules sont autorisées. La synthèse des noyaux légers est donc une longue succession de réactions à deux corps. Elle commence tout d'abord par la formation du deutérium, véritable passage obligé, au cours de laquelle un neutron et un proton fusionnent :



La réaction inverse est possible. Le noyau de deutérium est susceptible d'être photodissocié.

Problème n° II-15 – Niveau [3] : On veut illustrer ici le fait que les réactions à deux particules dans l'état initial ou final sont rapides en regard de l'expansion de l'univers. On s'intéresse à la synthèse (II.77) du deutérium. La section efficace σ_{np} correspondante vaut environ 100 millibarns.

Problème n° II-15 – Niveau [1] : Le rapport du nombre de baryons au nombre de photons n_B/n_γ sera exprimé en unité de 10^{-10} et noté η_{10} . Montrer que le taux d'interaction d'un neutron libre sur un proton vaut

$$\lambda(n + p \rightarrow D) \sim \sigma_{np} v_B n_B \sim (100 \text{ s}^{-1}) \eta_{10} T_9^{7/2} , \quad (\text{II.78})$$

où T_9 désigne la température exprimée en milliards de Kelvins. Comparer ce taux de fusion au taux d'expansion donné, par exemple, par la relation (II.43) et démontrer que leur rapport vaut

$$\frac{\lambda(n + p \rightarrow D)}{H} \sim 2 \times 10^4 \eta_{10} T_9^{3/2} . \quad (\text{II.79})$$

On rappelle qu'une température d'un MeV vaut 11.6 milliards de Kelvins.

Au-dessus d'une température d'environ un million de Kelvins, la réaction de fusion qui synthétise le deutérium est en équilibre chimique. La constante d'équilibre K_X correspondante dépend essentiellement de la température du milieu et de l'abondance baryonique. Les noyaux ayant des vitesses non-relativistes, la densité d'une espèce nucléaire i s'exprime comme :

$$n_i = g_i \left\{ \frac{M_i T}{2\pi} \right\}^{3/2} e^{\frac{\mu_i - M_i}{T}} , \quad (\text{II.80})$$

où μ_i désigne son potentiel chimique. Puisque la réaction de fusion (II.77) est en équilibre et que le potentiel chimique des photons est nul, nous avons $\mu_D = \mu_n + \mu_p$.

Problème n° II-16 – Niveau [2] : Le défaut de masse du deutérium est donné par la relation

$$B_D = M_p + M_n - M_D \sim 2.2 \text{ MeV} . \quad (\text{II.81})$$

En déduire que la constante K_X de l'équilibre chimique (II.77) s'exprime comme :

$$K_X = \frac{X_D}{X_n X_p} = \frac{2^{7/2}}{\sqrt{\pi}} \zeta(3) \left\{ \frac{n_B}{n_\gamma} \right\} \left\{ \frac{g_D}{g_p g_n} \right\} \left\{ \frac{M_D T}{M_p M_n} \right\}^{3/2} e^{B_D/T} . \quad (\text{II.82})$$

Neutrons et protons ont chacun deux états de spin. Le deutérium, de spin nucléaire égal à 1, est associé à trois états quantiques différents. Montrer alors que la relation précédente devient

$$K_X \sim 7 \times 10^{-16} \eta_{10} T_9^{3/2} e^{22.52/T_9} . \quad (\text{II.83})$$

Le deutérium est d'autant plus dissocié que les baryons sont dilués. La loi des équilibres chimiques prévoit bien en ce cas un déplacement de la réaction (II.77) vers la gauche. Lorsque la température décroît et prend successivement les valeurs $T_9 = 2, 1$ et 0.5 , la constante d'équilibre correspondant à $\eta_{10} = 1$ vaut respectivement 7×10^{-10} , 8.5×10^{-5} et 3.6×10^6 . Son augmentation est extrêmement brutale. Aux alentours d'une température d'un milliard de Kelvins et alors que l'univers est âgé d'environ 200 secondes, l'équilibre chimique (II.77) présidant à la fusion du deutérium est complètement déplacé vers la droite. La fournaise ambiante n'est plus assez chaude pour détruire le deutérium dont la formation entraîne toute une série de réactions nucléaires. La nucléosynthèse primordiale était auparavant inhibée par la photodissociation du deutérium qui n'existait qu'à l'état de traces. Vers un milliard de Kelvins, ce verrou disparaît. La synthèse des éléments peut enfin se dérouler.

3.2) Le nombre de familles de neutrinos.

La figure II.6 est très semblable au diagramme II.5. La fraction de neutrons X_n est tracée cette fois en fonction de la température T_9 , exprimée en milliards de Kelvins. La courbe en tirets correspond à la valeur d'équilibre X_n^0 . La courbe en pointillés représente l'augmentation brutale de la constante K_X de l'équilibre chimique (II.77) associé à la synthèse du deutérium. Vers un milliard de Kelvins, K_X augmente rapidement et devient d'un coup supérieur à l'unité. La réaction (II.77) est totalement déplacée vers la droite et les noyaux légers se forment. Pratiquement tous les neutrons disponibles sont alors absorbés par la synthèse de l'hélium ${}^4\text{He}$, l'élément de loin le plus abondant après l'hydrogène. Sa contribution à la masse totale de la matière baryonique est notée Y_p . Elle est donnée avec une bonne approximation par le double de la valeur de la fraction neutronique X_n au moment où le deutérium se forme, donc à l'instant où la constante d'équilibre K_X devient supérieure à une valeur critique qui, dans la pratique, est de l'ordre de $10^{-6} - 10^{-5}$.

La fraction neutronique X_n^0 et la constante K_X ne dépendent que de la température T du milieu. Il en va d'ailleurs de même de la température T_ν des neutrinos en vertu de la relation (II.50). Ces quantités ne dépendent pas de la cinétique d'expansion de l'espace. Ce n'est pas le cas de la fraction neutronique X_n qui est tributaire du rapport entre la durée de vie du neutron et l'âge de l'univers. A température fixée, ce dernier dépend du taux d'expansion H et de la densité d'énergie $\rho(T)$ du plasma primordial. Or celle-ci est elle-même fonction, entre autre, du nombre N_ν de familles de neutrinos à deux états de spin via le coefficient g_{eff} et la relation (II.49). Il existe donc une relation entre l'abondance Y_p d'hélium primordial et le nombre N_ν d'espèces différentes de neutrinos.

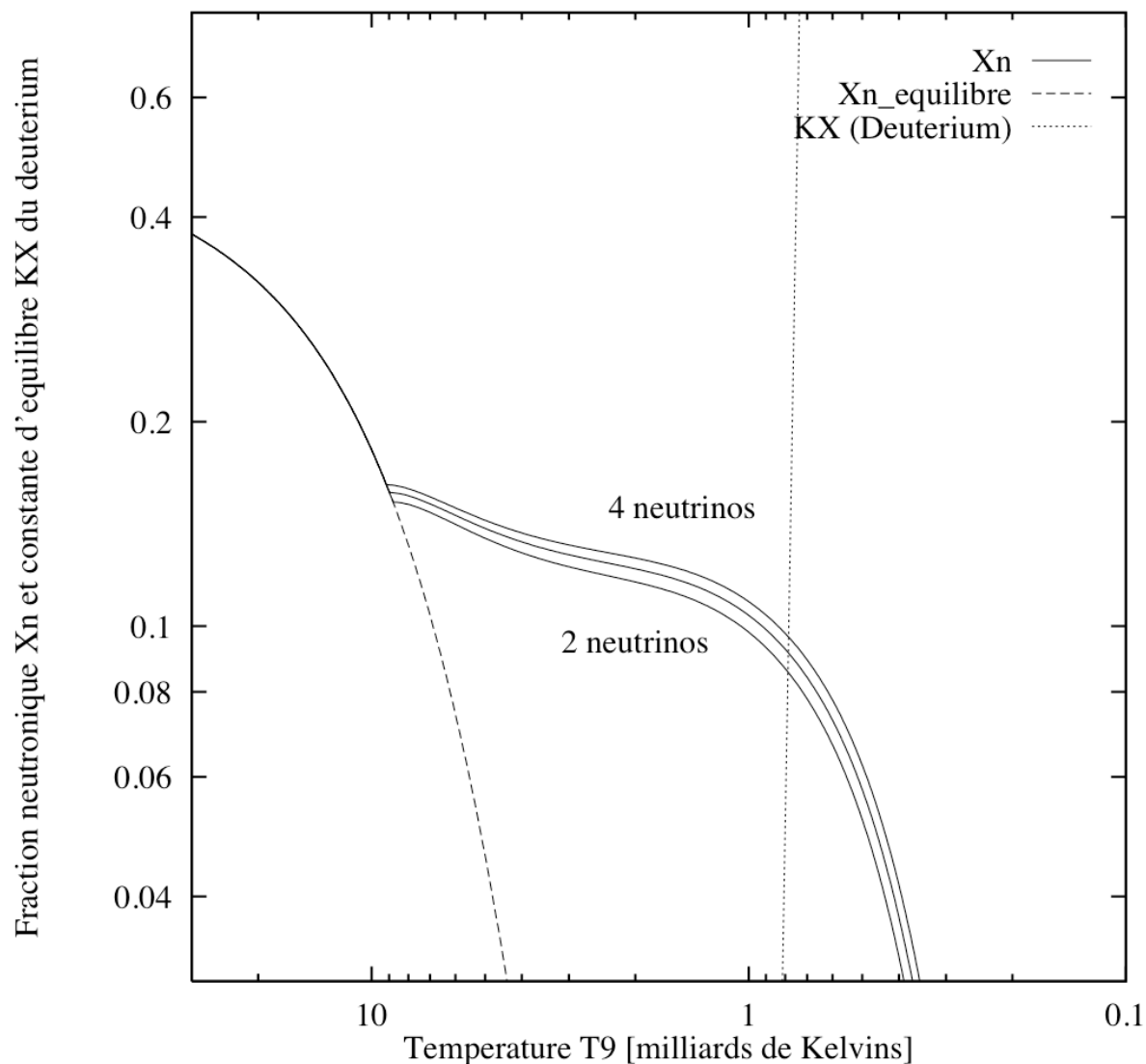


Figure II.6: La fraction de neutrons X_n est tracée cette fois en fonction de la température T_9 , exprimée en milliards de Kelvins. La courbe en tirets correspond à la valeur d'équilibre X_n^0 . La courbe en pointillés représente l'augmentation brutale de la constante K_X de l'équilibre chimique (II.77). Les trois courbes en trait plein représentent l'évolution de X_n . Du bas vers le haut, le nombre de familles de neutrinos prend successivement les valeurs $N_\nu = 2, 3$ et 4.

La nucléosynthèse primordiale constitue ainsi un sujet d'intérêt commun à la cosmologie et à la physique des particules. Sur la figure II.6, les courbes en trait plein représentent l'évolution de X_n . Du bas vers le haut, on a considéré successivement les cas $N_\nu = 2, 3$ et 4. Plus N_ν est élevé, plus rapide est l'expansion. Les neutrons ont de moins en moins le temps de se désintégrer. En effet, le laps de temps $t_N - t_F$ diminue lorsque N_ν augmente. L'instant t_F correspond à la rupture de l'équilibre de transmutation entre protons et neutrons. L'instant t_N est celui où la constante K_X associée à la formation du deutérium franchit le seuil critique au-delà duquel la nucléosynthèse se déchaîne. Plus l'expansion est rapide, plus importante est la fraction des neutrons qui survivent à la désintégration et qui se retrouvent protégés au sein de noyaux d'hélium.

Problème n° II-17 – Niveau [2] : On veut relier analytiquement l'accroissement δY_p de l'abondance d'hélium primordial à l'augmentation δN_ν du nombre de familles de neutrinos. La fraction neutronique X_n^N à l'instant t_N où la réaction (II.77) bascule vers la fusion du deutérium fixe la valeur de Y_p

$$Y_p = 2 X_n^N = 2 \Lambda X_n^F . \quad (\text{II.84})$$

La valeur X_n^F de la fraction neutronique à l'instant t_F du gel des réactions de transmutation entre neutrons et protons est reliée à X_n^N par :

$$X_n^N = \Lambda X_n^F = e^{-(t_N - t_F)/\tau_n} X_n^F \simeq e^{-t_N/\tau_n} X_n^F . \quad (\text{II.85})$$

En prenant $\tau_n \sim 900$ secondes, $t_N \sim 200$ secondes et $Y_p \sim 0.24$, calculer Λ . Montrer que $X_n^F \simeq 0.15$, $X_p^F \simeq 0.85$ et $Q/T_F \simeq 1.735$. On considère maintenant une petite variation δg_{eff} du nombre effectif de degrés de liberté d'énergie du plasma primordial. Montrer tout d'abord que la variation de l'abondance d'hélium s'écrit

$$\frac{\delta Y_p}{Y_p} = \left\{ \frac{\delta \Lambda}{\Lambda} = -\frac{\delta t_N}{\tau_n} \right\} + \left\{ \frac{\delta X_n^F}{X_n^F} = X_p^F \left(\frac{Q}{T_F} \right) \left(\frac{\delta T_F}{T_F} \right) \right\} . \quad (\text{II.86})$$

La température T_N à laquelle le deutérium cesse d'être photodétruit ne varie pratiquement pas. En vous aidant de la relation (II.36), montrer que

$$\frac{\delta t_N}{t_N} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}} . \quad (\text{II.87})$$

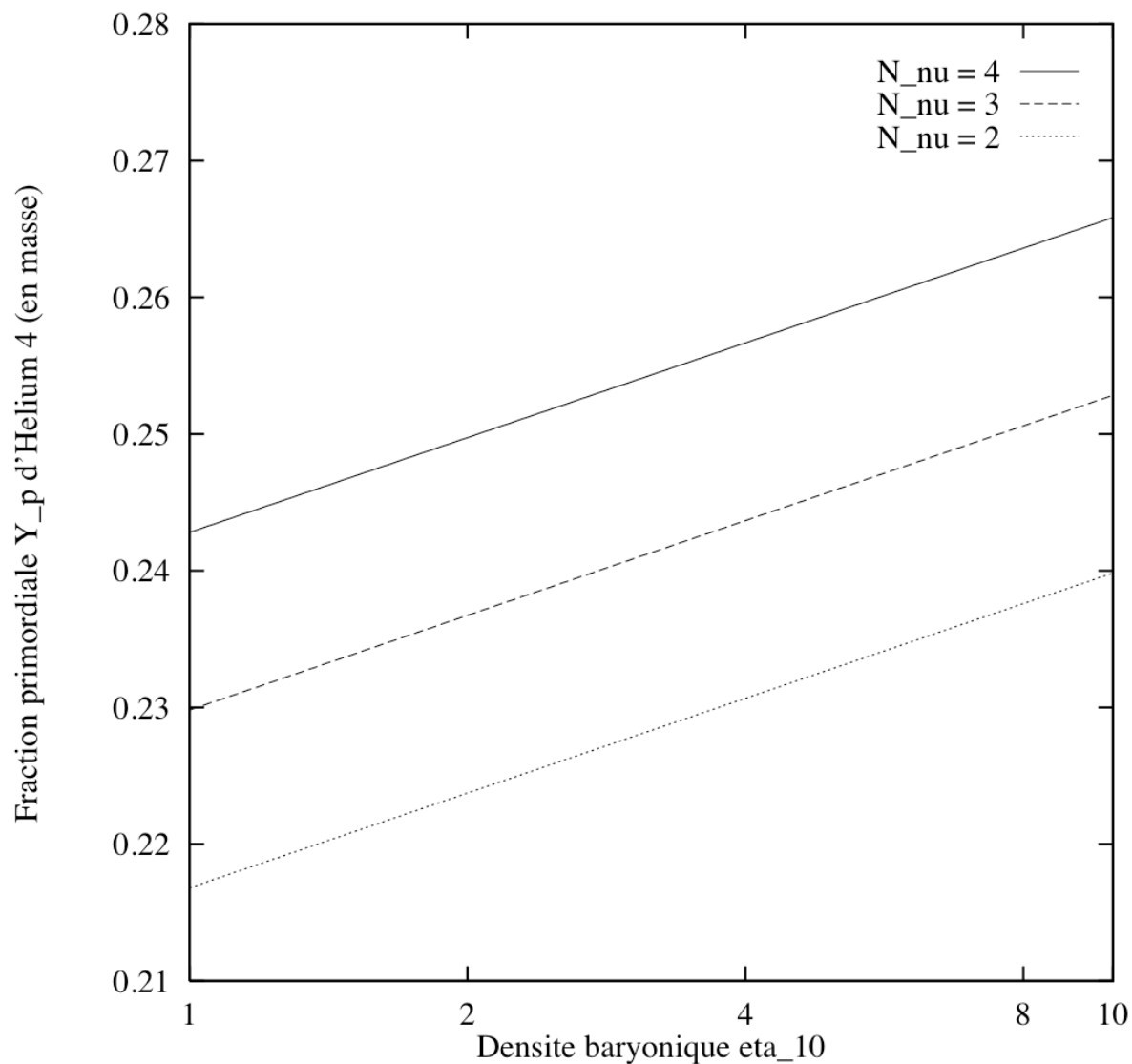


Figure II.7: L'abondance Y_p d'hélium primordial augmente avec la densité baryonique. Le paramètre η_{10} est égal au rapport n_B/n_γ exprimé en unité de 10^{-10} . La quantité d'hélium dépend également du nombre N_ν de familles de neutrinos à deux états d'hélicité. Du bas vers le haut, les trois courbes correspondent respectivement à $N_\nu = 2$ (pointillés), 3 (tirets) et 4 (trait plein).

Problème n° II-17 – Niveau [2] : La température T_F du gel des interactions faibles correspond au moment où le taux de transmutation devient égal au taux d'expansion

$$G_F^2 T_F^5 \sim \lambda(p \rightleftharpoons n) = H(T_F) \sim g_{\text{eff}}^{1/2} \frac{T_F^2}{M_P} , \quad (\text{II.88})$$

de sorte que T_F est proportionnelle à $g_{\text{eff}}^{1/6}$. En déduire que

$$\frac{\delta T_F}{T_F} = \frac{1}{6} \frac{\delta g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}} , \quad (\text{II.89})$$

et que

$$\frac{\delta Y_p}{Y_p} = \left\{ \frac{t_N}{2 \tau_n} + \left(\frac{X_p^F}{6} \right) \left(\frac{Q}{T_F} \right) \right\} \frac{\delta g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}} . \quad (\text{II.90})$$

En prenant $N_\nu = 3$ et en utilisant la relation (II.49), montrer que le résultat recherché est

$$\delta Y_p = 0.014 \delta N_\nu . \quad (\text{II.91})$$

Chaque famille supplémentaire de neutrinos provoque une augmentation de l'abondance d'hélium primordial d'environ 1,4%. La figure II.7 illustre l'augmentation de la quantité d'hélium primordial avec le nombre N_ν de familles de neutrinos. La fraction Y_p est tracée en fonction de l'abondance baryonique η_{10} , pour trois valeurs différentes de N_ν . Lorsque la densité baryonique croît, la réaction (II.77) est déplacée vers la formation du deutérium dont la photodissociation est moins efficace. Le deutérium se forme plus rapidement et la synthèse de l'hélium tarde moins. L'instant t_N a donc tendance à diminuer lorsque l'abondance baryonique augmente. De nouveau, les neutrons ont de moins en moins de temps pour se désintégrer en protons. Il en reste plus. C'est pourquoi Y_p augmente avec le rapport n_B/n_γ . Or la quantité d'hélium primordial est contrainte par les observations astronomiques comme nous le verrons dans la prochaine section. Elle ne peut dépasser une limite supérieure Y_p^{max} de l'ordre de 24 à 25% de sorte que la contrainte correspondante sur le nombre N_ν de familles de neutrinos est donnée par [1]

$$N_\nu \lesssim 4.5 + 78 (Y_p^{\text{max}} - 0.25) . \quad (\text{II.92})$$

La contrainte cosmologique $N_\nu \lesssim 4$ était connue depuis le début des années 1980. Cependant, il a fallu attendre le grand accélérateur du LEP (Large Electron Positron ring) pour avoir une confirmation éclatante de cette prédiction cosmologique. Des collisions électrons-positrons ont été réalisées à partir de 1989, exactement à l'énergie du boson de

jauge Z^0 , de sorte que la production de paires $f\bar{f}$ de particules devient résonnante

$$e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow f + \bar{f} . \quad (\text{II.93})$$

Des millions d'événements ont ainsi été produits et analysés. La largeur de la résonance du Z^0 a été finement mesurée en faisant varier légèrement l'énergie de l'accélérateur. Cette largeur est précisément égale au taux de désintégration du boson Z^0 et dépend du nombre d'espèces susceptibles d'être produites. La contribution d'un neutrino de masse m à la largeur du Z^0 est donnée par la physique des particules et vaut :

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}) = \frac{\alpha}{24 \sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} M_{Z^0} \left\{ 1 - \frac{m^2}{M_Z^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{4m^2}{M_Z^2} \right\}^{1/2} , \quad (\text{II.94})$$

où $\alpha = 1/137$ est la constante de structure fine et où $\theta_W \simeq 27^\circ$ est l'angle associé aux interactions faibles. La masse M_Z du boson de jauge vaut environ 91 GeV. Un neutrino de masse nulle engendre une contribution de 167 MeV à la largeur Γ_Z . Cette dernière a été mesurée avec précision et seules trois familles de neutrinos sont autorisées. L'accord entre le résultat du LEP et la prédiction cosmologique est remarquable.

3.3) Un délicat problème de cinétique chimique.

Dès que le deutérium cesse d'exister à l'état de traces, une série de réactions conduit rapidement à la formation de l' ^4He . Les noyaux de tritium et d' ^3He sont synthétisés grâce aux fusions $\text{D}(\text{p}, \gamma)^3\text{He}$, $\text{D}(\text{D}, \text{n})^3\text{He}$ et $\text{D}(\text{D}, \text{p})\text{T}$. Ces derniers éléments peuvent se transformer l'un en l'autre via la transmutation $^3\text{He}(\text{n}, \text{p})\text{T}$. L' ^4He est alors formé par les processus $\text{T}(\text{D}, \text{n})^4\text{He}$ et $^3\text{He}(\text{D}, \text{p})^4\text{He}$. Le mécanisme dominant est la fusion du deutérium et du tritium. A basse densité baryonique, l'abondance du lithium ^7Li est déterminée par la compétition entre la création $^4\text{He}(\text{T}, \gamma)^7\text{Li}$ et la destruction $^7\text{Li}(\text{p}, ^4\text{He})^4\text{He}$. Cette abondance décroît avec η . A haute densité par contre, elle se met à augmenter car la réaction dominante est la synthèse du béryllium $^4\text{He}(^3\text{He}, \gamma)^7\text{Be}$ qui se désintègre ensuite en lithium via $^7\text{Be}(e^-, \nu_e)^7\text{Li}$. La synthèse des éléments légers est un délicat problème de cinétique chimique où interviennent de multiples réactions nucléaires qui, à priori, ne sont pas à l'équilibre. L'abondance en masse de l'élément i de numéro atomique A_i est notée X_i

$$X_i = A_i \frac{n_i}{n_B} , \quad (\text{II.95})$$

et son évolution obéit à un ensemble d'équations différentielles couplées

$$\frac{1}{A_i} \frac{dX_i}{dt} = \pm \sum_j \frac{X_j}{A_j} [j] \pm \sum_{j,k} \frac{X_j}{A_j} \frac{X_k}{A_k} [j\ k] . \quad (\text{II.96})$$

Le taux de désintégration du noyau j est noté $[j]$. Le terme $[j k]$ est relié à la section efficace de l'interaction des deux éléments j et k

$$[j k] = \langle \sigma v \rangle_{jk}(T) n_B , \quad (\text{II.97})$$

et ne dépend que de la température et de la densité baryonique.

L'abondance Y_p d' ^4He augmente avec la densité baryonique η . Dans le problème suivant, on trouve une dépendance en $\delta Y_p \sim 0.09 \delta \ln \eta$ alors qu'une résolution numérique du réseau d'équations différentielles (II.96) conduit à une variation plus douce en $\delta Y_p \sim 0.01 \delta \ln \eta$. Les quantités d' ^3He et de deutérium décroissent fortement avec l'abondance baryonique n_B . Les contraintes sur η déduites à partir des mesures de leurs abondances respectives seront donc plus sévères ici que dans le cas de l' ^4He . Finalement, l'abondance de lithium présente un minimum caractéristique pour une abondance baryonique $\eta_{10} \sim 3$. Les prédictions de la théorie et les contraintes provenant de l'observation sont résumées dans les figures présentant les abondances de deutérium, d' ^3He et ^4He ainsi que de lithium. Ces dernières dépendent de la densité baryonique.

Problème n° II-18 – Niveau [1] : *Montrer qu'une petite variation de la durée de vie du neutron engendre la variation de l'abondance d'hélium primordial*

$$\frac{\delta Y_p}{Y_p} = \left\{ \frac{t_N}{\tau_n} + \left(\frac{X_p^F}{3} \right) \left(\frac{Q}{T_F} \right) \right\} \frac{\delta \tau_n}{\tau_n} . \quad (\text{II.98})$$

En déduire que la variation $\delta \tau_n$ de la durée de vie du neutron conduit à

$$\delta Y_p = 0.00019 \delta \tau_n , \quad (\text{II.99})$$

où $\delta \tau_n$ est exprimée en seconde. De même, en s'aidant de la relation (II.82), montrer que l'abondance Y_p d'hélium et la densité baryonique η sont reliées par

$$\frac{\delta Y_p}{Y_p} = \left\{ \frac{2 t_N}{\tau_n} \right\} \left\{ \frac{B_D}{T_N} - \frac{3}{2} \right\}^{-1} \delta \ln \eta \sim 0.36 \delta \ln \eta . \quad (\text{II.100})$$

En prenant $Y_p \simeq 0.24$ pour une abondance baryonique de $\eta_{10} = 1$, en déduire que

$$Y_p(^4\text{He}) = 0.246 + 0.014 \delta N_\nu + 0.00019 \delta \tau_n + 0.09 \ln \left(\frac{\eta_{10}}{5} \right) . \quad (\text{II.101})$$

Une solution numérique récente donne une abondance d'hélium égale à :

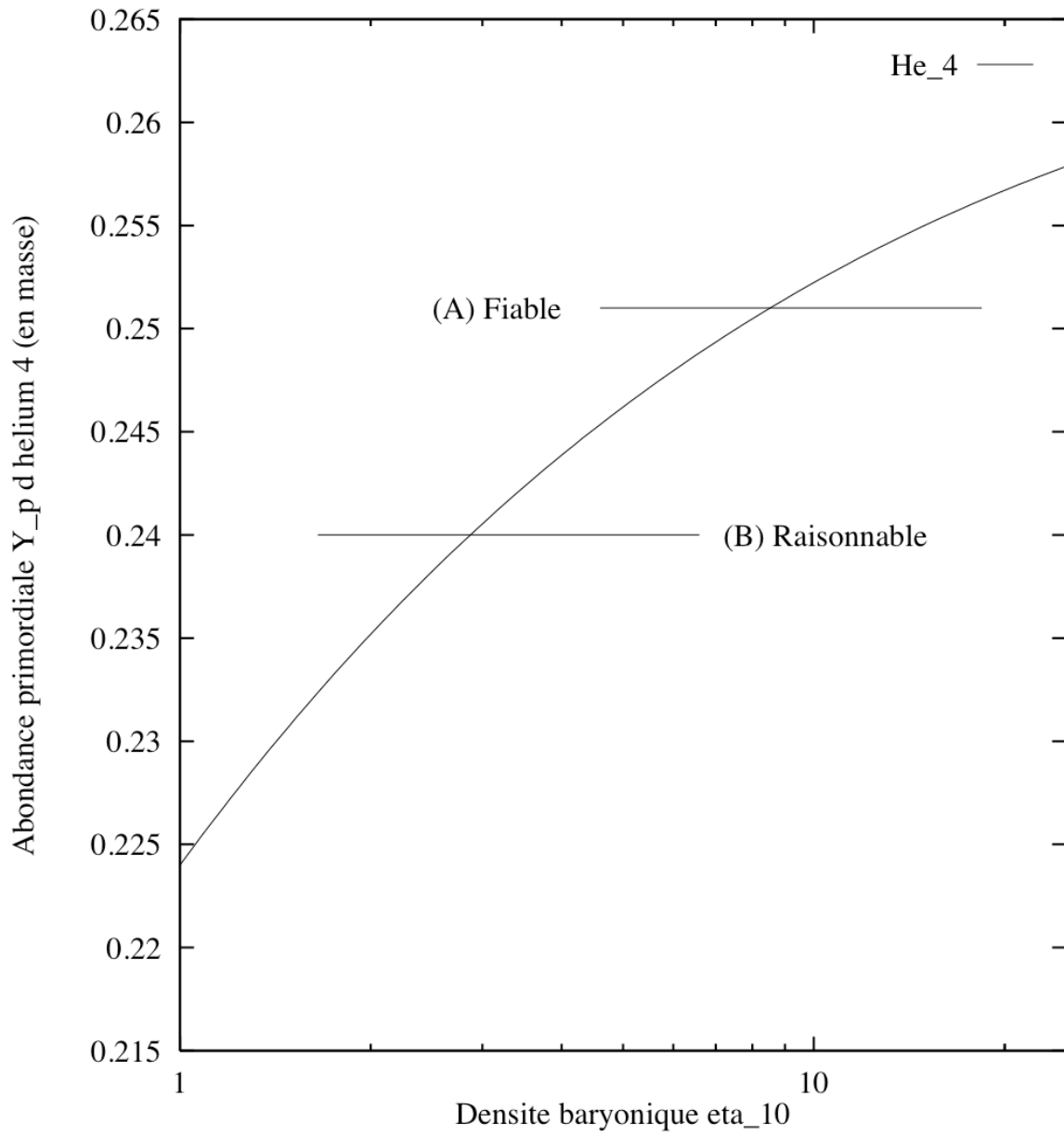
$$Y_p(^4\text{He}) = 0.2459 + 0.013 \delta N_\nu + 0.0002 \delta \tau_n + 0.01 \ln \left(\frac{\eta_{10}}{5} \right) . \quad (\text{II.102})$$

Commentaires ?

L'hélium est traqué dans les nuages d'hydrogène ionisé HII des galaxies compactes bleues, objets connus pour leur faible métallicité [†]. L'abondance primordiale $Y_p(^4\text{He})$ est déduite par une extrapolation à métallicité nulle des observations. Le résultat est cependant susceptible d'être entaché d'erreurs systématiques. Tout d'abord, les simulations théoriques des raies de recombinaison d'un mélange d'hydrogène et d'hélium ionisés ne donnent pas toutes les mêmes spectres d'émission. Il se peut ensuite qu'une fraction importante de l'hélium soit neutre. Finalement, l'extrapolation à métallicité nulle est simplement linéaire et il n'est pas évident qu'elle soit correcte. C'est pourquoi nous considérerons que la limite supérieure (A) est fiable alors que la contrainte (B) est certainement raisonnable. Le deutérium est observé dans les spectres d'absorption des nuages d'hydrogène neutre. Ses raies sont légèrement décalées par rapport à celle de l'hydrogène par effet isotopique. Puisque cet élément est essentiellement détruit dans les étoiles, son abondance solaire donne une limite inférieure fiable (C) sur la valeur primordiale de X_D . Le deutérium a également été observé en quantités variables dans la forêt Lyman α des raies d'absorption de nuages d'hydrogène neutre situés en direction de lointains quasars. Ces nuages sont à des distances cosmologiques car leur décalage vers le rouge est important avec $z \sim 3.3-3.6$. Au moment où la lumière en provenance du quasar traverse le nuage le long de la ligne de visée, l'univers est encore très jeune. De telles observations permettent de remonter aux abondances primordiales qui varient d'un auteur à l'autre de 2×10^{-5} à 2×10^{-4} environ. La controverse fait rage et la limite (D) n'est pas encore complètement sûre. L' ^3He est à la fois détruit et produit dans les étoiles. La limite supérieure (E) sur la somme $(D + ^3\text{He})$ provient des observations dans le système solaire et de l'hypothèse que plus d'un quart de l' ^3He primordial a subsisté depuis sa formation. Finalement, le ^7Li est détruit dans les étoiles à l'instar du deutérium. Il survit cependant à la surface à condition de ne pas être transporté par convection à l'intérieur. L'abondance $(^7\text{Li}/\text{H})$ vaut $\sim 10^{-9}$ pour les étoiles jeunes du disque de la galaxie (population I) et $\sim 10^{-10}$ pour les étoiles vieilles du halo (population II). Deux théories s'opposent. Pour les uns, le lithium est détruit au sein des étoiles de population II et les observations concernant les étoiles du disque donnent bien l'abondance primordiale et conduisent à la limite (F). Pour les autres, les étoiles de population II reflètent par contre l'abondance originelle, d'où la contrainte (G). Le ^7Li est alors produit dans les étoiles, par exemple lors de la phase AGB ou encore dans les novae. Le ^6Li de son côté est produit par spallation du rayonnement cosmique sur le gaz du milieu interstellaire. Le rapport $^7\text{Li}/^6\text{Li}$ mesuré actuellement est de l'ordre de 12,5.

[†]En astronomie, l'usage veut que tous les éléments plus lourds que l'hydrogène et l'hélium soient appelés métaux, y compris l'oxygène et l'azote.

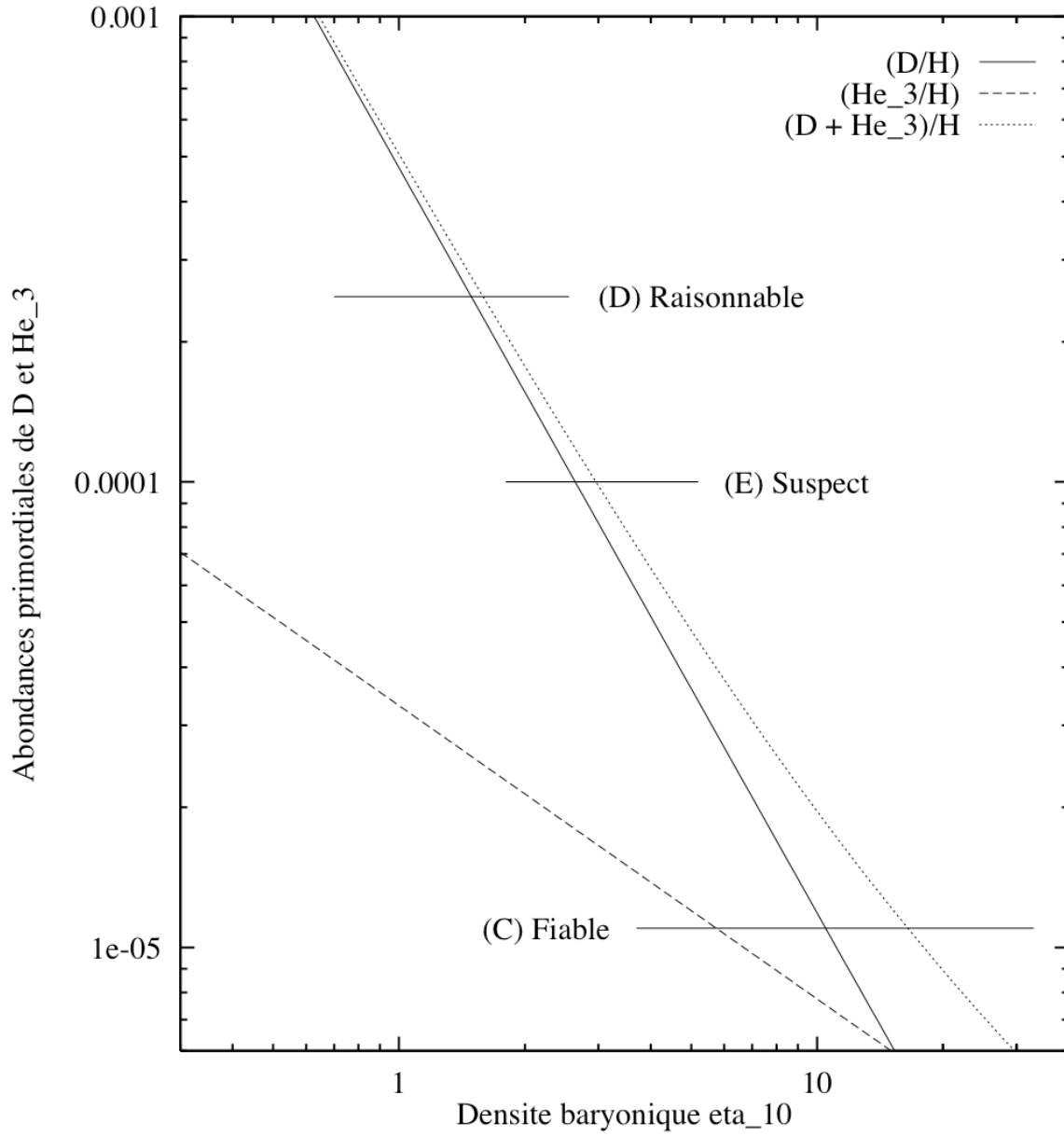
${}^4\text{He}$



$$Y_p({}^4\text{He}) \lesssim 0.25 \quad \Rightarrow \quad \eta_{10} \lesssim 9.2 \quad (\text{A})$$

$$Y_p({}^4\text{He}) \lesssim 0.24 \quad \Rightarrow \quad \eta_{10} \lesssim 3.3 \quad (\text{B})$$

D et ^3He

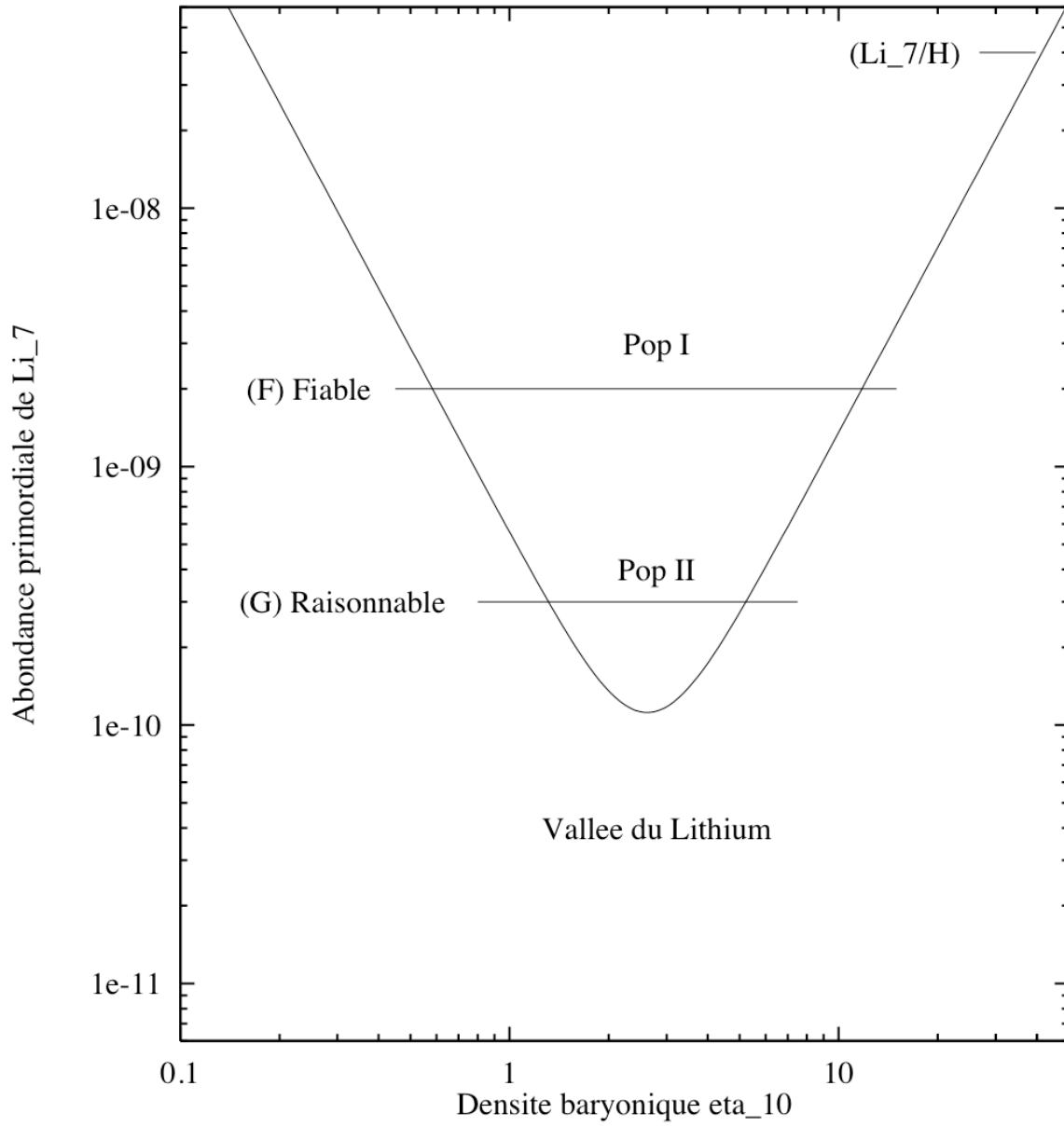


$$(\text{D}/\text{H})_{\text{p}} \gtrsim 1.1 \times 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \eta_{10} \lesssim 11 \quad (\text{C})$$

$$(\text{D}/\text{H})_{\text{p}} \lesssim 2.5 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \eta_{10} \gtrsim 1.3 \quad (\text{D})$$

$$\{(\text{D} + {}^3\text{He})/\text{H}\}_{\text{p}} \lesssim 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \eta_{10} \gtrsim 2.6 \quad (\text{E})$$

${}^7\text{Li}$



$$\left(\frac{{}^7\text{Li}}{\text{H}}\right)_{\text{p}}^I \lesssim 1.5 \times 10^{-9} \quad \Rightarrow \quad 0.41 \lesssim \eta_{10} \lesssim 14 \quad (\text{F})$$

$$\left(\frac{{}^7\text{Li}}{\text{H}}\right)_{\text{p}}^{II} \lesssim 2.6 \times 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad 1 \lesssim \eta_{10} \lesssim 5.9 \quad (\text{G})$$

Avant de résumer les résultats précédents, il convient de définir le paramètre Ω_B . Il s'agit du rapport de la densité actuelle des nucléons (appelés également baryons) à la densité critique ρ_C au-delà de laquelle l'espace se referme sur lui-même et devient sphérique

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_C} . \quad (\text{II.103})$$

La densité critique ρ_C vaut

$$\rho_C = 2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} h^2 , \quad (\text{II.104})$$

où le paramètre h désigne la constante actuelle de Hubble exprimée en unité de 100 km/s/Mpc. L'abondance baryonique est alors reliée au rapport η_{10}

$$\Omega_B h^2 = 3.7 \times 10^{-3} \eta_{10} . \quad (\text{II.105})$$

Les limites fiables précédentes (A), (C) et (F) conduisent à

$$0.41 \lesssim \eta_{10} \lesssim 9.2 , \quad (\text{II.106})$$

relation qui se traduit par

$$0.0015 < \Omega_B h^2 < 0.034 . \quad (\text{II.107})$$

Les contraintes raisonnables (B), (D) et (G) restreignent fortement les valeurs permises de l'abondance baryonique puisque $1.3 \lesssim \eta_{10} \lesssim 3.3$, soit encore

$$0.0048 < \Omega_B h^2 < 0.012 . \quad (\text{II.108})$$

Si l'on tient compte finalement de la limite (E), le paramètre η_{10} est compris entre 2.6 et 3.3, de sorte que l'abondance baryonique est dès lors connue avec une précision d'environ 10%

$$\Omega_B h^2 = 0.011 \pm 0.0013 . \quad (\text{II.109})$$

Cependant, la limite (E) est sujette à caution. Par contre, si une forte abondance de deutérium était confirmée par l'observation, notamment des raies d'absorption sur la ligne de visée de certains quasars et si, par exemple, $D/H \simeq (1.9 - 2.5) \times 10^{-4}$, alors l'abondance baryonique deviendrait $\eta_{10} \simeq 1.3 - 1.9$, soit encore

$$\Omega_B h^2 = 0.0058 \pm 0.0010 . \quad (\text{II.110})$$

References

- [1] S. Sarkar, *Reports on Progress in Physics* **59** (1996) 1493.