PHYS 111 – Mécanique
Exercice 3-4 : Tir sur une cible en chute libre
Difficulté : ★☆☆☆

Énoncé

Un canon situé au niveau du sol est pointé dans la direction d'une cible située à une hauteur h et à une distance ℓ du canon. La cible est lâchée au moment pile où le projectile sort du canon.

1. Le projectile touche-t-il la cible ? On considérera que la seule force en présence est le poids.

Résolution

1. Nous allons déterminer les équations horaires de la cible et du projectile et voir si les deux corps peuvent se trouver au même endroit au même moment.

La cible n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et sa trajectoire de la cible est obtenue en écrivant la relation fondamentale de la dynamique

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

soit

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{array} \right.$$

On intègre par rapport au temps,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A \\ \dot{z} = -gt + B \end{array} \right.$$

où A et B désignent des constantes d'intégration. Comme la vitesse de la cible est nulle à $t = 0$, on a $A = B = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{array} \right.$$

On intègre de nouveau par rapport au temps,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = C \\ \dot{z} = -\dfrac{1}{2}gt^2 + D \end{array} \right.$$

À $t = 0$, la cible a pour coordonnées $x = \ell$ et $z = h$, et donc $C = \ell$ et $D = h$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \ell \\ z = h - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$$

Quant au projectile, on peut reprendre la même analyse, et en intégrant la relation fondamentale de la dynamique, on trouve aussi que sa vitesse s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A' \\ \dot{z} = -gt + B' \end{array} \right.$$

Pour le projectile, la vitesse initiale (à $t = 0$) s'écrit

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

et donc $A' = v_0 \cos\alpha$ et $B' = v_0 \sin\alpha$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$$

On intègre une deuxième fois par rapport au temps,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v_0 t \cos\alpha + C' \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + D' \end{array} \right.$$

Comme le projectile se trouve au temps $t = 0$ aux coordonnées $x = z = 0$, on a $C' = D' = 0$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v_0 t \cos\alpha \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{array} \right.$$

La cible descend le long de la droite $x = \ell$, et si le projectile doit la rencontrer, ce ne peut être qu'en $x = \ell$. Calculons l'altitude à laquelle se trouve le projectile quand il arrive en $x = \ell$. Pour cela, on part de

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

qui relie x au temps. Le projectile il arrive en $x = \ell$ au temps

$$t = \frac{\ell}{v_0 \cos\alpha}$$

qu'on réinjecte dans

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha$$

ce qui donne

$$z_{\text{proj}} = -\frac{1}{2}g\frac{\ell^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0\ell\tan\alpha$$

Au même instant, la cible se trouve à l'altitude

$$z_{\text{cible}} = h - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\frac{\ell^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + h$$

Comme $h = \ell\tan\alpha$, par définition de l'angle α, on a donc

$$z_{\text{cible}} = z_{\text{proj}} \text{ quand } x_{\text{cible}} = x_{\text{proj}} = \ell.$$

Le projectile atteint donc forcément la cible, quelle que soit sa vitesse initiale v_0, pourvu que le canon soit initialement pointé dans la direction de la cible. Ceci provient de l'universalité de la chute libre : le projectile et la cible tombent en même temps et de la même façon sous l'action de leur poids.