PHYS 202 – Mécanique
Exercice 2 : Effet Eötvös et poids des trains
Difficulté : ★★☆☆

Énoncé

Deux trains identiques roulent à la même vitesse v le long de l'équateur, l'un vers l'est et l'autre vers l'ouest. On place une balance dans chacun des trains et on pèse deux objets de même masse.

1. Rappeler la définition du poids, son unité, et indiquer une méthode possible pour le mesurer.

2. Montrer que le poids mesuré n'est pas le même dans les deux trains. On répondra à la question de deux manières, en se plaçant dans le référentiel (non galiléen) lié à la Terre, puis dans les référentiels (non galiléens eux aussi) liés à chaque train.

Résolution

1. Le poids est la force dirigée vers le bas à laquelle est soumis tout objet immobile posé sur un support (une balance) ou suspendu à un fil. Il est principalement dû à l'attraction gravitationnelle de la Terre, et possède aussi une petite composante due à la force centrifuge associée à la rotation de la Terre sur elle-même. Comme toute force, le poids se mesure en newtons dans le Système International d'unités. Pour mesurer le poids d'un objet, on peut le suspendre à un ressort attaché à son autre extrémité et mesurer son allongement et sa direction.

2. Considérons un train qui roule le long de l'équateur. Il faut commencer par choisir le référentiel d'étude, plusieurs choix peuvent sembler naturels : le référentiel terrestre, un référentiel galiléen (non tournant donc) centré sur la Terre, ou un référentiel lié au train.

Première méthode : référentiel terrestre

Choix du système étudié : L'objet que l'on pèse.

Repère : On se place dans un référentiel lié à la Terre, il est en rotation et donc non galiléen.

Bilan des forces exercées sur le système :

– le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui inclut l'attraction gravitationnelle de la Terre ainsi que la force centrifuge ;
– la force de Coriolis $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$;
– la réaction de la balance $\vec{R}$.

Dans ce référentiel, les corps sont soumis, en plus de la force d'attraction gravitationnelle de la Terre

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_\oplus m}{R^2}\,\vec{u}_r = m\vec{g}^\star \text{ avec } \vec{g}^\star = -\frac{GM_\oplus}{R^2}\,\vec{u},$$

à la force centrifuge, qui à l'équateur prend la forme simple

$$\vec{F}_{\text{cen}} = mR\Omega^2\vec{u}_r$$

et à la force de Coriolis

$$\vec{F} = 2m\vec{v} \wedge \vec{\Omega}$$

L'objet que l'on pèse est donc soumis à quatre forces, ces trois-là plus la réaction $\vec{R}$ de la balance sur laquelle il est posé. Notons que ce qu'on appelle le poids désigne

$$\vec{P} = m\vec{g}^\star + \vec{F}_{\text{cen}} \equiv m\vec{g}$$

À l'équateur, sa norme vaut

$$P = mg^\star - mR\Omega_\oplus^2 = mg^\star - m\frac{V_\oplus^2}{R}$$

Attention, pour répondre à la question il faut raisonner de manière précise et rigoureuse. La balance est conçue pour mesurer la force qui s'applique sur elle, dans un référentiel au repos. Cette force est égale à $-\vec{R}$, l'opposé de la force exercée sur la balance par l'objet, d'après le principe de l'action-réaction. Appelons-la le poids apparent et notons-là

$$\vec{P}_{\text{app}} = -\vec{R}$$

Il faut donc évaluer cette quantité. On peut être tenté de le faire par des phrases du type « la réaction est égale à l'opposé des autres forces » (ce qui est faux, cf plus bas) ou « la force subie par la balance est égale au poids plus la force de Coriolis » (ce qui est faux aussi). Pour calculer $-\vec{R}$, il faut écrire la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à un système sur laquelle la réaction s'applique : l'objet que l'on pèse,

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{R} = m\vec{a}$$

Dans le référentiel que l'on considère ici, le train décrit une trajectoire circulaire à vitesse constante, son accélération est donc donnée par

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r$$

et donc

$$\vec{P}_{\text{app}} = -\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_c - m\vec{a}$$

$$\vec{P}_{\text{app}} = m\vec{g}^\star + m\frac{V_\oplus^2}{R}\,\vec{u}_r + m\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r + 2m\vec{v} \wedge \vec{\Omega}$$

soit

$$\vec{P}_{\text{app}} = -mg^\star\vec{u}_r + m\frac{V_\oplus^2}{R}\,\vec{u}_r + m\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r \pm 2mv\Omega\vec{u}_r$$

où le signe $\pm$ indique que le signe peut être positif ou négatif, selon le sens de la vitesse $\vec{v}$ du train, il est positif lorsque le train se dirige vers l'est et négatif lorsqu'il se dirige vers l'ouest.

Dans la situation envisagée ici, la force de Coriolis est verticale, elle allège l'objet dans le train se dirigeant vers l'est et l'alourdit dans celui se dirigeant vers l'ouest. C'est l'**effet Eötvös**, du nom du physicien hongrois Loránd Eötvös (1848–1919). La norme du poids apparent est donnée par

$$\boxed{P_{\text{app}} = P - m\frac{v^2}{R} \pm 2mv\Omega_\oplus}$$

On peut remarquer que cette expression devient négative si la vitesse v du train ou si la vitesse de rotation de la Terre $\Omega_\oplus$ deviennent trop importante. Ceci correspond à la situation irréaliste où le train aurait une vitesse suffisante pour être satellisé à la distance R du centre de la Terre. Pour un train se déplaçant à 200 km/h, la correction au poids est de l'ordre de

$$\left|\frac{P - P_{\text{app}}}{P}\right| \approx 7{,}49 \times 10^{-3} \text{ pour un des trains}$$

et

$$\left|\frac{P - P_{\text{app}}}{P}\right| \approx 8{,}56 \times 10^{-3} \text{ pour l'autre}$$

en prenant

$$\Omega_\oplus = 2\pi \,\text{rad} \cdot \text{j}^{-1} = 7{,}27 \times 10^{-5} \,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On remarque que la contribution principale est indépendante du sens de parcours du train.

Deuxième méthode : référentiel lié au train

Choix du système étudié : L'objet que l'on pèse.

Repère : On se place dans un référentiel lié à un des trains, il est en rotation et donc non galiléen.

Bilan des forces exercées sur le système :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui inclut l'attraction gravitationnelle de la Terre et la force centrifuge ;
- La réaction de la balance $\vec{R}$.

Dans le référentiel lié au train, l'objet que l'on pèse est au repos, il n'est donc pas soumis à la force de Coriolis.

Attention, la force centrifuge à laquelle est soumise l'objet diffère de celle que nous venons de calculer. Le train se dirigeant vers l'est parcourt une trajectoire circulaire à la vitesse

$$V_+ = V_\oplus + v$$

où $V_\oplus \equiv R\Omega_\oplus$ désigne la vitesse d'un point de la Terre à l'équateur et v celle du train. Celle-ci vaut numériquement

$$V_\oplus = R\Omega_\oplus \approx 463 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 1670 \text{ km/h}$$

Pour le train qui va vers l'ouest, la vitesse vaut

$$V_- = V_\oplus - v$$

Dans le référentiel lié au train, le bilan des forces fait apparaître l'attraction gravitationnelle $m\vec{g}^\star$, la réaction de la balance et la force centrifuge qui n'est pas la même pour les deux trains,

$$\vec{F}_{\text{cen}} = m\frac{(V_\oplus \pm v)^2}{R}\vec{u}_r$$

soit

$$\vec{F}_{\text{cen}} = \frac{mV_\oplus^2}{R}\vec{u}_r + m\frac{v^2 \pm 2vV_\oplus}{R}\vec{u}_r$$

Le poids apparent vaut alors

$$\vec{P}_{\text{app}} = m\vec{g}^\star + \vec{F}_{\text{cen}} = \vec{P} + m\frac{v^2 \pm 2vV_\oplus}{R}\vec{u}_r$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.