PHYS 202 – Mécanique
Exercice 1 : Déviation vers l'est lors d'une chute libre
Difficulté : ★★☆☆

Énoncé

Du fait de la rotation de la Terre, les objets en chute libre sont déviés vers l'est au cours de leur chute. Ceci fut mis en évidence de manière expérimentale en 1833 par Ferdinand Reich (1799–1882), qui mesura la déviation sur une chute d'une hauteur de 158 m. Cet exercice est dédié à une étude simple de ce phénomène.

On lâche sans vitesse initiale un objet depuis le sol dans un puits de profondeur h, à partir d'un point situé au niveau de l'équateur terrestre. On néglige les frottements, ainsi que les variations de l'accélération de la pesanteur g avec l'altitude. En revanche, on tient compte de la rotation de la Terre, à la vitesse angulaire Ω. On rappelle que la force centrifuge est comptabilisée dans l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ et ne doit pas être considérée comme une force supplémentaire. On supposera dans cet exercice que la direction de $\vec{g}$ est constante au cours du mouvement (on néglige la petite variation de $\vec{g}$ au cours de la déviation vers l'est), une hypothèse qui s'avère être bien justifiée.

1. Montrer que la chute est déviée vers l'est d'une distance

$$y = \frac{gt}{2\Omega}\left\{\sin(2\Omega t) - 1\right\}$$

2. En déduire que dans des conditions de chute réalistes,

$$y \approx -\frac{g\Omega t^3}{3}$$

3. Montrer que la déviation vers l'est sur une chute de hauteur h vaut

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\Omega h^{3/2}}{\sqrt{g}}$$

4. Calculer numériquement la déviation vers l'est pour une chute sur une hauteur de $h = 158\ \mathrm{m}$.

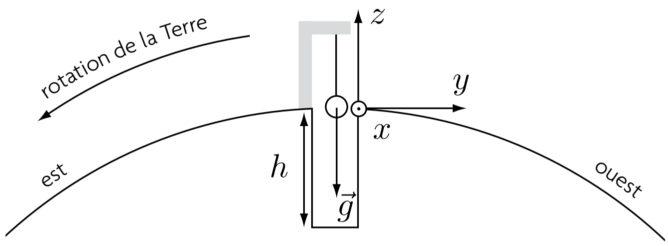
Résolution

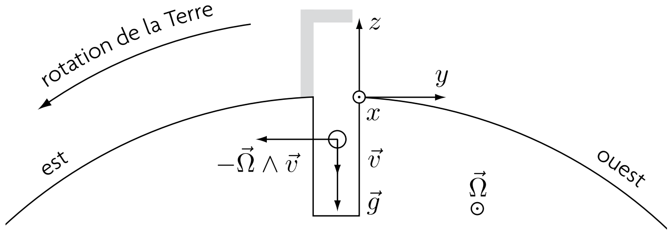
Choix du système étudié : le corps en chute libre.

Repère : On se place dans un référentiel lié à la Terre, il est en rotation et donc non galiléen. On le munit d'un repère direct $Oxyz$ (voir le schéma) où x pointe vers le nord, y vers l'ouest et z à la verticale du sol, vers le haut.

Bilan des forces exercées sur le système :

– poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui inclut l'attraction gravitationnelle de la Terre ainsi que la force centrifuge ;
– force de Coriolis $\vec{F_c} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$.





1. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\Omega\wedge\vec{v}$$

la masse m se simplifie,

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\Omega\wedge\vec{v}$$

soit en composantes

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -g\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\Omega\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

(c'est ici qu'intervient l'hypothèse que $\vec{g}$ a une direction constante) et donc

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -g\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\ -\Omega\dot{z}\\ \Omega\dot{y}\end{pmatrix}$$

ce qui donne trois équations

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = 2\Omega\dot{z}$$
$$\ddot{z} = -g - 2\Omega\dot{y}$$

La première équation est indépendante des deux autres et conduit à $\dot{x} = 0$ (car sa dérivée $\ddot{x}$ étant nulle, $\dot{x}$ est une constante qui doit être nulle d'après les conditions initiales) puis $x = 0$. Le mouvement se fait dans le plan de l'équateur, ce qu'on aurait pu dire dès le début, par symétrie du problème.

En revanche, les deux autres équations sont **couplées**, elles font toutes deux intervenir les coordonnées y et z. C'est pour le moment y qui nous intéresse et on peut éliminer z en dérivant la deuxième

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 2\Omega\ddot{z}$$

et en y remplaçant $\ddot{z}$ par l'expression donnée par la troisième équation,

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 2\Omega\left(-g - 2\Omega\dot{y}\right)$$

qui se réécrit

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\Omega^2\frac{dy}{dt} = -2\Omega g$$

C'est une équation différentielle du troisième ordre, mais en notant $v_y \equiv dy/dt$, elle s'écrit aussi

$$\ddot{v}_y + 4\Omega^2 v_y = -2\Omega g$$

c'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, que l'on sait résoudre :

$$v_y = A\cos(2\Omega t) + B\sin(2\Omega t) - \frac{g}{2\Omega}$$

où A et B sont des constantes d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions initiales : d'une part le corps est lâché sans vitesse initiale, $v_y = 0$ à $t = 0$, d'autre part l'accélération $\dot{v}_y$ est nulle à $t = 0$, d'après la relation fondamentale de la dynamique. On trouve alors que $A = g/2\Omega$ et $B = 0$, soit

$$v_y = \dot{y} = \frac{g}{2\Omega}\left(\cos(2\Omega t) - 1\right)$$

On cherche y, il suffit d'intégrer une fois par rapport au temps,

$$y = \frac{g}{4\Omega^2}\sin(2\Omega t) - \frac{gt}{2\Omega} + C$$

Comme $y(t=0) = 0$, on a $C = 0$ et

$$\boxed{y = \frac{g}{4\Omega^2}\sin(2\Omega t) - \frac{gt}{2\Omega}}$$

2. Le temps de chute est petit devant la période de rotation de la Terre, et donc $\Omega t \ll 1$. On a alors

$$\sin(2\Omega t) \approx 2\Omega t - \frac{8\Omega^3 t^3}{6}$$

et donc

$$y \approx -\frac{g}{4\Omega^2}\frac{8\Omega^3 t^3}{6} = -\frac{g\Omega t^3}{3}$$

Le signe moins indique que le corps est dévié vers l'est.

3. On montre de même que

$$z \approx -\frac{1}{2}gt^2$$

Le temps au bout duquel le corps atteint le fond du puits de hauteur h est donc donné par

$$h \approx -\frac{1}{2}gt^2 \text{ soit } t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

et donc

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\Omega h^{3/2}}{\sqrt{g}}$$

4. Pour une hauteur $h = 158$ m, une vitesse de rotation

$$\Omega = 2\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{j}^{-1} = 7{,}27\times 10^{-5}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

on trouve

$$y \approx 4{,}35\ \mathrm{cm}$$

Ce résultat ne correspond pas exactement à la situation de l'expérience de Reich, car celui-ci n'était pas à l'équateur. Le cas plus général est considéré dans le complément suivant.

Complément 1

Nous avons ici considéré que la chute avait lieu à l'équateur. Le problème est un peu plus difficile à une latitude θquelconque, pour deux raisons. D'une part le vecteur rotation n'est plus dirigé selon l'axe x, mais possède aussi une composant selon z. D'autre part le poids possède une contribution associée à la force centrifuge et ne pointe plus exactement vers le centre de la Terre. Si l'on ne prend en compte que le premier point (c'est-à-dire si on suppose que $\vec{g}$ pointe vers le centre de la Terre, alors le problème reste assez simple. Les équations deviennent alors

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\Omega\cos\theta\\0\\\Omega\sin\theta\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} - 2\Omega\begin{pmatrix}\dot{y}\sin\theta\\ \dot{x}\sin\theta - \dot{z}\cos\theta\\ \dot{y}\cos\theta\end{pmatrix}$$

et donc

$$\ddot{x} = -2\Omega\dot{y}\sin\theta$$

$$\ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin\theta + 2\Omega\dot{z}\cos\theta$$

$$\ddot{z} = -g - 2\Omega\dot{y}\cos\theta$$

En dérivant la deuxième et en injectant les deux autres dans l'équation ainsi obtenue, on arrive à

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\Omega^2\frac{dy}{dt} = -2\Omega g\cos\theta$$

c'est-à-dire la même équation que dans l'exercice, avec un facteur $\cos\theta$ supplémentaire. La déviation vers l'est se calcule alors exactement de la même façon, et on trouve

$$y \approx -\frac{g\Omega t^3\cos\theta}{3}$$

En prenant en compte la contribution de la force centrifuge dans le poids, l'équation de départ s'écrit

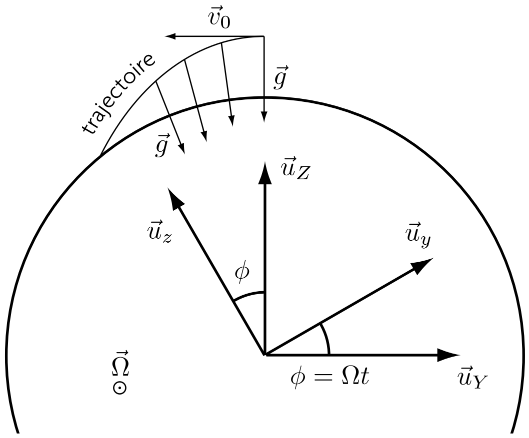
$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-R\Omega^2\cos\theta\sin\theta\\0\\-g + R\Omega^2\cos^2\theta\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-\Omega\dot{z}\\\Omega\dot{y}\end{pmatrix}$$

et après des calculs très similaires aux précédents on arrive à

$$y \approx -\frac{1}{3}(\vec{g}\cdot\vec{u})\Omega t^3\cos\theta$$

où $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe de rotation et pointant vers l'intérieur.

Complément 2



On peut prendre cet exercice d'une manière très différente : du point de vue d'un observateur fixe dans un référentiel galiléen, qui voit la Terre tourner sur elle-même et entraîner avec elle l'objet avant qu'il soit lâché, le problème est dans un sens beaucoup plus simple : une fois lâché avec une vitesse initiale $v_0 = R\Omega$ orthoradiale, l'objet est soumis à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre, c'est le problème de Kepler. On obtient ainsi, dans le référentiel galiléen, l'équation de la trajectoire. On peut ensuite exprimer cette trajectoire dans le référentiel tournant, pour trouver la manière dont on perçoit la chute depuis la Terre en mouvement. Le lecteur est invité à essayer cette approche, nous allons indiquer ici une autre manière de résoudre l'exercice.

Depuis le référentiel galiléen, l'équation du mouvement s'écrit simplement

$$m\vec{a} = m\vec{g} \text{ soit } \vec{a} = \vec{g}$$

Attention cependant, le vecteur $\vec{g}$ n'est pas constant au cours du mouvement, d'une part sa norme varie légèrement avec l'altitude (mais le texte propose de négliger cette variation), d'autre part sa direction change le long du mouvement, pour toujours pointer vers le centre de la Terre. En notant ϕ l'angle indiqué sur le schéma (il s'agit de la variation de **longitude** du corps en mouvement), on a donc, en notant Y et Z les coordonnées dans le référentiel galiléen

$$\ddot{Z} = -g\cos\phi$$

$$\ddot{Y} = +g\sin\phi$$

De plus, on voit sur la figure que

$$\tan\phi = \frac{Y}{R}$$

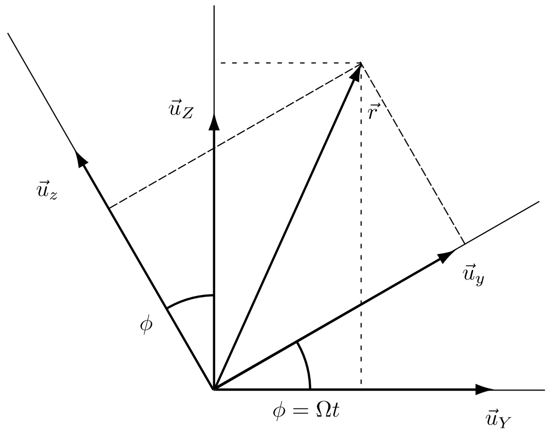
On s'intéresse ici à un mouvement de chute sur une distance courte, $Y \ll R$ (cette hypothèse ne serait pas correcte pour décrire le mouvement d'un satellite autour de la Terre) et donc $\tan\phi \ll 1$, nous sommes dans le cadre de l'approximation des petits angles, soit

$$\tan\phi \approx \phi \text{ et } \sin\phi \approx \phi$$

ce qui donne

$$\phi \approx \frac{Y}{R} \text{ soit } \ddot{Y} = \frac{gY}{R}$$

Ceci se résoud en



$$Y = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

Les conditions initiales $Y(t=0) = 0$ (l'endroit où le corps est lâché) et $\dot{Y}(t=0) = -R\Omega$ (dans le référentiel galiléen, le corps est lancé par la rotation de la Terre), et on trouve

$$A = 0 \text{ et } B = -\frac{\Omega R^{3/2}}{\sqrt{g}}$$

et donc

$$Y = -\frac{\Omega R^{3/2}}{\sqrt{g}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

Bon, cette expression n'est pas très engageante à première vue, on peut la simplifier en tenant compte du fait que l'argument du sinus est un nombre très inférieur à 1. En effet, son carré gt^2/R est de l'ordre du rapport de la distance de chute verticale ($gt^2/2$) et du rayon de la Terre. Le développement limité du sinus,

$$\sin\epsilon \approx \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6}$$

conduit donc à

$$Y \approx -\frac{\Omega R^{3/2}}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t - \frac{g^{3/2}t^3}{6R^{3/2}}\right)$$

et donc

$$Y \approx -\Omega R t + \frac{\Omega g t^3}{6}$$

De la même façon, on aurait obtenu

$$Z \approx R - \frac{1}{2}gt^2$$

Nous savons donc où se trouve le corps à tout instant t. La dernière étape consiste à exprimer ces équations horaires dans les coordonnées (y, z) du référentiel lié à la Terre, ce qui correspond à la chute observée par une personne qui voit tomber le corps en étant lui-même sur Terre.

Il faut effectuer un changement de coordonnées, du repère (YOZ) au repère (yOz). Pour cela, on écrit le vecteur position dans le premier référentiel,

$$\vec{r} = Y\vec{u}_Y + Z\vec{u}_Z$$

On exprime les vecteurs de base dans le référentiel en rotation,

$$\vec{u}_Z = \cos(\Omega t)\vec{u}_z + \sin(\Omega t)\vec{u}_y$$
$$\vec{u}_Y = \cos(\Omega t)\vec{u}_y - \sin(\Omega t)\vec{u}_z$$

et finalement

$$\vec{r} = Y\left[\cos(\Omega t)\vec{u}_y - \sin(\Omega t)\vec{u}_z\right] + Z\left[\cos(\Omega t)\vec{u}_z + \sin(\Omega t)\vec{u}_y\right]$$

soit en réordonnant

$\vec{r} = [Z\cos(\Omega t) - Y\sin(\Omega t)]\,\vec{u}_y + [Z\sin(\Omega t) + Y\cos(\Omega t)]\,\vec{u}_z$

et donc, puisqu'on cherche la déviation y,

$$y = Z\cos(\Omega t) - Y\sin(\Omega t)$$
$$y = \left[R - \frac{1}{2}gt^2\right]\cos(\Omega t) - \left[-\Omega R t + \frac{\Omega g t^3}{6}\right]\sin(\Omega t)$$

Comme le temps de chute est faible devant la période de rotation de la Terre, $\Omega t \ll 1$ et on peut développer le cosinus et le sinus en série,

$$\sin(\Omega t) \approx \Omega t - \frac{\Omega^3 t^3}{6}$$

et

$$\cos(\Omega t) \approx 1 - \frac{\Omega^2 t^2}{2}$$

ce qui donne, après calcul, le même résultat que dans la résolution précédente

$$y \approx -\frac{\Omega g t^3}{3}$$

Attention à une erreur possible, commise par l'auteur de cette correction en abordant l'exercice pour la première fois : on pourrait penser que la trajectoire dans le référentiel galiléen est assez proche d'une parabole (ceci revient à négliger le fait que la direction de $\vec{g}$ varie au cours du mouvement) et on aurait trouvé

$$Y = -R\Omega t \text{ au lieu de } Y = -R\Omega t + \frac{\Omega g t^3}{6}$$

et on aurait finalement trouvé le résultat incorrect

$$y \approx -\frac{\Omega g t^3}{2}$$

Il faut bel et bien tenir compte de la variation de la direction de $\vec{g}$ au cours du mouvement, lorsqu'on étudie le mouvement dans le référentiel galiléen dans lequel la Terre est en rotation. L'auteur s'est consolé de son erreur en apprenant que cette erreur d'un facteur 2/3 avait été commise par Newton lui-même en 1679, pour la même raison : considérer que la trajectoire est assimilable à une parabole.

Remarque : il peut sembler bizarre de négliger la variation de la direction de $\vec{g}$ au cours du mouvement lorsqu'on étudie le mouvement dans le référentiel tournant mais de ne pas pouvoir le faire dans le référentiel fixe. C'est toutefois très naturel, dans le premier cas le mouvement est quasiment vertical, le corps ne s'en écarte que de quelques centimètre sur une chute de 100 m. Dans le second cas le mouvement n'est pas du tout vertical en revanche et la direction de $\vec{g}$ varie davantage au cours du mouvement.