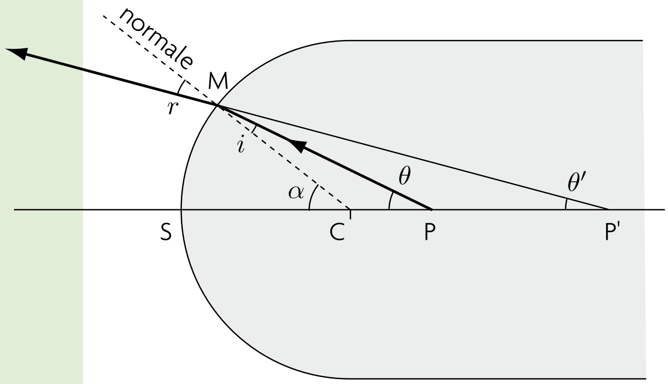
PHYS 112 – Optique géométrique
Exercice 1 : Points de Weierstrass
Difficulté : ★★★☆

Énoncé



Un dioptre sphérique, concave, de rayon R, de centre C, sépare un milieu extérieur d'indice 1 d'un milieu intérieur d'indice n. On appelle S son sommet (intersection du dioptre avec l'axe optique). On place un objet P à l'intérieur du dioptre, comme indiqué sur la figure. Pour un rayon lumineux issu de P et traversant le dioptre, on note P' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe optique. *On ne se place pas dans les conditions de Gauss.*

1. Soit un rayon issu de P et faisant un angle θ avec l'axe optique. Calculer le sinus de son angle d'incidence i sur le dioptre en fonction de θ, de R et de la distance CP que l'on notera p dans la suite. On rappelle que dans tout triangle ABC, les angles et les longueurs des côtés sont reliés par

$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$$

De même, exprimer $\sin r$ en fonction de θ', R et $p' \equiv CP'$. En déduire que

$$np\,\sin\theta = p'\,\sin\theta'$$

2. Établir la relation géométrique entre les angles i, α et θ (voir le schéma pour la définition de α). De même, exprimer la relation entre r, α et θ'.

3. Exprimer l'angle θ en fonction de α et montrer que

$$R^2\sin^2\alpha = (R^2 + p^2 + 2Rp\cos\alpha)\sin^2\theta$$

Montrer la relation analogue entre θ' et α.

4. En général, la position de P' dépend de l'angle θ. Qu'est-ce que cela implique du point de vue du stigmatisme ?

5. Il existe une position unique de P telle que P' ne dépend pas de θ. Ces deux points sont appelés **point de Weierstrass**. Calculer les valeurs de p et de p' correspondantes. Commenter l'intérêt de ces points, du point de vue du stigmatisme.

Résolution

Cet exercice peut être délicat à résoudre si on ne le prend pas dans le bon sens. Une fois lue la correction, essayez de recalculer la position des points de Weierstrass sans aucune indication.

1. Dans le triangle MCP, la relation fondamentale des triangles indique que

$$\frac{\sin i}{p} = \frac{\sin\theta}{R}$$

où l'on a noté $p \equiv CP$. Ceci se réécrit

$$R\sin i = p\,\sin\theta \qquad (1)$$

De même, en se plaçant dans le triangle MCP', on montre que

$$R\sin r = p'\,\sin\theta' \qquad (2)$$

D'après la loi de Snell-Descartes, $n\sin i = \sin r$ et donc, d'après les deux relations précédentes,

$$np\,\sin\theta = p'\,\sin\theta' \qquad (3)$$

2. Les angles vérifient les relations

$$i + \theta + (\pi - \alpha) = \pi \text{ soit } \boxed{i = \alpha - \theta} \qquad (4)$$

$$r + \theta' + (\pi - \alpha) = \pi \text{ soit } \boxed{r = \alpha - \theta'} \qquad (5)$$

3. On a donc, d'après (1) et (4),

$$R\sin(\alpha - \theta) = p\sin\theta$$

$$R\sin\alpha\cos\theta - R\cos\alpha\sin\theta = p\sin\theta$$

$$R\sin\alpha\cos\theta = (p + R\cos\alpha)\sin\theta$$

On élève au carré et on utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$R^2(1 - \sin^2\theta)\sin^2\alpha = (p^2 + R^2\cos^2\alpha + 2Rp\cos\alpha)\sin^2\theta$$

$$R^2\sin^2\alpha = (R^2 + p^2 + 2Rp\cos\alpha)\sin^2\theta$$

De même en partant de (2) et (5),

$$R^2\sin^2\alpha = (R^2 + p'^2 + 2R\,p'\cos\alpha)\sin^2\theta'$$

4. Lorsque la position de P' dépend de l'angle θ, le dioptre n'est pas rigoureusement stigmatique pour le couple de points P et P' (il y a stigmatisme approché, cependant, si on restreint les rayons issus de P à un pinceau très fin).

5. D'après de qui précède, on a

$$(R^2 + p^2 + 2R\,p\cos\alpha)\sin^2\theta = \\ (R^2 + p'^2 + 2R\,p'\cos\alpha)\sin^2\theta'$$

Or $\sin\theta$ et $\sin\theta'$ sont aussi reliés par la relation (3). Pour en tirer parti, il est plus simple de commencer par tout multiplier par p'^2

$$(R^2 + p^2 + 2R\,p\cos\alpha)p'^2\sin^2\theta = \\ (R^2 + p'^2 + 2R\,p'\cos\alpha)p'^2\sin^2\theta'$$

et d'après (3), on a donc

$$(R^2 + p^2 + 2R\,p\cos\alpha)p'^2\sin^2\theta = \\ n^2(R^2 + p'^2 + 2R\,p'\cos\alpha)p^2\sin^2\theta$$

soit, lorsque $\theta \neq 0$, en simplifiant par $\sin\theta$,

$$R^2p'^2 + p^2p'^2 + 2R\,pp'^2\cos\alpha = \\ n^2R^2p^2 + n^2p^2p'^2 + 2R\,p^2p'\cos\alpha$$

Si l'on veut que le stigmatisme rigoureux soit vérifié, il faut que le point P' soit le même pour tout angle α, c'est-à-dire que cette relation soit valable pour tout angle α, pour un couple donné de valeurs de p et de p'. Il faut donc que d'une part le coefficient de $\cos\alpha$ soit le même des deux côtés de l'équation, soit

$$2Rpp'^2 = 2n^2Rp^2p' \text{ soit } \boxed{p' = n^2\,p}$$

et que le terme constant (ne dépendant pas de α) soit aussi le même des deux côtés, soit

$$R^2\,p'^2 + p^2\,p'^2 = n^2R^2\,p^2 + n^2p^2\,p'^2$$

En utilisant $p' = n^2\,p$,

$$n^4R^2\,p^2 + n^4p^4 = n^2R^2\,p^2 + n^6p^4$$

Le cas $p \equiv CP = 0$ est solution, mais pas très intéressant physiquement, il nous rappelle simplement que le centre de la sphère est sa propre image par le dioptre sphérique. En supposant que $p \neq 0$, on simplifie par n^2p^2,

$$n^2R^2 + n^2p^2 = R^2 + n^4p^2$$

$$p^2 = R^2\frac{n^2-1}{n^4-n^2} = \frac{R^2}{n^2}$$

et donc finalement

$$\boxed{p \equiv CP = R/n} \text{ et } \boxed{p' \equiv CP' = nR}$$

On peut remarquer, en injectant ces résultats dans l'expression (2), on trouve que $\sin r = n\sin\theta'$, ce qui avec la loi de Snell-Descartes indique que

$$\boxed{\theta' = r}$$

