

Master 2ème année de Physique Subatomique et Astroparticules

Universités de Grenoble et de Savoie

Module d'introduction à la Théorie Quantique des Champs

Durée 3 heures

Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

## Enoncé de l'examen du mardi 19 février 2013

### 1 Oscillateur harmonique à trois dimensions et physique hadronique.

**Cette partie est notée sur 8 points.**

On considère un oscillateur harmonique quantique à trois dimensions. Le Hamiltonien classique se met sous la forme

$$\mathcal{H} = \frac{k}{2} \mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \sum_{i=1}^3 \frac{k}{2} x_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} . \quad (1)$$

La position du point matériel est repérée par les coordonnées  $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$  alors que son impulsion est décrite par  $(p_x, p_y, p_z) \equiv (p_1, p_2, p_3)$ . Le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  devient en mécanique quantique

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{k}{2} X_i^2 + \frac{P_i^2}{2m} , \quad (2)$$

où la position et l'impulsion sont décrites par les opérateurs quantiques  $X_i$  et  $P_i$ .

**1.1) (1 point)** En s'inspirant du cours, définir les opérateurs réduits  $\hat{X}_i$  et  $\hat{P}_i$ . Construire alors les opérateurs d'annihilation et de création définis par

$$a_j = \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad a_j^\dagger = \frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} . \quad (3)$$

Montrer que ces opérateurs vérifient les relations de commutation

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} . \quad (4)$$

**1.2) (1 point)** Les trois opérateurs de moment cinétique  $L_{ij}$  (avec  $i < j$ ) sont définis par

$$\hbar L_{ij} = X_i P_j - X_j P_i . \quad (5)$$

Calculer  $L_{ij}$  en fonction des opérateurs  $a_i, a_j, a_i^\dagger$  et  $a_j^\dagger$ .

**1.3) (1 point)** On considère l'espace vectoriel construit sur  $\mathbb{C}$  dont une base est formée des trois vecteurs  $|1\rangle, |2\rangle$  et  $|3\rangle$  où  $|k\rangle \equiv a_k^\dagger |0\rangle$ . Construire les matrices représentant les opérateurs  $L_{ij}$  dans cette base.

**1.4) (1 point)** On définit maintenant les opérateurs

$$C_{ij} = a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i , \quad (6)$$

avec  $i < j$ . Construire également les matrices représentant ces opérateurs dans la base des vecteurs  $|k\rangle$ . Expliquer la raison pour laquelle les  $C_{ij}$  sont des opérateurs d'échange. Comparer les résultats obtenus avec les matrices de Gell-Mann et commenter.

**1.5) (1 point)** Construire le Hamiltonien en fonction des opérateurs  $a_i$  et  $a_i^\dagger$  et montrer qu'il commute avec les opérateurs  $L_{ij}$  et  $C_{ij}$ .

**1.6) (1 point)** Construire deux nouveaux opérateurs  $A$  et  $B$  de manière à ce qu'ils constituent avec les  $L_{ij}$  et  $C_{ij}$  une algèbre de  $SU(3)$ .

**1.7) (2 points)** Et pour terminer, calculer les commutateurs de  $L_{ij}$  avec  $L_{mn}$ , de  $L_{ij}$  avec  $C_{mn}$  et finalement de  $C_{ij}$  avec  $C_{mn}$ .

## 2 Largeur du Higgs en paire fermion–antifermion.

**Cette partie est notée sur 14 points.**

Le but de ce problème est d'établir tout d'abord la relation permettant de calculer la largeur de désintégration d'une particule sous la forme d'une intégrale sur l'espace des phases – Lorentz invariant phase space ou LIPS – d'une amplitude de transition au carré. Il s'agit ensuite de trouver les règles de Feynman relatives au processus particulièrement simple envisagé ici où un boson scalaire neutre – en l'occurrence le boson de Higgs – se couple directement à une ligne fermionique. La largeur recherchée sera finalement calculée en utilisant quelques règles de Diracologie qui seront rappelées en annexe.

**2.1) (1 point)** Le couplage effectif entre le boson de Higgs  $h$  et le fermion  $f$  se met sous la forme

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} (v + h) \bar{\psi} \psi . \quad (7)$$

En utilisant la relation démontrée en cours entre la constante de Fermi  $G_F$  et la masse du boson  $W$ , établir que

$$\frac{\lambda^2}{2} = \sqrt{2} G_F m^2 , \quad (8)$$

où  $m$  est la masse du fermion.

**2.2) (0,5 point)** La matrice d'interaction  $S$  est reliée au Lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}_I$  par

$$S = T \left\{ \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right\} \right\} = T \left\{ \exp \left\{ -i \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int d^4x : \bar{\psi}(x) (v + h(x)) \psi(x) : \right\} \right\} . \quad (9)$$

La décomposition du champ de Higgs  $h$  en créateurs  $a^\dagger$  et annihilateurs  $a$  se met sous la forme

$$h(x) = \int \tilde{d}\mathbf{k} \left\{ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right\} , \quad (10)$$

alors que celle du champ fermionique  $\psi$  est donnée par

$$\psi(x) = \int \tilde{d}k \sum_{\alpha=1,2} \left\{ b(\mathbf{k}, \alpha) u(\mathbf{k}, \alpha) e^{-ikx} + d^\dagger(\mathbf{k}, \alpha) v(\mathbf{k}, \alpha) e^{ikx} \right\} . \quad (11)$$

La signification de  $\tilde{d}k$  a été respectivement donnée en cours par les relations **IV.26** dans le cas bosonique et **IV.128** dans le cas fermionique. Le processus auquel nous nous intéressons dans ce problème est la désintégration d'un boson de Higgs en une paire fermion–antifermion

$$h(\mathbf{p}) \rightarrow f(\mathbf{k}_1, s_1) + \bar{f}(\mathbf{k}_2, s_2) . \quad (12)$$

L'état initial  $|i\rangle \equiv |i, t_0 = -\infty\rangle$  décrit la présence d'un boson de Higgs  $h$  dans tout le volume réactionnel  $\mathcal{V}$ . Construire ce ket à partir du créateur  $a^\dagger \equiv a^\dagger(\mathbf{p})$  et calculer la constante réelle  $C_i$  lui permettant d'avoir une norme unité. Même question pour l'état final  $|f\rangle \equiv |f, t_0 = -\infty\rangle$  que l'on construira à partir de  $b_1^\dagger \equiv b^\dagger(\mathbf{k}_1, s_1)$  et  $d_2^\dagger \equiv d^\dagger(\mathbf{k}_2, s_2)$ . Normer ce vecteur à l'aide de la constante réelle  $C_f$ . Les énergies du boson de Higgs  $h$ , du fermion  $f$  et de l'antifermion  $\bar{f}$  sont respectivement dénotées par  $E$ ,  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ .

**2.3) (0,5 point)** La désintégration (12) se déroule dans tout le volume réactionnel  $\mathcal{V}$  entre l'instant  $t_0 = -\infty$  et l'instant  $t = +\infty$ , donc sur une durée

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = 2\pi \delta(0) . \quad (13)$$

On note  $\langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}$ . Quelle est la signification physique du rapport  $|S_{fi}|^2/\mathcal{T}$ .

**2.4) (3 points)** En utilisant le théorème de Wick, montrer que l'élément de matrice  $S_{fi}$  se met sous la forme

$$S_{fi} = C_i C_f (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) \mathcal{M}_{fi} . \quad (14)$$

On calculera avec profit  $b_1 \bar{\psi}(x)$ ,  $d_2 \psi(x)$  et  $h(x) a^\dagger$  afin de démontrer la relation précédente et d'établir les règles de Feynman relatives à ce processus. Donner l'expression de l'élément de matrice  $\mathcal{M}_{fi}$ .

**2.5) (2 points)** Montrer que le taux de désintégration du boson de Higgs se met sous la forme

$$\Gamma = \frac{1}{2E} \int \left\{ d\text{LIPS} \equiv d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \right\} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (15)$$

**2.6) (1 point)** On somme sur tous les états de spin  $s_1$  et  $s_2$  des particules de l'état final. On aimerait également définir  $d\tilde{k}_1$  et  $d\tilde{k}_2$  par la même relation **IV.26** que pour les bosons. Montrer alors que

$$\sum_{s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{\lambda^2}{2} \text{Tr} \{ (\not{k}_1 + m)(\not{k}_2 - m) \} . \quad (16)$$

**2.7) (2 points)** En utilisant les règles de Diracologie rappelées en annexe, évaluer la trace précédente. Calculer le taux de désintégration d'un boson de Higgs **au repos** en intégrant

d'abord sur  $d^3\mathbf{k}_2$  – c'est immédiat grâce à la fonction de Dirac portant sur les impulsions spatiales – puis sur  $d^3\mathbf{k}_1$ , donc sur l'énergie  $\epsilon_1$ . On montrera que

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} m^2 M \left\{ 1 - \frac{4m^2}{M^2} \right\}^{3/2}, \quad (17)$$

où  $M$  désigne la masse du boson de Higgs.

**2.8) (2 points)** On considère un couplage du Higgs plus général incluant des contributions scalaire ( $a_+$ ) et pseudo-scalaire ( $a_-$ ) sous la forme du Lagrangien d'interaction

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} h \bar{\psi}(a_+ + a_- \gamma_5)\psi. \quad (18)$$

Reprendre le calcul du taux de désintégration du boson de Higgs et exprimer la largeur  $\Gamma$  en fonction de la constante de Fermi  $G_F$ , de la masse  $m$  du fermion  $f$ , de la masse  $M$  du boson de Higgs et des couplages  $a_+$  et  $a_-$ .

**2.9) (2 points)** En supersymétrie, le partenaire du fermion  $f$  est un boson scalaire chargé dénommé sfermion que nous noterons  $\varphi$ . Il se couple au boson de Higgs via le Lagrangien d'interaction

$$\mathcal{L}_I = -2m\lambda h \varphi^\dagger \varphi. \quad (19)$$

Nous supposons que cette particule a la même masse  $m$  que son partenaire fermionique  $f$ . Dérive rapidement les règles de Feynman relatives à la désintégration du boson de Higgs en une paire de sfermion–antisfermion and calcule le taux de désintégration correspondant.

Bon courage !

## Les matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## Un peu de Diracologie

$$\begin{aligned}tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} &= 4 \eta^{\mu\nu} \\ tr \{ \gamma_5 \} &= 0 \\ tr \{ \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \} &= 0 \\ tr \{ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \} &= 0\end{aligned}$$

