Master 2ème année de Physique Subatomique et Astroparticules
Universités de Grenoble et de Savoie
Module d'introduction à la Théorie Quantique des Champs
Durée 3 heures
Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

Enoncé de l'examen du lundi 1 février 2010

Invariance de Lorentz et boson–vecteur massif

Ce sujet d'examen est tout d'abord consacré au groupe de Lorentz et aux relations qu'entretiennent entre eux les générateurs de son algèbre de Lie. La seconde partie est une étude classique, puis quantique, du boson vecteur massif à partir des équations de Proca.

1 Générateurs de l'algèbre des transformations de Lorentz.

Cette partie est notée sur 10 points.

Introduction

Dans l'espace quadri–dimensionnel de la relativité restreinte, un vecteur de composantes $A^\alpha = \left\{A^0, \boldsymbol{A}\right\}$ voit ses coordonnées modifiées en $A'^\mu = \left\{A'^0, \boldsymbol{A'}\right\}$ lors d'un changement de référentiel, qu'il s'agisse d'une rotation spatiale ou d'un boost, avec

$$A'^\mu \; = \; \Lambda^\mu{}_\alpha \, A^\alpha \quad . \tag{1}$$

La matrice Λ caractérise la transformation de Lorentz précédente et l'élément correspondant à la ligne μ et à la colonne α est égal à $\Lambda^\mu{}_\alpha$. Les transformations de Lorentz laissent invariant le produit scalaire de Minkowski en sorte que, pour tout couple de quadri–vecteurs A^α et B^β, il vient

$$A^\alpha \, B_\alpha \; = \; A'^\mu \, B'_\mu \quad . \tag{2}$$

1.1) (1 point) Etablir que la matrice Λ vérifie l'égalité

$$\eta_{\alpha\beta} \; = \; \eta_{\mu\nu} \, \Lambda^\mu{}_\alpha \, \Lambda^\nu{}_\beta \quad . \tag{3}$$

La métrique de Minkowski est dénotée par η. Mettre la relation précédente sous forme matricielle. En déduire que le carré du déterminant de Λ vaut 1.

1.2) (1,5 point) Montrer que la composition de deux transformations de Lorentz est encore une transformation de Lorentz et que cette loi interne confère à l'ensemble des transformations de Lorentz une structure de groupe.

1.3) (0,5 point) On se restreint au groupe de Lorentz **propre** dont les éléments vérifient $\det \Lambda = +1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (transformations sans symétrie miroir ni renversement du sens du temps) et qui contient de ce fait l'identité $\mathbb{I}_4$. Au voisinage de celle–ci, une transformation de Lorentz se met sous la forme

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \; = \; \delta^\mu{}_\alpha \, + \, \omega^{\,\mu}{}_\alpha \quad . \tag{4}$$

Montrer que la matrice $\omega_{\alpha\beta}$ est antisymétrique en établissant que $\omega_{\alpha\beta} = -\,\omega_{\beta\alpha}$. Par définition, les indices de ω s'abaissent ou s'élèvent grâce à la métrique η avec par exemple

$$\omega_{\alpha\beta} \; = \; \eta_{\alpha\mu} \, \omega^{\,\mu}{}_\beta \quad . \tag{5}$$

Représentations du groupe de Lorentz

Représenter le groupe de Lorentz consiste à associer à chacun de ses éléments Λ la matrice $S(\Lambda)$ agissant dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension N construit sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et constituant une représentation du groupe. La matrice $S(\Lambda)$ transforme le vecteur ψ_n en vecteur ψ'_m de sorte que

$$\psi'_m \; = \; \sum_{n=1}^{N} \left[S\left(\Lambda\right) \right]_{mn} \, \psi_n \quad . \tag{6}$$

Au voisinage de l'identité, la transformation de Lorentz Λ se met sous la forme (4) et sa représentation s'écrit alors

$$S\left(\Lambda \, = \, \mathbb{I}_4 + \omega\right) \; = \; \mathbb{I}_N \; + \; \frac{1}{2} \, \omega^{\alpha\beta} \, \sigma_{\alpha\beta} \quad , \tag{7}$$

où $\sigma_{\alpha\beta}$ est une matrice $N \times N$ agissant dans la représentation $\mathcal{V}$ et construite de manière à être antisymétrique vis à vis des indices α et β. Le nombre de générateurs différents $\sigma_{\alpha\beta}$ de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz est donc de 6. L'application S est un homomorphisme qui associe au produit $\Lambda_2 \, \Lambda_1$ la matrice

$$S\left(\Lambda_2 \, \Lambda_1\right) \; = \; S\left(\Lambda_2\right) \times S\left(\Lambda_1\right) \quad . \tag{8}$$

1.4) (1 point) On considère la transformation de Lorentz $\mathbb{I}_4 + \omega$ proche de l'identité ainsi que la transformation de Lorentz Λ quelconque. Développer $S\left\{\Lambda^{-1}\left(\mathbb{I}_4 + \omega\right)\Lambda\right\}$ et en déduire l'égalité matricielle

$$\omega^{\alpha\beta} \, \left\{ S^{-1} \times \sigma_{\alpha\beta} \times S \right\} \; = \; \left(\Lambda^{-1} \omega \Lambda\right)^{\alpha\beta} \, \sigma_{\alpha\beta} \quad , \tag{9}$$

où S note en abrégé $S\left(\Lambda\right)$.

1.5) (2 points) Dans la relation précédente, on choisit de prendre une transformation $\Lambda = \mathbb{I}_4 + \lambda$ proche de l'identité. La matrice $\lambda^{\mu\nu}$ est antisymétrique en ses indices μ et ν comme l'est $\omega^{\alpha\beta}$ vis à vis de α et de β. En déduire la relation de commutation

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\mu\nu}] \;=\; \eta_{\alpha\nu}\,\sigma_{\beta\mu} \;-\; \eta_{\beta\nu}\,\sigma_{\alpha\mu} \;-\; \eta_{\alpha\mu}\,\sigma_{\beta\nu} \;+\; \eta_{\beta\mu}\,\sigma_{\alpha\nu} \;\; . \tag{10}$$

1.6) (4 points) On définit les générateurs de l'algèbre de Lorentz

$$a_i \;=\; \frac{i}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} \;-\; \sigma_{i0} \;\; , \tag{11}$$

et

$$b_i \;=\; \frac{i}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} \;+\; \sigma_{i0} \;\; . \tag{12}$$

Les indices i, j et k sont spatiaux et prennent donc les valeurs $\{1, 2, 3\}$. Le tenseur ϵ_{ijk} est totalement antisymétrique en ses indices avec $\epsilon_{123} \equiv +1$. Les relations précédentes notent de manière synthétique les égalités

$$\begin{aligned}
a_1 &= i\sigma_{23} - \sigma_{10} \quad \text{et} \quad b_1 = i\sigma_{23} + \sigma_{10} \;\; , \\
a_2 &= i\sigma_{31} - \sigma_{20} \quad \text{et} \quad b_2 = i\sigma_{31} + \sigma_{20} \;\; , \\
a_3 &= i\sigma_{12} - \sigma_{30} \quad \text{et} \quad b_3 = i\sigma_{12} + \sigma_{30} \;\; .
\end{aligned}$$

Démontrer les relations de commutation

$$[a_i, a_j] \;=\; 2\,i\,\epsilon_{ijk}\,a_k \quad \text{et} \quad [b_i, b_j] \;=\; 2\,i\,\epsilon_{ijk}\,b_k \;\; . \tag{13}$$

Montrer que les générateurs a_i commutent avec les générateurs b_i. Quelles sont les relations de commutation que vérifient les matrices de Pauli σ_i ? Commentaires ?

2 Boson vecteur massif et champ de Proca.

Cette partie est notée sur 10 points.

Le potentiel vecteur A^μ décrit un champ vectoriel réel. Il est associé au Lagrangien de Proca

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \;+\; \frac{1}{2}\,\mu^2 A_\mu A^\mu \;\; , \tag{14}$$

qui diffère de celui de l'électromagnétisme par le terme $\mu^2 A^2/2$ où le paramètre μ désigne la masse. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini par $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu \,-\, \partial_\nu A_\mu$.

2.1) (2 points) Dériver les équations d'Euler–Lagrange

$$\partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\partial_\beta A_\alpha)} \right\} \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} \;\; , \tag{15}$$

associées au Lagrangien (14) que l'on pourra mettre sous la forme

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{2}\,\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\eta}\,F_{\mu\nu}\,\partial_\sigma A_\eta \;+\; \frac{1}{2}\,\mu^2\,\eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \;\; . \tag{16}$$

2.2) (1 point) Calculer la quadri–divergence de l'expression ainsi obtenue. En déduire alors que les équations de Proca se mettent sous la forme

$$\left\{ \Box + \mu^2 \right\} A_\mu \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \;\; . \tag{17}$$

2.3) (0,5 point) Le champ de Proca est susceptible de se propager dans le vide en l'absence de source. Il est alors décrit par le potentiel vecteur

$$A^\mu(x) \;=\; \epsilon^\mu \, e^{-\,ikx} \;\; , \tag{18}$$

où le quadri–vecteur $k \equiv \{\omega_{\boldsymbol{k}} > 0 \, , \, \boldsymbol{k}\}$. Calculer l'énergie $\omega_{\boldsymbol{k}}$ en fonction de la masse μ et de l'impulsion $\boldsymbol{k}$. Quelle relation le quadri–vecteur d'onde k et la polarisation ϵ entretiennent–ils ?

2.4) (0,5 point) En déduire l'existence de trois états de polarisation $\epsilon(\boldsymbol{k}, \lambda)$ orthogonaux entre eux – où λ prend les valeurs 1, 2 et 3 – associés à l'onde plane précédente de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Ces vecteurs vérifient la relation d'orthonormalité

$$\epsilon(\boldsymbol{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\boldsymbol{k}, \sigma) \;=\; \epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, \lambda) \, \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}, \sigma) \;=\; -\,\delta_{\lambda\sigma} \;=\; \eta_{\lambda\sigma} \;\; . \tag{19}$$

Que valent–ils dans le cas où $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ (boson vecteur au repos) et lorsque $\boldsymbol{k}$ est aligné le long de l'axe Oz ?

2.5) (1 point) Montrer que les vecteurs de polarisation $\epsilon(\boldsymbol{k}, \lambda)$ vérifient la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}, \lambda) \, \epsilon_\nu(\boldsymbol{k}, \lambda) \;=\; -\left\{ \eta_{\mu\nu} \;-\; \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2} \right\} \;\; . \tag{20}$$

En théorie quantique des champs, le développement de Fourier du potentiel vecteur A_μ en une somme d'ondes planes se met sous la forme

$$A_\mu(x) \;=\; \int \tilde{dk} \; \sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}, \lambda) \left\{ a(\boldsymbol{k}, \lambda) \, e^{-\,ikx} \;+\; a^\dagger(\boldsymbol{k}, \lambda) \, e^{ikx} \right\} \;\; , \tag{21}$$

avec

$$\tilde{dk} \;=\; \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 \, 2\,\omega_{\boldsymbol{k}}} \;\; . \tag{22}$$

Les opérateurs d'annihilation et de création vérifient la condition

$$\left[a(\boldsymbol{k}, \lambda), a^\dagger(\boldsymbol{p}, \sigma) \right] \;=\; (2\pi)^3 \, 2\,\omega_{\boldsymbol{k}} \; \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}) \; \delta_{\lambda\sigma} \;\; , \tag{23}$$

tous les autres commutateurs étant nuls.

2.6) (1 point) Calculer la valeur dans le vide du T–produit

$$T\left\{ A_\mu(x) \, A_\nu(y) \right\} \;=\; \theta(x^0 - y^0) \, A_\mu(x) \, A_\nu(y) \;+\; \theta(y^0 - x^0) \, A_\nu(y) \, A_\mu(x) \;\; . \tag{24}$$

On établira que

$$\langle 0 | \, T\,\{A_\mu(x)\, A_\nu(y)\}\, |0\rangle \;\; = \;\; - \int \tilde{dk}\; \{\theta(x^0 - y^0)\, e^{-\,ik(x-y)} \; + \; \theta(y^0 - x^0)\, e^{ik(x-y)}\} \times \left\{\eta_{\mu\nu} \; - \; \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right\} \;\; . \tag{25}$$

La composante temporelle du quadri–vecteur k^μ de cette expression est égale à l'énergie $\omega_{\boldsymbol{k}}$.

2.7) (4 points) Le propagateur de Feynman $G_{\mu\nu}(k)$ du champ vectoriel massif est défini par

$$G_{\mu\nu}(k) \;\; = \;\; - \, \frac{\{\eta_{\mu\nu} \; - \; k_\mu k_\nu / \mu^2\}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \;\; , \tag{26}$$

dans l'espace des quadri–vecteurs k. Le propagateur de Feynman spatio–temporel $G_{\mu\nu}(x)$ est sa transformée de Fourier

$$G_{\mu\nu}(x) \;\; = \;\; \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; e^{-\,ikx} \; G_{\mu\nu}(k) \;\; . \tag{27}$$

Démontrer l'égalité

$$\langle 0 | \, T\,\{A_\mu(x)\, A_\nu(y)\}\, |0\rangle \;\; = \;\; i\, G_{\mu\nu}(x-y) \;\; - \;\; \frac{i}{\mu^2}\, \delta^0_\mu\, \delta^0_\nu\, \delta^4(x-y) \;\; . \tag{28}$$

On pourra commencer par établir la relation précédente pour les composantes espace–espace puis temps–espace du tenseur $G_{\mu\nu}$. Dans le calcul plus délicat de la composante temps–temps, le contour d'intégration ne peut être rebouclé dans le plan complexe de la variable $k^0 = k'^0 + ik''^0$ que si l'intégrand tend vers 0 lorsque k'^0 tend vers $\pm\infty$.

Bon courage !