Universités de Grenoble & de Savoie
Module d'introduction à la théorie quantique des champs
Master 2ème année de physique subatomique et astroparticules – PSA
Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés
Durée 3 heures

Enoncé de l'examen du mardi 20 janvier 2009

Introduction à l'électrodynamique des scalaires

Ce sujet est consacré aux interactions qu'un champ scalaire chargé φ entretient avec le potentiel vecteur A^μ du champ électromagnétique. La première partie est une analyse classique du Lagrangien de cette théorie. Vous établirez de trois manières différentes le courant électromagnétique associé au champ scalaire φ. La seconde partie est consacrée aux différents produits chronologiques qui ne manqueront pas d'intervenir par la suite. Vous établirez qu'en toute rigueur, le T–produit des dérivées de φ n'est pas toujours égal aux mêmes dérivées appliquées au T–produit. Le but du problème est evidemment d'établir dans la troisième partie les règles de Feynman qui président à l'électrodynamique des scalaires.

Afin d'unifier les notations, le conjugué complexe du champ classique φ ainsi que l'opérateur hermitien conjugué du champ quantique φ seront tous les deux désignés par $\varphi^\dagger$.

1 Quelques commentaires sur la théorie classique.

Cette partie est notée sur 7 points.

Le Lagrangien du champ scalaire chargé **libre** de masse m est donné par l'expression

$$\mathcal{L}_0 \left\{\varphi, \partial_\mu\varphi, \varphi^\dagger, \partial_\mu\varphi^\dagger\right\} \; = \; \partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi \, - \, m^2\,\varphi^\dagger\varphi \;\; . \tag{1}$$

Nous avons vérifié en cours que ce Lagrangien est bien invariant sous les transformations de jauge **globales** aux cours desquelles le champ $\varphi(x)$ devient égal à

$$\varphi(x) \quad \longrightarrow \quad \varphi'(x) \; = \; e^{i\,q\,\theta}\,\varphi(x) \;\; , \tag{2}$$

et pour lesquelles l'angle θ est constant.

1.1) (1 point) Appliquer le théorème de Noether afin d'établir l'existence d'un courant conservé égal à

$$J_\mu \; = \; i\,q\,\varphi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi \; = \; i\,q\,\left\{\varphi^\dagger(\partial_\mu\varphi) \, - \, (\partial_\mu\varphi^\dagger)\varphi\right\} \;\; . \tag{3}$$

1.2) (1 point) On veut rendre la théorie invariante sous les transformations de jauge **locales** au cours desquelles le champ $\varphi(x)$ se transforme encore suivant la relation (2) avec un angle θ dépendant désormais de la position x du champ. Montrer que le Lagrangien libre $\mathcal{L}_0$ doit être remplacé par

$$\mathcal{L}\left\{\varphi, \partial_\mu\varphi, \varphi^\dagger, \partial_\mu\varphi^\dagger, A_\alpha, \partial_\beta A_\alpha\right\} \; = \; D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi \, - \, m^2\,\varphi^\dagger\varphi \, - \, \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \;\; , \tag{4}$$

où $F_{\mu\nu}$ désigne le champ électromagnétique et où la dérivée simple ∂_μ est devenue la dérivée covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu \, + \, i\,q\,A_\mu \;\; . \tag{5}$$

On montrera que φ et $D_\mu \varphi$ se transforment de manière identique. On donnera la loi de transformation du potentiel vecteur A_μ.

1.3) (2 points) Dériver les équations d'Euler–Lagrange pour les champs φ, $\varphi^\dagger$ et A_α. Dans le dernier cas, on établira que

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} \; = \; J^\alpha \quad , \tag{6}$$

et l'on exprimera le courant J^α en fonction de φ, $\varphi^\dagger$, de leurs dérivées $\partial^\alpha \varphi$ et $\partial^\alpha \varphi^\dagger$ ainsi que du potentiel vecteur A^α.

1.4) (0,5 point) Réobtenir l'expression précédente de J^α en rendant covariante l'expression (3).

1.5) (2,5 points) Une transformation de jauge locale infinitésimale est caractérisée par un angle de rotation θ dépendant de x et infiniment petit devant 1. Elle affecte **tous** les champs en jeu dans le Lagrangien $\mathcal{L}$ sans que celui–ci ne soit modifié. En appliquant alors le théorème de Noether, montrer qu'il existe un courant conservé J^μ dont on donnera l'expression – que l'on aura incidemment dérivée pour la troisième fois.

2 Le propagateur du champ scalaire et ses dérivées.

Cette partie est notée sur 6 points.

Nous passons à l'aspect quantique du problème. Le potentiel vecteur A_μ est un opérateur dont le développement de Fourier en ondes planes se met sous la forme

$$A_\mu(x) \; = \; \int \tilde{dk} \, \sum_{\lambda=0}^{3} \left\{ a(\mathbf{k},\lambda) \, e_\mu(\mathbf{k},\lambda) \, e^{-\,ikx} \; + \; a^\dagger(\mathbf{k},\lambda) \, e_\mu(\mathbf{k},\lambda) \, e^{ikx} \right\} \quad . \tag{7}$$

L'opérateur $a^\dagger(\mathbf{k},\lambda)$ engendre un photon d'impulsion spatiale $\mathbf{k}$ dont la polarisation λ est caractérisée par le quadri–vecteur $e_\mu(\mathbf{k},\lambda)$. Un développement de Fourier analogue existe pour le champ scalaire chargé φ et prend la forme

$$\varphi(x) \; = \; \int \tilde{dk} \, \left\{ b(\mathbf{k}) \, e^{-\,ikx} \; + \; d^\dagger(\mathbf{k}) \, e^{ikx} \right\} \quad , \tag{8}$$

Les notations ont été modifiées par rapport au cours afin de bien distinguer l'opérateur $a^\dagger(\mathbf{k},\lambda)$ engendrant un photon des opérateurs $b^\dagger(\mathbf{k})$ et $d^\dagger(\mathbf{k})$ qui créent respectivement un pion π^+ chargé positivement et un pion π^- chargé négativement tous deux d'impulsion $\mathbf{k}$.

2.1) (1 point) Dans cette question de cours, on établira que

$$-\,i \, G_F(x-y) \; = \; \langle 0 | \, T \left\{ \varphi(x) \, \varphi^\dagger(y) \right\} |0\rangle \equiv \varphi(\overbrace{x) \, \varphi^\dagger}(y) \quad , \tag{9}$$

où la fonction $G_F(x-y)$ est définie par

$$-\,i \, G_F(x-y) \; = \; \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \;\; e^{-\,ik(x-y)} \;\; \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad . \tag{10}$$

2.2) (2 points) On montrera avec un soin dont je tiendrai compte que

$$-\,i \, \partial_x^\mu G_F(x-y) \; = \; \langle 0 | \, T \left\{ \partial_x^\mu \varphi(x) \, \varphi^\dagger(y) \right\} |0\rangle \quad . \tag{11}$$

Le symbole ∂_x^μ désigne la dérivée partielle par rapport à x_μ de sorte que $\partial_x^\mu \varphi \equiv \partial \varphi / \partial x_\mu$. On admettra ensuite sans démonstration que

$$-\,i \, \partial_y^\nu G_F(x-y) \; = \; \langle 0 | \, T \left\{ \varphi(x) \, \partial_y^\nu \varphi^\dagger(y) \right\} |0\rangle \quad . \tag{12}$$

Les relations précédentes peuvent s'écrire sous une forme un peu plus abstraite

$$\partial_x^\mu \langle 0|\, T\left\{\varphi(x)\,\varphi^\dagger(y)\right\}|0\rangle \;=\; \langle 0|\, T\left\{\partial_x^\mu\varphi(x)\,\varphi^\dagger(y)\right\}|0\rangle \quad , \tag{13}$$

et

$$\partial_y^\nu \langle 0|\, T\left\{\varphi(x)\,\varphi^\dagger(y)\right\}|0\rangle \;=\; \langle 0|\, T\left\{\varphi(x)\,\partial_y^\nu\varphi^\dagger(y)\right\}|0\rangle \quad . \tag{14}$$

Nous voyons que les dérivées spatiales ∂_x^μ et ∂_y^ν commutent avec le T–produit. Cette propriété sera très utile dans la troisième partie.

2.3) (3 points) Nous pressentons que la dérivée seconde du T–produit par rapport à x_μ et à y_ν possède la même propriété et aimerions donc écrire que

$$-\,i\,\partial_x^\mu\,\partial_y^\nu G_F(x-y) \;=\; \langle 0|\, T\left\{\partial_x^\mu\varphi(x)\,\partial_y^\nu\varphi^\dagger(y)\right\}|0\rangle \quad . \tag{15}$$

Cette relation est fausse ! La version correcte fait intervenir un terme de contact et se met sous la forme non covariante de Lorentz

$$-\,i\,\partial_x^\mu\,\partial_y^\nu G_F(x-y) \;=\; \langle 0|\, T\left\{\partial_x^\mu\varphi(x)\,\partial_y^\nu\varphi^\dagger(y)\right\}|0\rangle \;+\; i\,\delta_0^\mu\,\delta_0^\nu\,\delta^4(x-y) \quad . \tag{16}$$

On pourra commencer par établir l'équation précédente pour les composantes espace–espace puis temps–espace. Dans le calcul plus délicat de la composante temps–temps, le contour d'intégration qui intervient dans le calcul de $-\,i\,\partial_x^0\,\partial_y^0 G_F(x-y)$ ne peut être rebouclé dans le plan complexe de la variable $k^0 = k'^0 + ik''^0$ que si l'intégrand tend vers 0 lorsque k'^0 tend vers $\pm\infty$. Il faut alors être malicieux !

3 Règles de Feynman de l'électrodynamique des scalaires.

Cette partie est notée sur 8 points.

A partir de maintenant, nous ne tiendrons pas compte du terme de contact établi précédemment et considérerons que la relation (15) est quand même correcte *. La matrice d'interaction sera également prise égale à

$$S \;=\; T\left\{\exp\left\{i\int d^4x \;\, :\mathcal{L}_I(x):\right\}\right\} \quad , \tag{17}$$

où $\mathcal{L}_I$ désigne le Lagrangien d'interaction.

3.1) (0,5 point) Montrer à partir de l'expression (4) que

$$\mathcal{L}_I \;=\; -\,i\,q\,A^\mu\,\varphi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi \;+\; q^2\,A_\mu A^\mu\,\varphi^\dagger\varphi \quad . \tag{18}$$

On s'intéresse à l'effet Compton scalaire dans lequel un photon d'impulsion $\mathbf{k}_1$ et de polarisation λ_1 entre en collision avec un pion π^+ chargé positivement et d'impulsion $\mathbf{p}_1$. Dans l'état final, le photon est caractérisé par l'impulsion $\mathbf{k}_2$ et la polarisation λ_2 alors que le pion possède l'impulsion $\mathbf{p}_2$. La réaction que vous allez étudier ici est la diffusion élastique d'un photon sur un pion

$$\gamma\,(\mathbf{k}_1,\lambda_1) \;+\; \pi^+\,(\mathbf{p}_1) \;\;\rightarrow\;\; \gamma\,(\mathbf{k}_2,\lambda_2) \;+\; \pi^+\,(\mathbf{p}_2) \quad . \tag{19}$$

Nous avons vu en cours que l'élément de matrice $\mathcal{M}_{fi}$ de ce processus est donné par l'identité

$$\langle\,\mathrm{final}\,|\,S\,|\,\mathrm{initial}\,\rangle \;=\; (2\pi)^4\;\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2)\;\mathcal{M}_{fi} \quad . \tag{20}$$

*Je passe sur la démonstration subtile et les pirouettes toutefois rigoureuses qui permettent d'en arriver là !

Les états intial et final sont définis par

$$|\,\text{initial}\,\rangle \equiv b^\dagger(\mathbf{p}_1)\,a^\dagger(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\;|0\rangle \quad \text{et} \quad |\,\text{final}\,\rangle \equiv b^\dagger(\mathbf{p}_2)\,a^\dagger(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\;|0\rangle \quad , \tag{21}$$

3.2) (0,5 point) Développer la matrice S jusqu'à l'ordre q^2 **inclus** et éliminer immédiatement les termes qui ne contribuent pas de manière évidente à $\mathcal{M}_{fi}$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int d^4x \;\; i\,\eta^{\mu\nu}\,q^2 \;\; : A_\mu(x) A_\nu(x)\,\varphi^\dagger(x)\,\varphi(x) : \\ &+ \iint d^4x\,d^4y \;\; \frac{q^2}{2}\;T\left\{ : A_\mu(x)\,\varphi^\dagger(x)\,\overleftrightarrow{\partial_x^\mu}\,\varphi(x) :\,: A_\nu(y)\,\varphi^\dagger(y)\,\overleftrightarrow{\partial_y^\nu}\,\varphi(y) : \right\} \quad . \end{aligned} \tag{22}$$

3.3) (1,5 points) En appliquant le théorème de Wick et en ne gardant que les termes qui contribuent au processus, établir que la partie effective de la matrice d'interaction se réduit à

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int d^4x \;\; i\,\eta^{\mu\nu}\,q^2 \;\; : A_\mu(x) A_\nu(x)\,\varphi^\dagger(x)\,\varphi(x) : \\ &+ \iint d^4x\,d^4y \;\; q^2 \;\; : A_\mu(x)\,A_\nu(y)\,\varphi^\dagger(x)\,\overleftrightarrow{\partial_x^\mu}\,\{-\,i\,G_F(x-y)\}\,\overleftrightarrow{\partial_y^\nu}\,\varphi(y) : \quad . \end{aligned} \tag{23}$$

En quoi les relations (11), (12) et (15) sont-elles cruciales pour établir ce résultat [†].

3.4) (1,5 points) Calculer les contractions de Wick $\underbrace{\varphi(y)\;b^\dagger}(\mathbf{p}_1)$, $\underbrace{\partial_y^\nu\varphi(y)\;b^\dagger}(\mathbf{p}_1)$, $\underbrace{b(\mathbf{p}_2)\;\varphi^\dagger}(x)$ et $\underbrace{b(\mathbf{p}_2)\;\partial_x^\mu\varphi^\dagger}(x)$. On établira rapidement les expressions des contractions relatives au champ électromagnétique $\underbrace{a(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\;A_\mu}(x)$ et $\underbrace{A_\mu(x)\;a^\dagger}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$.

3.5) (3 points) Vous êtes prêts désormais pour le saut final !
Ecrire l'élément de matrice $\langle\,\text{final}\,|\,S\,|\,\text{initial}\,\rangle$ sous forme d'une somme de trois termes complètement contractés. Développer la fonction $-\,i\,G_F(x-y)$ en fonction de sa transformée de Fourier et intégrer sur les points d'espace–temps x et y. Extraire de l'expression obtenue l'élément de matrice $\mathcal{M}_{fi}$ et l'interpréter en terme de graphes de Feynman. On retrouvera les deux diagrammes de l'effet Compton relatif à l'électron ainsi qu'un diagramme supplémentaire dans lequel deux photons se couplent au même point d'une ligne scalaire.

3.6) (1 point) En déduire les règles de Feynman de l'électrodynamique des scalaires en établissant les expressions relatives au propagateur du champ scalaire, à la patte externe du photon et au vertex trilinéaire photon–scalaire–scalaire. On montrera enfin que le vertex quadrilinéaire couplant au même point deux photons et deux scalaire est égal à $2\,i\,q^2\,\eta^{\mu\nu}$.

Bon courage !

[†] Une bonne réponse rapportera 1 point sur le total de 1,5 point que compte cette question.