

Master de Physique et d'Astrophysique
Ecole Normale Supérieure de Lyon et Université Claude Bernard
Module d'astrophysique des particules
Durée 3 heures
Cours manuscrit, documents et calculatrice alphanumérique sont autorisés

Enoncé de l'examen du vendredi 20 janvier 2006

Densité relique des neutralinos dans le cadre des théories de Kaluza–Klein

Les théories de Kaluza–Klein postulent l'existence d'une quatrième dimension spatiale se rebouclant sur elle-même comme un tuyau dont le rayon serait R . Les champs décrivant les particules élémentaires sont périodiques le long de cette dimension supplémentaire compacte en sorte que la masse engendrée par le mode n de vibration est égale à n/R . Toute espèce connue – pour avoir été synthétisée en accélérateur – est alors associée à une série infinie de modes de plus en plus massifs se déclinant en fonction de n et dénommée **tour de Kaluza–Klein**. Les calculs du spectre de toutes les particules correspondant au mode $n = 1$ indiquent que le boson de jauge B^μ – associé au groupe de jauge $U(1)$ de l'hypercharge Y – est le moins lourd et qu'il est de surcroît stable. Ce boson devient dès lors un candidat à la matière noire astronomique dans la mesure où il a survécu depuis le big-bang. Mais a-t-il été produit dans l'univers primordial en quantité suffisante ? Le but de l'examen est de répondre à cette question.

La première partie de ce problème est consacrée au calcul de la section efficace d'annihilation d'une paire de neutralinos au repos. Au boson vecteur B^μ sera substituée une particule générique scalaire neutre ϕ dont le couplage aux fermions f du modèle standard est simplifié afin de permettre une dérivation plus aisée. L'estimation de la densité relique $\Omega_\phi h^2$ des particules ϕ fait l'objet de la seconde partie. Il s'agit essentiellement d'utiliser à bon escient la méthode étudiée en cours. Finalement, pour ceux qui auraient du mal avec la section efficace de la première partie – relative à l'annihilation des particules ϕ entre elles – je propose un rattrapage dans lequel la densité relique du neutralino B^μ sera dérivée grâce à la section efficace d'annihilation exacte calculée par G. Servant et T. Tait.

1 Section efficace d'annihilation $\phi\phi \rightarrow f\bar{f}$.

Cette partie est notée sur 8 points.

Le boson de jauge B^μ est ici remplacé par une particule scalaire ϕ dont le mode de Kaluza–Klein vaut $n = 1$ et dont la masse est

$$M \sim R^{-1} \sim 1 \text{ TeV} . \quad (1)$$

A l'instar du Higgs, ce scalaire ϕ se couple aux fermions. Cependant, afin de conserver le nombre quantique n qui représente une sorte d'impulsion le long de la dimension supplémentaire compactifiée, l'interaction doit faire apparaître le partenaire F de mode $n = 1$ du fermion léger f . Celui-ci, comme toutes les particules du modèle standard, correspond au mode fondamental $n = 0$. Le Lagrangien se met alors sous la forme générique

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\phi \{ \bar{F}f + \bar{f}F \} , \quad (2)$$

où g est une constante de couplage sans dimension. La masse du fermion lourd sera notée $\Lambda \gtrsim M$. La figure 1 présente les deux diagrammes de Feynman responsables du processus d'annihilation

$$\phi + \phi \rightarrow f + \bar{f} . \quad (3)$$

Les particules initiales sont au repos l'une par rapport à l'autre et l'on se placera dans le référentiel du centre de masse de la réaction. Les énergies initiales seront notées $E_1 = E_2 = M$ alors que les fermions de l'état final emportent les énergies $k_1^0 = \epsilon_1$ et $k_2^0 = \epsilon_2$. Le segment de ligne fermionique F parcourue par l'impulsion q se décrit par le propagateur de Feynman

$$i S_F(q) = \frac{i}{\not{q} - \Lambda + i\epsilon} . \quad (4)$$

Afin d'accélérer considérablement les calculs – sans modifier substantiellement le résultat final – on simplifiera la relation précédente en admettant que chaque ligne interne fermionique donne une contribution effective égale à

$$i S_F(q) = \frac{-i}{2\Lambda} . \quad (5)$$

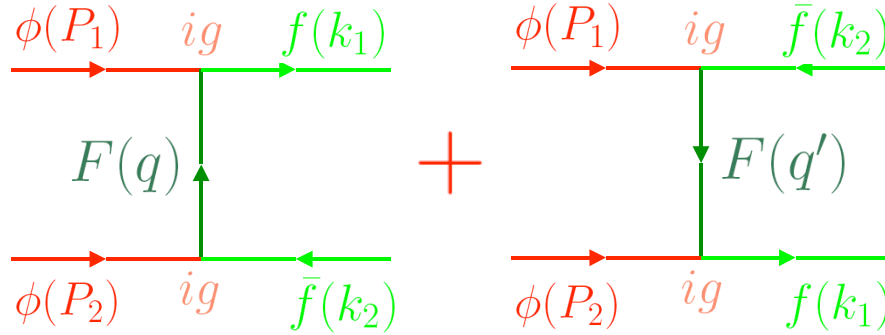
1.1) (1 point) Montrer alors que l'élément de matrice de transition correspondant aux diagrammes de la figure 1 se met sous la forme

$$\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow f\bar{f}) = i \frac{g^2}{\Lambda} \bar{u}(k_1)v(k_2) . \quad (6)$$

1.2) (2 points) La somme sur les spins finals du carré de la matrice de transition précédente est notée

$$\mathcal{T} = \sum_{\text{spins finals}} |\mathcal{M}|^2 . \quad (7)$$

Annihilation $\phi\phi \rightarrow f\bar{f}$



$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\phi \left\{ \bar{F}f + \bar{f}F \right\}$$

Figure 1: Ces deux diagrammes de Feynman sont responsables de l'annihilation d'une paire de particules scalaires ϕ en une paire fermion-antifermion $f\bar{f}$. La particule F est le mode $n = 1$ de Kaluza-Klein associé au fermion léger f .

Etablir que

$$\mathcal{T} = 8g^4\beta_f^2 \frac{M^2}{\Lambda^2}, \quad (8)$$

où β_f désigne la vitesse des fermions produits dans l'état final.

1.3) (4 points) Les vitesses des particules initiales ϕ sont négligeables par rapport à la vitesse de la lumière. Elles sont notées \vec{V}_1 et $\vec{V}_2 = -\vec{V}_1$ dans le référentiel du centre de masse dans lequel nous nous sommes placés. Calculer la section efficace $\sigma \times |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|$ de la réaction d'annihilation (3) en fonction de g , β_f et Λ .

1.4) (1 point) Le couplage $\phi-F-f$ vaut $g \equiv eQ_f$ où e désigne la charge électrique du positron. Le fermion lourd F et le scalaire ϕ sont pratiquement dégénérés en masse de sorte que $M \simeq \Lambda$. En déduire que

$$\sigma \times |\vec{V}_1 - \vec{V}_2| = 4\pi\alpha^2 \frac{N_A}{M^2}. \quad (9)$$

La constante de structure fine de l'électromagnétisme est notée $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$. On exprimera le nombre N_A comme une somme sur les fermions f susceptibles d'être produits

se mettant sous la forme

$$N_A = \sum_{\text{fermions } f} c_f \beta_f^3 Q_f^4 . \quad (10)$$

Le facteur de couleur c_f vaut 1 pour les leptons et 3 pour les quarks. On montrera que pour une masse M de l'ordre du TeV, le nombre effectif de canaux d'annihilation N_A vaut 44/9.

2 Calcul de la densité relique $\Omega_\phi h^2$.

Cette partie est notée sur 16 points.

2.1) (0,5 point) En prenant $M = 1$ TeV, calculer la section efficace d'annihilation à partir de la relation (9). On exprimera le résultat en $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$.

2.2) (0,5 point) En déduire une première estimation de la densité relique $\Omega_\phi h^2$. On pourra s'inspirer de la relation (I.83) du cours.

2.3) (2 points) Il convient de reprendre complètement l'étude du découplage pour au moins trois raisons. Tout d'abord, le scalaire ϕ n'est pas un fermion à deux composantes puisqu'il n'a qu'un seul état de spin. Ensuite, il est sa propre antiparticule d'où la présence de deux diagrammes de Feynman et non d'un seul dans le mécanisme d'annihilation. Finalement, le domaine de masse M considéré se situe autour du TeV, un régime où le nombre effectif de degrés de liberté du plasma primordial est plus important que celui considéré en cours.

Dans l'univers primordial, la population des neutralinos ϕ est en interaction avec le plasma environnant. En particulier, la réaction



est en équilibre lorsque la température est supérieure à la masse M des scalaires ϕ . L'équation régissant l'évolution de leur densité n_ϕ se met sous la forme

$$\frac{dn_\phi}{dt} = -3Hn_\phi - 2 \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_\phi^2 + 2 \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_\phi^{\text{eq}^2} . \quad (12)$$

Montrer que la section efficace effective d'annihilation à prendre en compte dans la relation précédente est donnée par

$$\langle \sigma_{\text{an}v} \rangle = 2 \pi \alpha^2 \frac{N_A}{M^2} . \quad (13)$$

D'où vient la différence avec la formule (9) ? Je serai très attentif à la clarté des explications données.

2.4) (1 point) Calculer la densité d'équilibre n_ϕ^{eq} en fonction du rapport $a = M/T$.

2.5) (2 points) On note T_F la température à laquelle la réaction (11) cesse d'être en équilibre. Le paramètre a_F dénote le rapport M/T_F . On montrera que a_F vérifie l'équation :

$$\sqrt{a_F} e^{a_F} = C = \frac{\mu}{M} \frac{N_A}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} . \quad (14)$$

Le paramètre g_{eff} désigne le nombre effectif de degrés de liberté du gaz de particules – exprimé dans la même unité avec laquelle la contribution des photons vaut 1 – **au moment où le découplage a lieu**. On écrira le paramètre μ en fonction de la masse de Planck M_P et de la constante de structure fine α puis on l'évaluera numériquement en TeV.

2.6) (3 points) On veut résoudre l'équation (14) à l'aide d'une calculatrice de poche. Supposons que a_n soit une solution approchée. Le terme par lequel la série débute est – par exemple – $a_0 = 1$. On définit la suite par l'itération :

$$a_{n+1} = \text{Log} \left(\frac{C}{\sqrt{a_n}} \right) . \quad (15)$$

On montrera que la suite des a_n converge vers la solution recherchée a_F . On pourra par exemple tracer les fonctions e^a et C/\sqrt{a} afin d'élaborer une démonstration graphique qui sera notée sur 2 points. Pour $C = 10^{10}$, on calculera la suite des a_n jusqu'à l'ordre $n = 5$ inclus avec 6 chiffres significatifs. Conclusion ?

2.7) (0,5 point) La masse du scalaire ϕ est prise ici égale à 1 TeV. Calculer le nombre effectif g_{eff} de degrés de liberté lorsque la température vaut également 1 TeV. On prendra en compte toutes les particules du modèle standard. Avec la valeur de N_A dérivée à la question 1.4, calculer numériquement le coefficient C de la relation (14) ainsi que la valeur du paramètre a_F et de la température T_F .

2.8) (0,5 point) Vous venez de trouver que le découplage avait lieu à une température T_F comprise entre 40 et 50 GeV. Les bosons de jauge faibles Z^0 et W^\pm ainsi que le boson de Higgs et le quark top sont alors absents du plasma primordial. Recalculer une meilleure valeur pour g_{eff} ainsi que pour a_F . Cette dernière a-t-elle beaucoup varié ?

2.9) (2 points) Montrer en intégrant l'équation d'évolution (12) après le découplage que la codensité $f_\phi \equiv n_\phi/T^3$ tend vers la limite asymptotique

$$f_\phi^{\text{asy}} = \mathcal{A} \left\{ \frac{2a_F^2}{1 + 2a_F} \right\} \frac{\sqrt{g_{\text{eff}}}}{N_A} \frac{M}{M_P} . \quad (16)$$

On établira que le paramètre \mathcal{A} vaut

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6\sqrt{5}} \alpha^{-2} . \quad (17)$$

2.10) (2 points) Le paramètre thermique T n'a de sens qu'au moment du découplage et immédiatement après. Ensuite, il joue le rôle d'un indicateur d'échelle spatiale. Exprimer sa valeur actuelle T_ϕ^0 en fonction de la température $T_\gamma^0 = 2.7$ K du fond cosmologique micro-onde et des valeurs appropriées de g_{eff} .

2.11) (1 point) Restituer les bonnes unités dans la relation (16). En utilisant la valeur trouvée précédemment pour T_ϕ^0 , calculer la densité relique $\Omega_\phi h^2$ des neutralinos scalaires en fonction de leur masse M . La densité de fermeture ρ_C^0 est donnée dans le glossaire.

2.12) (1 point) La contribution de la matière à la densité totale de l'univers a été évaluée par le satellite WMAP

$$\Omega_M h^2 = 0.16 \pm 0.04 . \quad (18)$$

Quelles sont les valeurs de M compatibles avec cette observation ?

3 Analyse du travail de Servant et Tait.

Cette partie est notée sur 8 points.

Le neutralino de Kaluza–Klein est en réalité un boson de jauge lourd B possédant **3 états de spin**. Comme le scalaire ϕ , il peut s'annihiler en fermions légers f avec une section efficace calculée par G. Servant et T. Tait

$$\sigma \times |\vec{V}_1 - \vec{V}_2| \{BB \rightarrow f\bar{f}\} = \frac{8\pi}{9} c_f (Y_{fL}^4 + Y_{fR}^4) \frac{\alpha_1^2}{M^2} . \quad (19)$$

Le facteur de couleur c_f a déjà été pris en compte ici. Les hypercharges Y_{fL} et Y_{fR} sont données dans le tableau 1 suivant.

Y_{eL}	Y_{eR}	$Y_{\nu L}$	Y_{uL}	Y_{uR}	Y_{dL}	Y_{dR}
$-1/2$	-1	$-1/2$	$1/6$	$2/3$	$1/6$	$-1/3$

Table 1: Hypercharges Y_{fL} et Y_{fR} intervenant dans la section efficace d'annihilation (19).

3.1) (2 points) Mettre l'expression (19) sous la forme de la relation (9). Expliciter N_A comme une somme sur les fermions légers produits f faisant intervenir le cosinus de l'angle θ_W , le facteur de couleur c_f et les hypercharges Y_{fL} et Y_{fR} . Calculer numériquement N_A pour une masse M du boson B de l'ordre du TeV.

*A défaut, on pourra sans trop d'erreur prendre $T_\phi^0 = 1$ Kelvin.

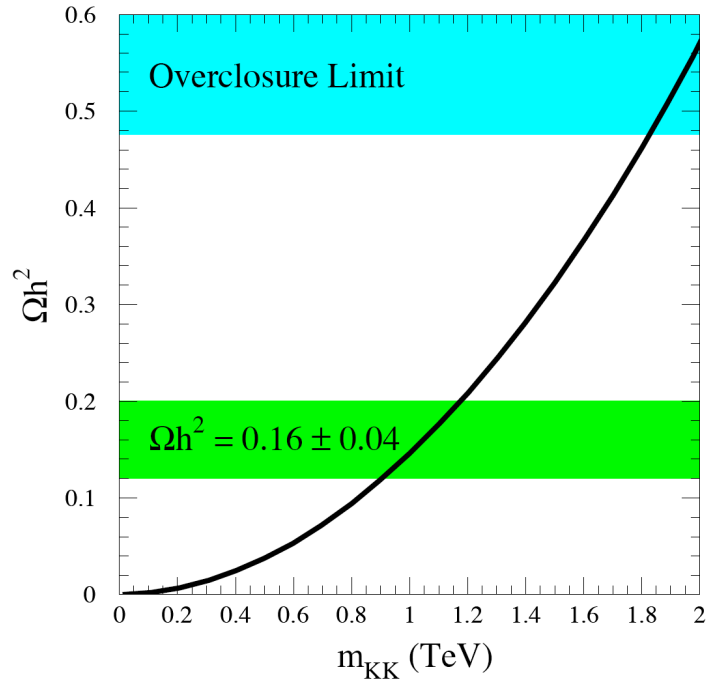


Figure 2: Prediction for $\Omega_{B^{(1)}}h^2$ as a function of the KK mass (when neglecting coannihilation). The upper horizontal region delimits the values of Ωh^2 above which the contribution from $B^{(1)}$ to the energy density would overclose the universe. The lower horizontal band denotes the region $\Omega = 0.33 \pm 0.035$ (using $h = 0.69 \pm 0.06$) and defines the KK mass window if all the dark matter is to be accounted for by the $B^{(1)}$ LKP.

- 3.2) (2 points)** En prenant $M = 1$ TeV, calculer la température T_F de découplage.
- 3.3) (2 points)** On exprimera la codensité asymptotique du boson B grâce à la relation (16) en prenant soin de recalculer le facteur \mathcal{A} .
- 3.4) (2 points)** Dériver finalement $\Omega_B h^2$ et donner les valeurs de la masse M compatibles avec les observations de WMAP. On pourra consulter la figure précédente afin de comparer les résultats obtenus avec ceux de Servant et de Tait.

Bon courage !

Glossaire

Constante réduite de Planck

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J s} . \quad (20)$$

Vitesse de la lumière

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} . \quad (21)$$

Constante de Boltzmann

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} . \quad (22)$$

Masse de Planck

$$M_P = 1.22 \times 10^{16} \text{ TeV} . \quad (23)$$

Densité de fermeture de l'univers

$$\rho_C^0 = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} = 10.6 \text{ keV cm}^{-3} h^2 . \quad (24)$$

Unité d'énergie de physique des particules

$$1 \text{ TeV} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ J} . \quad (25)$$

Constante de structure fine de l'électromagnétisme

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} . \quad (26)$$

Constante de structure fine du groupe $U(1)$ de l'hypercharge Y

$$\alpha_1 = \frac{g_1^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W} . \quad (27)$$

L'angle de mélange électro-faible θ_W est caractérisé par

$$\sin \theta_W = 0.473 . \quad (28)$$