

Master M2 des Sciences de la Matière
Parcours Physique, Concepts et Applications
Ecole Normale Supérieure de Lyon et Université Claude Bernard Lyon 1
Janvier à mars 2018

Introduction à l'astrophysique des particules

Pierre Salati^{1,2}

¹ Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTh,
9 Chemin de Bellevue, B.P. 110, Annecy-le-Vieux
74941 Annecy Cedex

² Université Savoie Mont Blanc, B.P. 1104, 73011 Chambéry Cedex
salati@lapth.cnrs.fr & pierre.salati@univ-smb.fr
téléphone 04.50.09.16.69
site web <http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/salati/>



Plan du cours

- Vendredi 19 Janvier 2018 – 1H30 + 1H30 – Le chapitre **I** sera consacré aux propriétés thermodynamiques du plasma primordial qui emplissait l'univers pendant la première seconde de son existence. Nous étudierons également le gel thermique que subissent les différentes espèces de particules. Nous aborderons enfin le découplage chimique – freeze-out ou decoupling en anglais – au cours duquel les particules massives s'annihilent avant de cesser leurs interactions thermiques.

- Vendredi 2 Février 2018 – 1H30 + 1H30 – Nous terminerons la présentation du découplage chimique et montrerons que la densité relique actuelle d'une espèce stable est donnée par sa section efficace d'annihilation. Nous constaterons également qu'une particule dotée d'interactions faibles possède aujourd'hui une abondance fossile de l'ordre de la densité de fermeture ρ_C^0 . La séance se poursuivra par une introduction au problème de la matière noire.

● Vendredi 9 Février 2018 – 1H30 + 1H30 – Le problème de la matière noire astronomique est abordé dans le chapitre **II**. Une composante importante de l’univers existe sous forme de matière non-baryonique et est probablement constituée de particules massives et neutres – les neutralinos – qui font l’objet de recherches actives et astucieuses tant sous terre qu’au fond des mers et dans l’espace. Je finirai de présenter le problème et nous nous concentrerons ensuite sur la détection directe des neutralinos ainsi que sur la production de photons de haute énergie détectables par les télescopes à effet Cerenkov atmosphérique tel celui de la collaboration HESS.

● Vendredi 16 Février 2018 – 1H30 + 1H30 – Suite et fin du second chapitre et début du chapitre **III** avec le calcul de la trajectoire d’un rayon lumineux au sein d’un champ de gravitation. Nous comparerons différentes approches. Des connaissances de relativité générale sont requises.

● Vendredi 2 Mars 2018 – 1H30 + 1H30 – Dans le chapitre **III**, nous nous intéresserons à la déviation des rayons lumineux par les corps célestes. La recherche d’amplifications lumineuses par effet gravitationnel permet de sonder la nature du halo de la Voie Lactée. Cette méthode a été utilisée par les expériences EROS et MACHO et sera présentée. Nous distinguerons ensuite les régimes de strong et de weak lensing dans le cas des amas galactiques et étudierons les arcs gravitationnels qu’ils engendrent. Les notions de convergence et de cisaillement seront introduites.

● Vendredi 9 Mars 2018 – 1H30 + 1H30 – Chapitre **IV** avec la mise en évidence de l’accélération de l’univers grâce aux supernovae de type Ia. Le diagramme (luminosité vs red-shift) des supernovae SNeIa indique que l’univers serait essentiellement gouverné aujourd’hui par une constante cosmologique ou bien par un fluide dont la pression est négative. Cette partie a été traitée au semestre 3a en remplacement du cours de Thomas Buchert. La suite sera consacrée à l’étude de ce fluide de quintessence et à son champ scalaire associé dont nous analyserons le potentiel.

Projets par équipe

Il s'agit pour une équipe de deux à trois étudiants de travailler sur un sujet particulier inspiré par des développements récents en astrophysique des particules pendant deux semaines et de présenter pendant un vingtaine de minutes le problème, les calculs effectués (sans rentrer dans les détails), les difficultés rencontrées et les résultats.

- **Densité relicue** – Géraldine Servant et Tim Tait se sont intéressés à des candidats à la matière noire issus de théories avec des dimensions supplémentaires. Le WIMP est alors incarné par un photon excité de Kaluza–Klein. Il s'agit de calculer la densité relicue de cette particule qui s'avère être stable et de déterminer sa masse pour qu'elle explique la valeur observée de $\Omega_{\text{CDM}}h^2$.

- **Détection directe de WIMPs** – Ce projet débute par un calcul du taux d'événements attendus dans une expérience de détection directe. On pourra reprendre le cours présenté à Cargèse en 2007. Il s'agit ensuite de dériver le plot d'exclusion et d'étudier comment il se modifie quand on prend en compte la rotation de la Terre ou le facteur de forme des noyaux.

- **Détection indirecte de WIMPs** – Cette fois, on s'intéresse à l'émission gamma provenant de l'annihilation des WIMPs cachés dans les galaxies naines sphéroïdes. On dérivera la distribution de matière noire dans ces objets en les modélisant, on caculera le flux attendu sur Terre en fonction du canal d'annihilation et on déterminera les contraintes que HESS ou CTA peuvent atteindre.

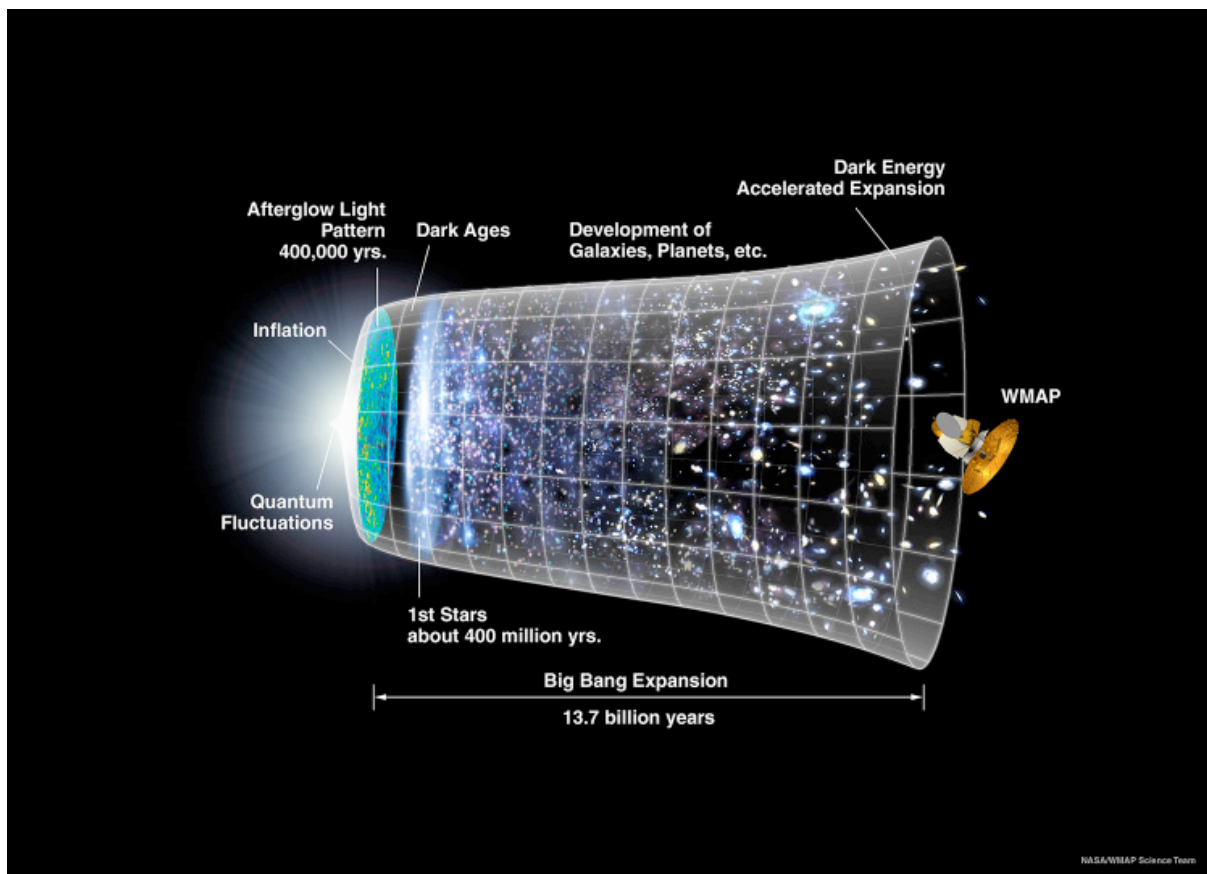
- **Propagation du rayonnement cosmique** – Il s'agit de modéliser trivialement la propagation des rayons cosmiques chargés au sein du halo magnétique de la Voie Lactée en utilisant un modèle 1D. Puis on analysera comment les mesures sur le rapport des flux de bore sur carbone peuvent contraindre les paramètres de propagation. On finira par le calcul du flux d'antiprotons attendu dans le cas où des WIMPs en produiraient dans le halo galactique en s'annihilant.

- **Optique gravitationnelle** – On s'intéresse ici aux mirages gravitationnels engendrés par une galaxie dont la distribution de matière est proche de celle d'une sphère isotherme dotée d'un coeur. Il faut montrer que les images multiples que donne la galaxie d'un objet lointain n'existent que si le coeur est suffisamment petit. Ensuite, on se concentrera sur le weak lensing et on étudiera comment déterminer la carte de convergence à partir du champ des déformations subies par les images de sources lointaines. Le bullet cluster sera pris pour illustration.

Chapitre I

Plasma primordial et découplage des particules élémentaires

Nous étudions les propriétés thermodynamiques du plasma primordial qui emplissait l'univers pendant la première seconde de son existence. Nous détaillerons également le gel thermique et le découplage chimique que subissent les différentes espèces de particules. Les neutrinos cessent ainsi d'être thermalisés avec leur environnement dès que la température devient inférieure à ~ 1 MeV. Nous montrerons finalement que l'abondance fossile d'une particule neutre, dont la masse est ~ 1 GeV à quelques dizaines de TeV et qui interagit faiblement, est de l'ordre de la densité de fermeture ρ_C^0 . Un tel résultat a d'importantes conséquences sur le problème de la matière noire astronomique.



1) Introduction.

1.1) Rappels sur le modèle de Friedmann–Lemaître.

Le modèle de Friedmann–Lemaître est fondé sur le principe cosmologique selon lequel l'univers est homogène et isotrope. La géométrie correspondante est décrite par la métrique de Robertson et Walker

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} . \quad (\text{I.1})$$

Le facteur d'échelle $R(t)$ varie au cours du temps et obéit aux équations de la relativité générale

$$H^2 = \left\{ \frac{\dot{R}}{R} \right\}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} , \quad (\text{I.2})$$

et

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho - 4\pi G P . \quad (\text{I.3})$$

La relation (I.3) concerne l'accélération \ddot{R} avec laquelle le facteur d'échelle augmente. Elle peut être dérivée à partir de l'équation (I.2) et du caractère adiabatique de l'expansion

$$\frac{d}{dt} \{ \rho R^3 \} = -P \frac{dR^3}{dt} . \quad (\text{I.4})$$

Le taux d'expansion actuel est noté H_0 . Si l'univers est plat, sa densité est égale à la valeur critique dite de fermeture donnée par

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_C^0 . \quad (\text{I.5})$$

Une valeur de $H_0 = 100$ km/s/Mpc se traduit par une densité de fermeture $\rho_C^0 = 1.88 \times 10^{-29}$ g cm⁻³. Les observations du fond de rayonnement micro-onde ainsi que des supernovae de type Ia indiquent que l'univers est plat avec une composante de matière constituant aujourd'hui une fraction $\Omega_{\text{CDM}} = 0.268$ de la densité de fermeture ρ_C^0 . La contribution des baryons – confirmée par la nucléosynthèse primordiale – s'élève à

$$\Omega_{\text{B}} = \frac{\rho_{\text{B}}}{\rho_C^0} \sim 0.049 . \quad (\text{I.6})$$

Finalement, près des deux tiers de l'univers sont formés d'un fluide de pression négative se comportant pratiquement comme une constante cosmologique.

1.2) L'Ylem de Gamow.

L'univers est rempli d'un fluide de pression P et de densité d'énergie ρ dont nous allons étudier les propriétés thermodynamiques. Nous nous intéressons ici à l'univers primordial de la première seconde après le big-bang.



Figure I.1: George Gamow et ses collaborateurs ont été les pionniers de l'étude du big-bang. Le terme **Ylem** que Gamow utilise pour décrire l'état de la matière lorsque l'univers est incroyablement chaud et dense provient du vieil anglais et signifie substance primordiale dont toute chose est faite.

- Le gaz originel – dénommé **ylem** par Gamow – existe sous la forme d'un plasma complètement ionisé de particules élémentaires. Dans la mesure où leur énergie cinétique l'emporte largement sur leur énergie potentielle d'interaction à distance, nous supposons que ce gaz est parfait. Cette hypothèse n'est toutefois plus valable dans le cas de la transition de phase quarks–hadrons où les interactions fortes réussissent à confiner les quarks au sein de particules telles que les protons, les neutrons et les pions.

- Le plasma primordial est en équilibre thermique sous l'effet de collisions du type



- L'équilibre chimique est réalisé à travers des réactions comme



Nous en déduisons immédiatement que le potentiel chimique μ_γ des photons est nul et que le gaz de lumière a un spectre de Planck. D'autre part, les potentiels chimiques des électrons et des positrons sont opposés

$$\mu_{e^-} = -\mu_{e^+} . \quad (\text{I.9})$$

- L'asymétrie entre matière et antimatière est faible dans la mesure où aujourd'hui le rapport entre baryons et photons vaut $n_B/n_\gamma \sim 6 \times 10^{-10}$. Les potentiels chimiques μ_{e^-} et μ_{e^+} sont donc égaux.

Les hypothèses précédentes nous conduisent à décrire le plasma primordial comme un ensemble de populations bosoniques et fermioniques de température T et de potentiel chimique **nul** – avec par exemple $\mu_{e^-} = \mu_{e^+} = 0$. Une espèce A est régie par la distribution statistique homogène

$$f_A \{ \vec{x}, \vec{p} \} = \frac{1}{\exp \{ E/kT \} - \epsilon} , \quad (\text{I.10})$$

où l'énergie E et l'impulsion \vec{p} sont reliées par

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 . \quad (\text{I.11})$$

Le facteur statistique ϵ vaut $+1$ pour un boson et -1 pour un fermion. Il convient de multiplier l'expression (I.10) par le nombre g_A d'états de spin ou d'hélicité s'il y a lieu.

2) Contribution thermodynamique d'une espèce A .

2.1) Densité numérique.

La densité de l'espèce A précédente est donnée par l'expression générale

$$n_A = \frac{g_A}{2\pi^2} \left\{ \frac{kT}{\hbar c} \right\}^3 \int_0^\infty x^2 dx \{e^y - \epsilon\}^{-1} , \quad (\text{I.12})$$

où $x = pc/kT$ et $y = E/kT$ sont reliés par

$$y^2 = a^2 + x^2 . \quad (\text{I.13})$$

Le rapport Mc^2/kT entre masse et température est dénoté a .

Remarque : afin de simplifier les expressions de ce cours, nous décidons dorénavant de travailler dans un système d'unités où la vitesse de la lumière c , la constante de Boltzmann k et la constante réduite de Planck $\hbar = h/2\pi$ valent 1. Pour restituer les unités usuelles, il convient de multiplier par le bon cocktail de constantes \hbar , k et c – en l'occurrence par le facteur

$$\left(\frac{k}{\hbar c} \right)^3 = 83.22 \text{ K}^{-3} \text{ cm}^{-3} , \quad (\text{I.14})$$

en ce qui concerne la relation (I.12) donnant la densité.

- Dans la limite des fortes températures, la masse M devient négligeable devant T et les particules sont ultra-relativistes, avec des vitesses moyennes proches de la célérité c de la lumière. Les variables x et y sont quasiment égales de sorte que la densité se simplifie en

$$n_A = \frac{g_A}{\pi^2} T^3 \zeta(3) \begin{cases} 1 & (\text{Boson}) \\ 3/4 & (\text{Fermion}) \end{cases} , \quad (\text{I.15})$$

où $\zeta(3) = 1.20205$. On remarquera avec profit que le rapport n_A/T^3 est alors constant. Pour des photons, ce rapport vaut environ $20 \text{ K}^{-3} \text{ cm}^{-3}$. Pour des neutrinos à 2 états de spin, il est d'environ $15 \text{ K}^{-3} \text{ cm}^{-3}$.

- Dans la limite des basses températures, le gaz devient non-relativiste. Dans ce régime, le rapport $a = M/T$ est très grand devant 1 et la densité se simplifie en

$$n_A = g_A T^3 e^{-a} \left(\frac{a}{2\pi} \right)^{3/2} . \quad (\text{I.16})$$

2.2) Densité d'énergie et pression.

La densité d'énergie ρ et la pression P du gaz composé des particules A sont respectivement données par l'intégrale sur l'espace des phases de l'énergie E et du produit $\vec{p} \cdot \vec{v} / 3$

correspondant à chaque état quantique de propagation

$$\rho_A = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} g_A \left\{ \frac{E}{\exp(E/kT) - \epsilon} \right\} , \quad (\text{I.17})$$

et

$$P_A = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} g_A \left\{ \frac{p v/3}{\exp(E/kT) - \epsilon} \right\} . \quad (\text{I.18})$$

Si l'on travaille de nouveau dans des unités où $\hbar = k = c = 1$, la densité d'énergie se réduit à l'intégrale sans dimension

$$\rho_A = \frac{g_A}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty x^2 dx \left(\frac{y}{e^y - \epsilon} \right) . \quad (\text{I.19})$$

Il convient alors de multiplier cette expression par la quantité

$$\left(\frac{k^4}{\hbar^3 c^3} \right) \simeq 1.15 \times 10^{-21} \text{ J cm}^{-3} \text{ K}^{-4} , \quad (\text{I.20})$$

afin de restituer les unités usuelles.

- Dans le régime non-relativiste des basses températures pour lequel T est très petit devant M , la densité d'énergie ρ est négligeable. Elle se comporte en effet de façon exponentielle en e^{-a} .
- Par contre, dans la limite ultra-relativiste où M est cette fois négligeable devant la température T , l'expression (I.19) se simplifie. La densité d'énergie d'un gaz de bosons ou de fermions ultra-relativistes – donc de masse nulle ou négligeable – est donnée par

$$\rho_A = \frac{\pi^2}{15} \frac{g_A}{2} T^4 \begin{cases} 1 & \text{(Boson)} \\ 7/8 & \text{(Fermion)} \end{cases} . \quad (\text{I.21})$$

On s'aide de la relation

$$\int_0^\infty dx \left(\frac{x^n}{e^x - \epsilon} \right) = \Gamma(n+1) \zeta(n+1) \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon = 1 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases} . \quad (\text{I.22})$$

La fonction $\zeta(s)$ est définie par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} , \quad (\text{I.23})$$

et $\Gamma(s)$ désigne la fonction Gamma d'Euler. La densité d'énergie associée à un gaz de photons est alors donnée par la relation

$$\rho_\gamma = a_\gamma T^4 . \quad (\text{I.24})$$

Le coefficient a_γ vaut

$$a_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{k^4}{\hbar^3 c^3} \right) = 7.57 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} , \quad (\text{I.25})$$

et est relié à la constante de Stefan par $\sigma_S = a_\gamma c / 4$. Il est commode d'exprimer l'énergie volumique du plasma primordial en utilisant comme unité la densité d'énergie du gaz de photons pris à la même température. La population des particules A est alors caractérisée par le nombre effectif de degrés de liberté

$$g_{\text{eff}}(A) = \frac{\rho_A}{\rho_\gamma} . \quad (\text{I.26})$$

La figure I.2 présente le cas d'une particule A ayant deux états de spin avec $g_A = 2$. Dans le régime ultra-relativiste, le rapport $a = M/T$ tend vers 0 et le coefficient g_{eff} tend vers 1 pour des bosons et vers 7/8 pour des fermions. Lorsque la température s'abaisse par rapport à la masse M , le rapport a augmente et la densité d'énergie diminue. L'évolution de g_{eff} en fonction du rapport M/T est donnée par les deux courbes en trait continu de la figure I.2. Dans le régime non-relativiste ($a \gg 1$), les comportements des bosons et des fermions sont identiques car tous deux se réduisent à la statistique de Maxwell-Boltzmann.

2.3) Densité d'entropie.

L'entropie du plasma primordial se calcule en prenant un potentiel chimique nul pour toutes les espèces. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, il vient

$$T \sigma_A = \rho_A + P_A , \quad (\text{I.27})$$

où σ_A désigne l'entropie volumique du gaz des particules A . Dans le système d'unités où $\hbar = k = c = 1$, la densité d'entropie s'exprime par une intégrale sans dimension

$$\sigma_A = \frac{g_A}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty x^2 dx \left\{ y + \frac{x^2}{3y} \right\} \{e^y - \epsilon\}^{-1} . \quad (\text{I.28})$$

Dans le régime ultra-relativiste, il est possible de relier simplement les densités d'entropie et d'énergie

$$\sigma_A = \frac{4 \rho_A}{3 T} = \frac{4\pi^2}{45} \frac{g_A}{2} T^3 \begin{cases} 1 & (\text{Boson}) \\ 7/8 & (\text{Fermion}) \end{cases} . \quad (\text{I.29})$$

De même, l'entropie d'un gaz quelconque peut être exprimée en fonction de l'entropie σ_γ du gaz de lumière pris à la même température. Le coefficient correspondant cette fois à la densité d'entropie est défini par

$$h_{\text{eff}}(A) = \frac{\sigma_A}{\sigma_\gamma} . \quad (\text{I.30})$$

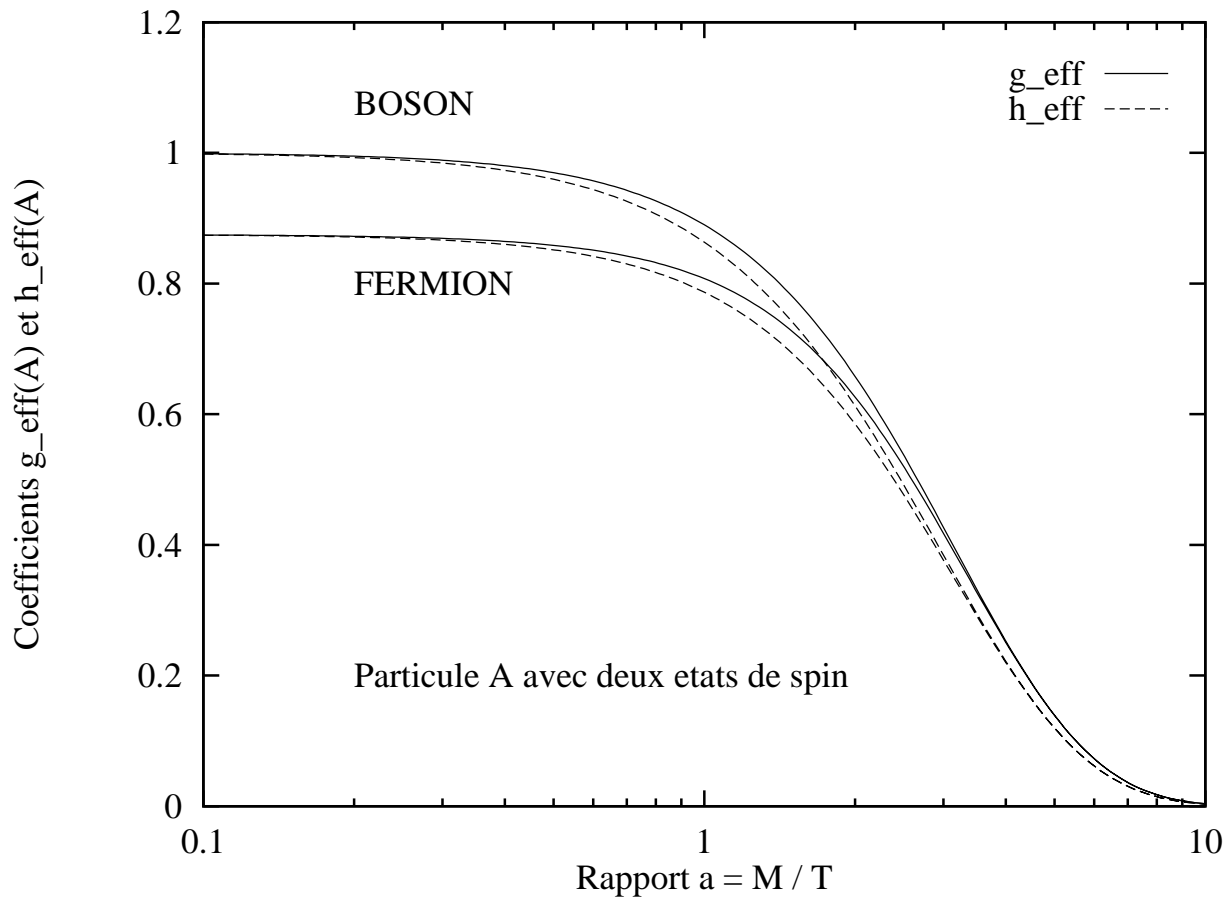


Figure I.2: Cette figure se rapporte à une particule A à 2 états de spin, de sorte que $g_A = 2$. Les densités d'énergie et d'entropie sont exprimées en fonction de celles d'un gaz de photons de même température. Le nombre effectif g_{eff} de degrés de liberté se rapportant à l'énergie est tracé en trait continu dans le cas de bosons (courbe supérieure) et de fermions (courbe inférieure). Le nombre effectif h_{eff} caractérise l'entropie du gaz des particules A et est tracé en tirets. Les densités d'énergie et d'entropie varient en fonction du rapport a de la masse M des particules A à la température T du gaz.

Le comportement de h_{eff} est présenté dans la figure I.2 par les deux courbes en tirets. A haute température, les coefficients g_{eff} et h_{eff} sont égaux. Ils deviennent différents dans le régime non-relativiste où bosons et fermions se comportent de manière identique.

2.4) Degrés effectifs de liberté.

Les densités d'énergie et d'entropie du plasma primordial sont données par les coefficients correspondants $g_{\text{eff}}(T)$ et $h_{\text{eff}}(T)$ qui prennent en compte toutes les espèces susceptibles d'exister à l'époque considérée

$$g_{\text{eff}}(T) = \frac{\rho(T)}{\rho_\gamma(T)} \quad \text{et} \quad h_{\text{eff}}(T) = \frac{\sigma(T)}{\sigma_\gamma(T)} . \quad (\text{I.31})$$

A une température donnée, seules contribuent vraiment les particules qui se comportent de façon ultra-relativiste et dont la masse est inférieure à la température. En exprimant ces densités en unités correspondant au gaz de lumière, les coefficients $g_{\text{eff}}(T)$ et $h_{\text{eff}}(T)$ du plasma s'écrivent comme une somme sur les états de spin des bosons et des fermions qui, à la température T , se comportent de façon ultra-relativiste

$$g_{\text{eff}}(T) \simeq h_{\text{eff}}(T) \simeq \sum_{M_B < T} \frac{g_B}{2} + \sum_{M_F < T} \frac{7 g_F}{16} . \quad (\text{I.32})$$

Dans la figure I.3, les coefficients relatifs à l'énergie $g_{\text{eff}}(T)$ et à l'entropie $h_{\text{eff}}(T)$ ont été calculés exactement en prenant en compte directement les intégrales (I.19) et (I.28). La courbe en trait continu donne l'évolution de g_{eff} lorsque la température s'abaisse de 10 GeV à 10 MeV. Les tirets se rapportent au nombre effectif h_{eff} de degrés de liberté entropiques. La courbe en pointillés représente le comportement en escalier de l'approximation (I.32). Ses variations sont saccadées car dès que la température devient inférieure à la masse d'une espèce donnée, celle-ci cesse immédiatement d'être prise en compte dans l'expression (I.32). Cependant, sa contribution réelle à la densité d'énergie globale ne s'estompe que progressivement. L'approximation (I.32) est toutefois satisfaisante.

2.5) Développements numériques.

Les intégrales thermodynamiques sur la variable x peuvent très bien être calculées directement grâce à la méthode de Simpson par exemple. Il est toutefois possible de les développer en une série rapidement convergente de fonctions de Bessel modifiées $K_\nu(x)$ qui sont solutions par ailleurs de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^2 K_\nu}{dx^2} + x \frac{dK_\nu}{dx} - \{x^2 + \nu^2\} K_\nu = 0 . \quad (\text{I.33})$$

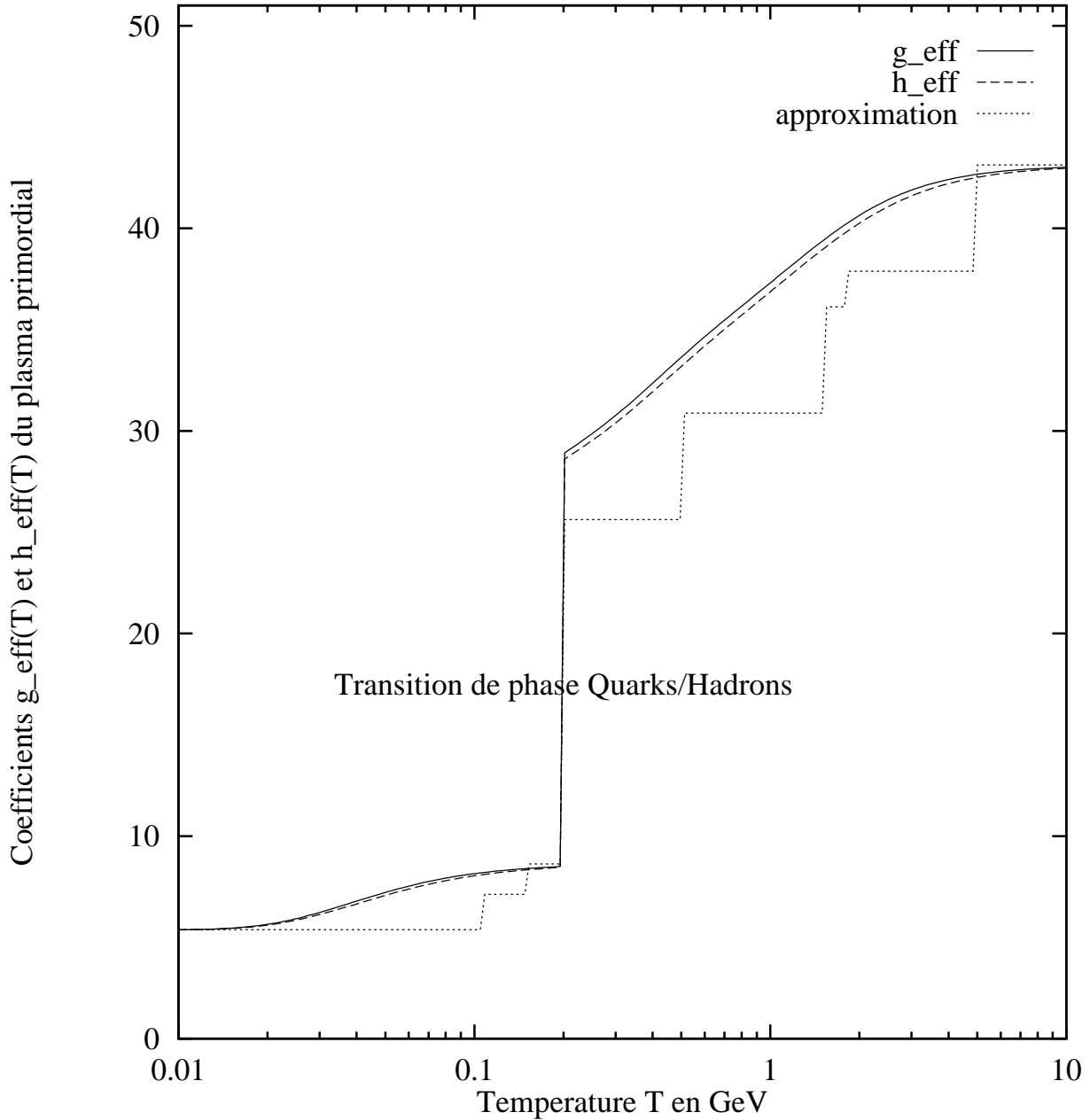


Figure I.3: Les nombres effectifs de degrés de liberté g_{eff} – trait plein – et h_{eff} – tirets – décrivent respectivement les densités d’énergie et d’entropie du plasma primordial ramenées au gaz de photons. Ces coefficients diminuent lorsque la température T s’abaisse de 10 GeV à 10 MeV dans la mesure où de plus en plus d’espèces disparaissent au cours du refroidissement. Les pointillés représentent l’approximation (I.32) discutée dans le texte.

Les fonctions de Bessel K_0 et K_1 sont tabulées et le code C correspondant est donné dans *Numerical Recipes*. En utilisant la relation bien utile

$$\int_u^{+\infty} \{x^2 - u^2\}^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2u}{\mu} \right\}^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) K_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu) , \quad (\text{I.34})$$

je laisse le soin au lecteur de montrer que la densité numérique d'une espèce A est donnée par la série

$$\frac{n_A}{T^3} = \frac{g_A}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1} \left\{ \frac{2a}{n^2} K_1(na) + \frac{a^2}{n} K_0(na) \right\} , \quad (\text{I.35})$$

où $a = M/T$ désigne le rapport masse sur température. Pour obtenir le développement de la densité d'énergie ρ_A et de l'entropie volumique σ_A , on s'aidera avec profit de la formule de récursion

$$K_2(x) = \frac{2}{x} K_1(x) + K_0(x) . \quad (\text{I.36})$$

Les degrés effectifs de liberté h_{eff} et g_{eff} définis par les relations (I.26) et (I.30) se développent alors en

$$g_{\text{eff}}(A) = \frac{g_A}{2} \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1} \left\{ \left\{ \frac{6a}{n^3} + \frac{a^3}{n} \right\} K_1(na) + \frac{3a^2}{n^2} K_0(na) \right\} \quad (\text{I.37})$$

pour la densité d'énergie et en

$$h_{\text{eff}}(A) = \frac{g_A}{2} \frac{45}{4\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1} \left\{ \left\{ \frac{8a}{n^3} + \frac{a^3}{n} \right\} K_1(na) + \frac{4a^2}{n^2} K_0(na) \right\} \quad (\text{I.38})$$

pour l'entropie volumique.

3) La cinétique d'expansion.

3.1) La masse de Planck.

Dans le système d'unités où la vitesse de la lumière c vaut 1, une longueur est homogène à un temps d'un point de vue dimensionnel

$$[\text{Longueur}] \equiv [\text{Temps}] . \quad (\text{I.39})$$

De même masse, impulsion et énergie sont équivalentes. Si maintenant la constante de Boltzmann k vaut 1, température et énergie sont homogènes. Finalement, lorsque la constante de Planck \hbar est égale à 1, le temps devient l'inverse de l'énergie

$$[\text{Energie}] \equiv [\text{Temps}]^{-1} . \quad (\text{I.40})$$

En particulier, l'inverse d'un MeV correspond au laps de temps $\hbar/1 \text{ MeV}$, soit encore à 6.6×10^{-22} seconde.

La masse de Planck est construite à partir de la constante de gravitation G de Newton dont la valeur est d'environ $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. En multipliant G par le bon mélange des constantes fondamentales \hbar et c , il vient

$$M_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \simeq 1.96 \times 10^9 \text{ J} \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV} . \quad (\text{I.41})$$

3.2) Expansion adiabatique et relation entre T et R .

Le plasma primordial est en expansion adiabatique et son entropie se conserve. Considérons alors un volume se dilatant avec l'espace. Un tel volume s'appelle un **covolume** car ses coordonnées comobiles r , θ et ϕ ne varient pas au cours du temps. Prenons pour simplifier un volume égal à R^3 où $R(t)$ est le facteur d'échelle. L'entropie du plasma primordial contenu dans ce covolume s'écrit

$$S = \sigma(T) R^3 , \quad (\text{I.42})$$

et ne varie pas au cours du temps. La relation (I.31) permet d'exprimer directement l'entropie S en fonction de la température T et du facteur d'échelle R

$$S = h_{\text{eff}}(T) \frac{4\pi^2}{45} T^3 R^3 . \quad (\text{I.43})$$

En première approximation, on peut négliger les variations du coefficient h_{eff} avec la température. La figure I.3 montre bien que h_{eff} ne varie que d'un facteur 8 lorsque la température diminue de trois ordres de grandeur, passant de 10 GeV à 10 MeV. La conservation de l'entropie implique donc que le produit de la température par le facteur d'échelle est constant

$$T \times R(t) = \text{Constante} . \quad (\text{I.44})$$

3.3) Relation âge–température.

Les deux termes dans le membre de droite de l'équation d'expansion (I.2) sont à priori du même ordre de grandeur * à l'heure actuelle. Si l'on remonte dans le passé, le terme de courbure augmente en R^{-2} alors que le terme d'énergie augmente beaucoup plus rapidement. Il varie tout d'abord en R^{-3} tant que la densité d'énergie est dominée par la matière non-relativiste. Puis, lorsque l'on se rapproche des tous premiers instants, quand l'univers

*Les mesures des satellites WMAP et Planck indiquent en fait que le terme de courbure est pratiquement négligeable aujourd'hui.

est rempli d'un gaz essentiellement ultra-relativiste, il varie en R^{-4} . La nucléosynthèse primordiale se déroule lorsque la température de l'univers est d'environ 3×10^9 Kelvins. Le paramètre d'échelle $R(t)$ est alors un milliard de fois plus faible qu'aujourd'hui et l'expression (I.2) est totalement dominée par le terme relié à la densité d'énergie

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho . \quad (\text{I.45})$$

En exprimant la densité d'énergie du plasma primordial en fonction de la densité d'énergie du gaz de photons pris à la même température, la relation (I.45) conduit à une équation différentielle décrivant l'évolution dans le temps de la température

$$-\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{R}}{R} = \left\{ \frac{8\pi G}{3} g_{\text{eff}}(T) \frac{\pi^2}{15} T^4 \right\}^{1/2} . \quad (\text{I.46})$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$-\frac{\dot{T}}{T^3} = \left\{ \frac{8\pi^3 G}{45} g_{\text{eff}}(T) \right\}^{1/2} . \quad (\text{I.47})$$

et si l'on néglige les variations du coefficient g_{eff} avec la température, la relation entre l'âge t de l'univers et la température T est donnée par

$$\frac{M_{\text{P}}}{T^2} \simeq \left\{ \frac{32\pi^3}{45} g_{\text{eff}}(T) \right\}^{1/2} t , \quad (\text{I.48})$$

et devient numériquement

$$t \simeq \frac{1.7 \text{ seconde}}{\sqrt{g_{\text{eff}}(T)}} \left\{ \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right\}^2 . \quad (\text{I.49})$$

4) Découplage thermique : l'exemple des neutrinos.

L'expérience quotidienne nous apprend que les phénomènes physiques évoluent toujours du déséquilibre vers l'équilibre thermodynamique. Une casserole d'eau bouillante posée sur le rebord d'une fenêtre se refroidit et finit par se thermaliser avec l'air ambiant. Pendant le big-bang, le contraire précisément se produit. Les particules se découplent de l'équilibre thermodynamique et subissent une sorte de gel qui les fossilise. L'univers étant en expansion, les divers réactifs en présence sont formidablement dilués et se refroidissent. La dilatation de l'espace s'accompagne en effet d'une forte baisse de la température. Les processus responsables du maintien de l'équilibre thermodynamique se ralentissent et deviennent plus lents que l'expansion elle-même. Ils finissent par s'arrêter. Les diverses populations de particules subissent ainsi une trempe chimique à l'échelle de l'univers et les réactions nucléaires ou corpusculaires cessent. Les neutrinos constituent une excellente illustration de ce comportement.

4.1) Rupture de l'équilibre thermique.

A basse énergie, la force faible procède par une interaction locale où les courants impliqués interagissent au même point de l'espace. Dans le cas de la transmutation entre neutrons et protons, les particules se couplent ponctuellement, de sorte que le Lagrangien effectif décrivant cette réaction s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \Psi_\nu \} \{ \bar{\Psi}_P \gamma^\mu (g_V + g_A \gamma_5) \Psi_N \} + \text{h.c.} . \quad (\text{I.50})$$

La constante de Fermi G_F est caractéristique des interactions faibles et vaut

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} . \quad (\text{I.51})$$

Le couplage vectoriel g_V et le couplage axial g_A du courant correspondant au couple proton–neutron ont été déterminés expérimentalement. Ils valent respectivement 1 – vectoriel – et 1.26 – axial. Le couplage du neutrino est purement chirale et fait intervenir la projection de la fonction d'onde sur l'état de chiralité gauche. Cette projection est assurée par l'opérateur $P_L = (1 - \gamma_5)/2$. La chiralité se confond avec l'hélicité lorsque la masse de la particule est négligeable devant son énergie. Dans le domaine d'énergie qui nous intéresse, pour une température de l'ordre du MeV, la section efficace typique qui caractérise l'interaction des neutrinos avec les particules environnantes est approximativement donnée par

$$\langle \sigma v \rangle \sim G_F^2 T^2 , \quad (\text{I.52})$$

de sorte que le taux de collision des neutrinos avec le plasma primordial est

$$\Gamma_c \sim G_F^2 T^2 \{ n_{e^-} + n_{e^+} + n_\nu \} . \quad (\text{I.53})$$

A des facteurs numériques près, nous pouvons simplifier ce taux de collision en

$$\Gamma_c \sim G_F^2 T^5 . \quad (\text{I.54})$$

Le gaz de neutrinos est thermalisé avec l'ensemble du plasma environnant grâce aux multiples collisions qu'il entretient avec ce dernier. La thermalisation des neutrinos est assurée par leurs interactions avec les autres particules, interactions au cours desquelles l'énergie est échangée et tend à se répartir démocratiquement entre les diverses espèces. Le taux de collision décrit la rapidité avec laquelle la température T_ν des neutrinos relaxe vers la température T du reste du milieu. Cette dernière diminue comme l'inverse du facteur d'échelle R et son taux d'évolution est donc donné par le facteur d'expansion H de Hubble

$$H = \sqrt{\frac{8\pi^3}{45}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T)} \frac{T^2}{M_{\text{P}}} \sim \frac{T^2}{M_{\text{P}}} . \quad (\text{I.55})$$

Le taux de collision Γ_c varie comme la cinquième puissance de la température alors que le taux d'expansion H diminue plus doucement, étant quadratique en T . A haute température, le taux de collision l'emporte donc sur le taux d'expansion. Pendant un temps typique de dilatation de l'univers, temps de l'ordre de l'inverse de H , la température T_ν des neutrinos a largement le temps de relaxer vers la température T du reste du plasma. Si des fluctuations statistiques viennent à perturber T_ν , les nombreuses interactions entre les neutrinos et les autres particules sont suffisamment rapides pour thermaliser le mélange des espèces et le gaz évolue très rapidement vers l'équilibre thermique. Au fur et à mesure de l'expansion, la température chute et le taux de collision diminue plus rapidement que le taux d'expansion. A basse température, il est devenu plus faible que H . Le raisonnement précédent peut alors être inversé. Lorsque la température T s'abaisse, les collisions des neutrinos avec leur environnement deviennent si rares que T_ν n'a plus le temps de relaxer vers T . La probabilité qu'un neutrino interagisse pendant un temps typique d'expansion est devenue très inférieure à 1. La température du plasma évolue plus rapidement que celle des neutrinos de sorte que T_ν n'a plus le temps de rattraper T . Dans ce régime, le gaz primordial est alors complètement transparent aux neutrinos qui de surcroît cessent d'interagir entre eux. Les neutrinos se découplent de l'équilibre thermique pour constituer une population fossile. La transition se déroule au moment où Γ_c et H sont égaux, à une température de découplage T_d donnée par la relation

$$T_d \sim \{G_F^2 M_P\}^{-1/3} \sim 1 \text{ MeV} . \quad (\text{I.56})$$

Le gel des neutrinos a donc lieu pour une température d'environ 1 MeV. En-dessous de cette température, les neutrinos constituent une population fossile et ne sont plus en équilibre thermodynamique avec le reste de la matière. Il n'est donc plus possible de définir une température au sens de la thermodynamique. Cependant, leur densité par covolume – donc par volume qui suit l'expansion de l'univers – est constante car il n'y a plus de création ou de disparition substantielle de ces particules. D'autre part, la quantité de mouvement p d'un neutrino est associée par la mécanique quantique à la longueur λ de l'onde neutrinique correspondante. Or λ subit l'expansion de l'univers de sorte qu'elle augmente au cours du temps. L'impulsion p diminue alors comme

$$p \sim \frac{\hbar}{\lambda} \propto R^{-1} . \quad (\text{I.57})$$

L'élément de volume $d^3\vec{x} d^3\vec{p}$ n'est pas affecté par l'expansion de l'univers. La densité des neutrinos dans l'espace des phases est alors constante et leur distribution statistique est gelée à sa valeur de découplage.

4.2) La limite de Mac–Lelland.

Lorsque le découplage a eu lieu, la température des neutrinos n'a plus de sens thermodynamique. On peut cependant continuer à utiliser T_ν – en tant que paramètre d'échelle variant comme R^{-1} – ainsi que la relation (I.15).

Vers une température de 0.5 MeV, les électrons s'annihilent avec les positrons. Le dégagement de chaleur induit par ces réactions ne bénéficie qu'aux photons car les neutrinos n'interagissent plus avec le milieu. Ils ne sont donc plus susceptibles de recevoir d'énergie. La température des photons augmente alors par rapport à celle des neutrinos. Le réchauffement correspondant se calcule en écrivant que l'entropie du mélange radiatif constitué des électrons, des positrons et des photons reste constante au cours du temps. L'annihilation des électrons constitue en fait un phénomène interne à ce gaz radiatif. En prenant un volume de taille typique $T_\nu^{-1} \propto R$, il vient

$$S_{\text{rad}} = h_{\text{eff}}(\text{rad}) \sigma_\gamma(T) T_\nu^{-3} = \text{Constante} , \quad (\text{I.58})$$

où le nombre effectif de degrés de liberté entropiques du mélange radiatif est donné par

$$h_{\text{eff}}(\text{rad}) = h_{\text{eff}}(\gamma) + 2 h_{\text{eff}}(e^-) . \quad (\text{I.59})$$

Avant l'annihilation des électrons, pour une température supérieure à leur masse $m_e = 0.511$ MeV, le coefficient $h_{\text{eff}}(\text{rad})$ vaut 11/4. Une fois les photons seuls, ce coefficient est égal à 1. L'annihilation des électrons et des positrons conduit donc au réchauffement

$$\frac{T}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \sim 1.4 . \quad (\text{I.60})$$

La température actuelle des neutrinos vaut donc

$$T_\nu^0 = \frac{T_\gamma^0}{1.4} \sim 1.95 \text{ K} . \quad (\text{I.61})$$

L'abondance actuelle d'un neutrino à deux états de spin est de 110 cm^{-3} . Nous en déduisons tout de suite sa contribution à la densité de fermeture

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu^0}{\rho_C^0} = \frac{m_\nu \times 110 \text{ cm}^{-3}}{10.6 \text{ keV cm}^{-3} h^2} , \quad (\text{I.62})$$

où h est la constante de Hubble en unités de 100 km/s/Mpc. Il vient alors

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{m_\nu}{96 \text{ eV}} . \quad (\text{I.63})$$

Or le satellite Planck vient de mesurer avec une grande précision la densité des divers fluides cosmologiques constituant l'univers. La contribution des neutrinos ne peut pas

excéder celle de la composante de matière noire froide estimée à $\Omega_{\text{CDM}}h^2 = 0.12$. Cette contrainte se traduit par une limite supérieure sur la masse des neutrinos stables, appelée limite de Mac–Lelland

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \leq 11.5 \text{ eV} . \quad (\text{I.64})$$

5) Découplage chimique : la limite de Lee & Weinberg.

Un neutrino dont la masse est inférieure à $\sim 1 \text{ MeV}$ se découple thermiquement. Il se fossilise alors qu’il est encore dans le régime ultra–relativiste pour devenir une radiation neutrinique sans interaction. Par contre, si le neutrino est plus lourd – ou s’il s’agit d’un neutralino supersymétrique ou de Kaluza–Klein – il devient non–relativiste dans un régime où il est encore fortement couplé thermiquement avec son environnement. Les neutrinos A s’annihilent alors avec leurs antiparticules \bar{A} . On pourrait penser naïvement qu’ils disparaissent complètement de la scène. Il est vrai qu’en vertu de la relation (I.16), leur densité chute exponentiellement dans le régime non–relativiste. Au cours de la réaction



l’annihilation conduit en effet à une diminution brutale de la densité n_A , favorisée également par l’expansion de l’espace. Cependant, les neutrinos A ont de plus en plus de mal à trouver un partenaire \bar{A} pour disparaître. Au moment précis du découplage – freeze–out en anglais – la probabilité qu’une particule s’annihile pendant une durée typique d’expansion de l’univers devient inférieure à 100%. Nous sommes en présence d’un excellent exemple de trempé chimique. La réaction (I.65) gèle sous la double action de la chute de température et de la dilution des réactifs. Ensuite, quelques annihilations résiduelles conduisent à une légère diminution de la codensité

$$f_A = \frac{n_A}{T^3} \propto n_A R^3 , \quad (\text{I.66})$$

qui bientôt devient constante et se stabilise à sa valeur actuelle. Vers 1 MeV, les neutrinos cessent de voir leur environnement. Ils constituent une population fossile, vestige des premiers instants du big–bang. S’ils sont stables, ils flottent aujourd’hui dans le milieu intergalactique, contribuant peut-être de manière importante à la masse globale de l’univers.

5.1) L'équation d'évolution.

Dans les applications numériques, nous considérerons le cas d'école d'un neutrino lourd de **Dirac** de masse $M = 2$ GeV. La densité n_A obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dn_A}{dt} = -3Hn_A - \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_A^2 + \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_A^0{}^2 . \quad (\text{I.67})$$

- Le premier terme dans le membre de droite est le facteur de dilution résultant de la dilatation de l'espace. Même si aucune réaction n'a lieu, la densité diminue comme R^{-3} .
- Le second terme prend en compte les annihilations des neutrinos et des antineutrinos.
- Finalement, le dernier terme décrit la rétro-création des paires $A\bar{A}$ à partir des fermions légers. Le principe de l'équilibre détaillé est utilisé ici. On remarquera que si n_A est égal à n_A^0 , les termes d'annihilation et de création de paires se compensent exactement. C'est bien la condition requise pour que la réaction (I.65) soit en l'équilibre et que le potentiel chimique μ_A soit nul.

5.2) Solution approchée.

En utilisant la codensité f_A – la densité dans un volume qui suit l'expansion de l'espace – l'équation d'évolution (I.67) devient

$$\frac{df_A}{dt} + \{ \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_A \} f_A = \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle T^3 f_A^0{}^2 . \quad (\text{I.68})$$

Deux temps typiques peuvent être définis afin de résoudre cette équation.

- Tout d'abord, le temps caractéristique de relaxation de f_A vers sa solution d'équilibre cinétique f_A^0 est simplement donné par la probabilité d'annihilation entre neutrinos

$$\tau_{rel}^{-1} = \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_A . \quad (\text{I.69})$$

- Ensuite, l'échelle de temps sur laquelle l'équilibre f_A^0 lui-même varie appréciablement s'exprime comme :

$$\tau_{eq}^{-1} = -\frac{d}{dt} \text{Log} \left\{ f_A^0{}^2 T^3 \right\} , \quad (\text{I.70})$$

et se réduit à $2aH$ dans le régime non-relativiste.

A haute température – faibles valeurs de a – le temps de relaxation τ_{rel} est très faible devant le temps typique τ_{eq} d'évolution de l'équilibre chimique. La codensité f_A est alors pratiquement égale à sa valeur d'équilibre f_A^0 . Le découplage intervient lorsque τ_{rel} et τ_{eq} se croisent, donc pour la valeur a_F du rapport masse sur température vérifiant

$$\langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_A^0 = 2 a_F H . \quad (\text{I.71})$$

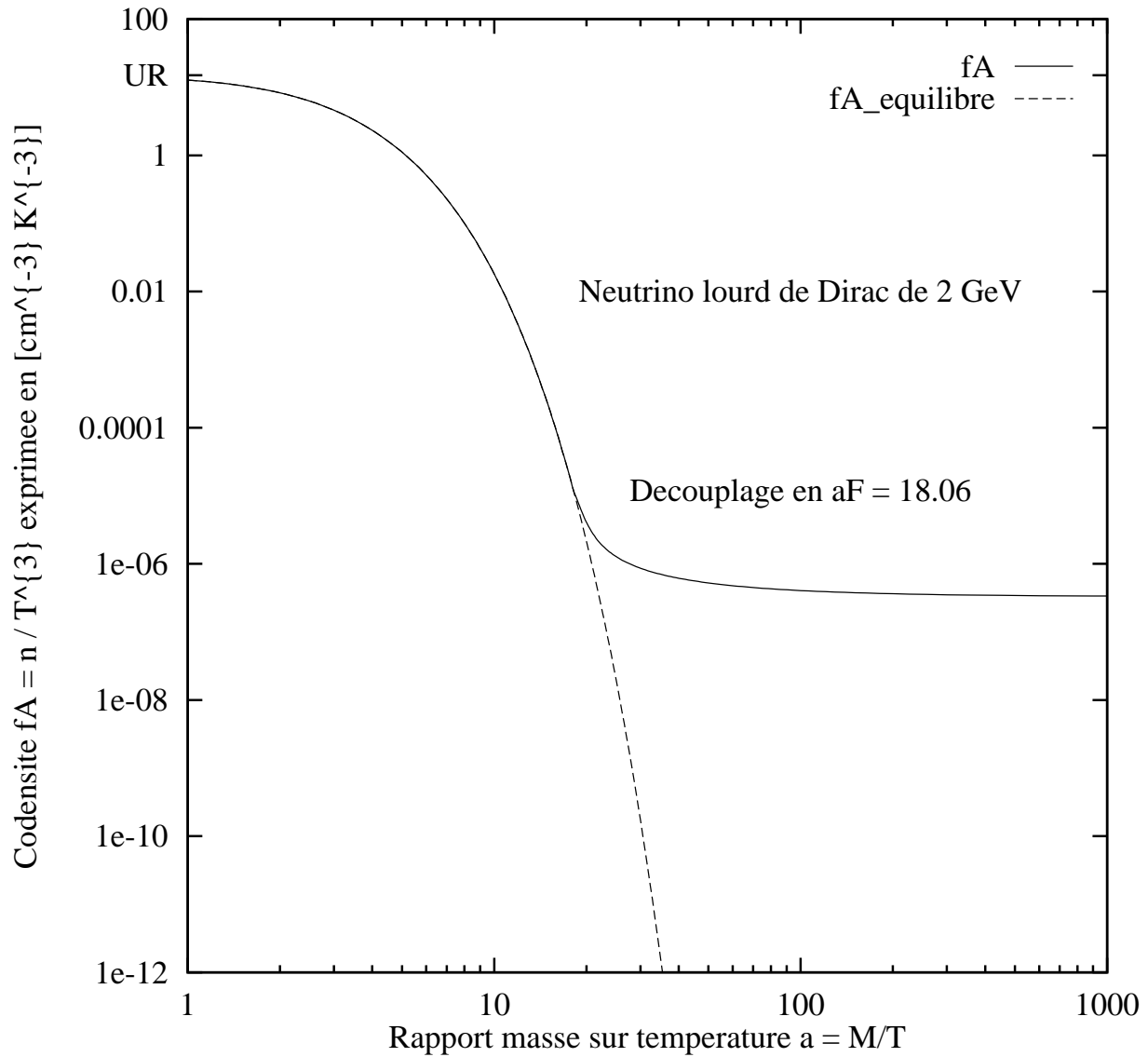


Figure I.4: La codensité f_A – trait plein – d’un neutrino lourd de 2 GeV est tracée en fonction du rapport $a = M/T$. Elle suit l’équilibre thermodynamique f_A^0 – tirets – jusqu’à ce que la température atteigne le seuil critique du découplage qui, dans cet exemple, correspond à $a_F \sim 18$. La codensité n’arrive plus alors à suivre la chute brutale de f_A^0 . Elle diminue doucement pour se stabiliser à sa valeur actuelle.

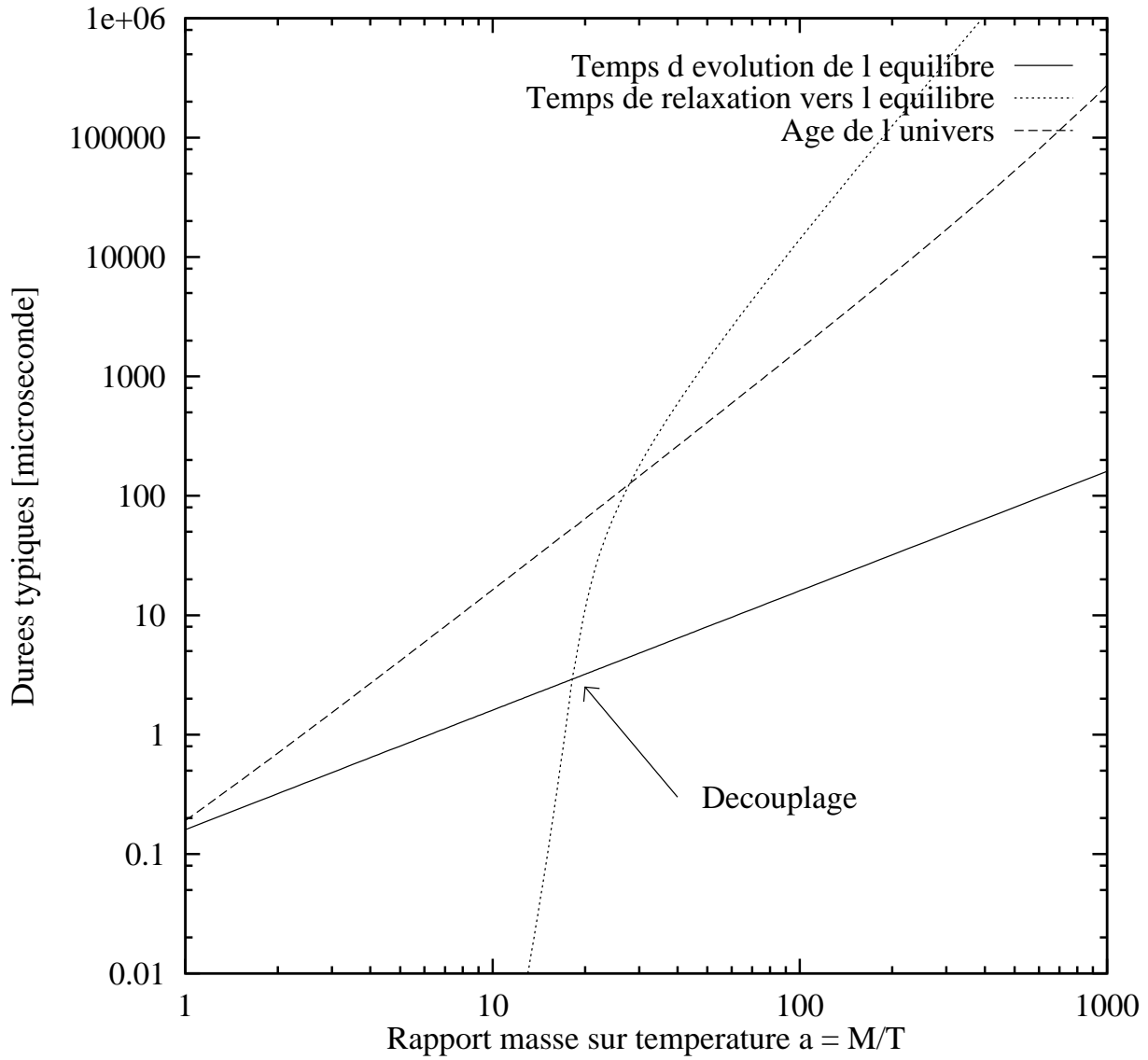


Figure I.5: Le temps typique τ_{rel} avec lequel la réaction (I.65) relaxe vers l'équilibre chimique est tracé en pointillés en fonction du rapport $a = M/T$. Quant à l'équilibre chimique lui-même, il évolue sur l'échelle de temps τ_{eq} représentée par la courbe en trait plein. L'âge t de l'univers correspond à la courbe en tirets.

Cette condition se traduit par l'égalité

$$\sqrt{a_F} e^{a_F} = \frac{3\sqrt{5}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\langle \sigma_{\text{an}v} \rangle M_{\text{P}} M}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} \right\} . \quad (\text{I.72})$$

La section efficace d'annihilation d'un hypothétique neutrino lourd de Dirac s'exprime comme

$$\sigma_{\text{an}v} (A\bar{A} \rightarrow f\bar{f}) = \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle = \frac{G_F^2}{2\pi} M^2 N_A , \quad (\text{I.73})$$

où N_A est le nombre effectif de canaux possibles d'annihilation. La théorie de Weinberg-Salam des interactions faibles confère à N_A la valeur

$$N_A = \sum_{f \text{ produits}} \{C_A^2 + C_V^2\} , \quad (\text{I.74})$$

où $C_A = T_{3L}$ et $C_V = T_{3L} - 2 \sin^2 \theta_W Q$ représentent respectivement le couplage axial et vectoriel du fermion f produit. Le découplage a_F est alors donné par

$$\sqrt{a_F} e^{a_F} = \frac{3\sqrt{5}}{(2\pi)^4} G_F^2 M_{\text{P}} M^3 \frac{N_A}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} \simeq 0.714 \times 10^7 \left(\frac{M}{1 \text{ GeV}} \right)^3 \frac{N_A}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} . \quad (\text{I.75})$$

Pour un neutrino de 2 GeV, $N_A \sim 14$ et le nombre effectif de degrés de liberté est $g_{\text{eff}} = 57/8$ à la température de découplage $T_F \sim 100$ MeV. L'équation précédente implique un point de découplage $a_F \simeq 18.06$.

Remarque : Le découplage d'un neutralino aux interactions faibles se situe en $a_F \sim 20$. Un neutralino de 2 GeV se découple donc à une température de 100 MeV.

A partir du découplage, la codensité f_A décroît légèrement en suivant la relation

$$\frac{df_A}{dt} = - \langle \sigma_{\text{an}v} \rangle n_A f_A , \quad (\text{I.76})$$

qui se simplifie en

$$\frac{df_A}{f_A^2} = \sqrt{\frac{45}{8 \pi^3}} \left\{ \frac{\langle \sigma_{\text{an}v} \rangle}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} \right\} M M_{\text{P}} dx , \quad (\text{I.77})$$

à condition d'utiliser le paramètre $x = 1/a = T/M$. En intégrant l'équation différentielle précédente du point $x_F = 1/a_F$ jusqu'à l'époque présente où $x = 0$, nous observons que la codensité f_A diminue à partir de sa valeur de découplage $f_A(a_F) = f_A^0(a_F) = f_F$ pour très rapidement se stabiliser à sa valeur asymptotique actuelle f_A^{asy} donnée par

$$f_A^{\text{asy}} = \frac{f_F}{1 + 2a_F} . \quad (\text{I.78})$$

5.3) Densité relique.

La codensité actuelle du neutrino lourd peut s'écrire

$$f_A^{asy} \simeq \sqrt{\frac{8 \pi^3}{45}} \frac{\sqrt{g_{\text{eff}}} a_F}{\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle M M_{\text{P}}} . \quad (\text{I.79})$$

Il en va de même pour toute particule massive interagissant faiblement avec son environnement. En toute généralité, nous dérivons alors une valeur

$$f_A^{asy} \simeq 6.17 \times 10^{-8} \left\{ \frac{1 \text{ GeV}}{M} \right\} \left\{ \frac{3 \times 10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle} \right\} , \quad (\text{I.80})$$

qui se traduit en unités conventionnelles par

$$f_A^{asy} \simeq 5.14 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3} \left\{ \frac{1 \text{ GeV}}{M} \right\} \left\{ \frac{3 \times 10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle} \right\} . \quad (\text{I.81})$$

Nous avons pris $g_{\text{eff}} \sim 30$ – le découplage ayant lieu plutôt avant la transition de phase entre quarks et hadrons – et $a_F \sim 15$. La température effective des neutrinos lourds est aujourd'hui $T_\nu \sim 1$ Kelvin. Leur densité de masse s'élève à

$$\rho_A^{\text{fossile}} = 2 M f_A^{asy} T_\nu^3 \sim 10.3 \text{ keV cm}^{-3} \left\{ \frac{3 \times 10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle} \right\} . \quad (\text{I.82})$$

Leur contribution à la densité de fermeture vaut alors

$$\Omega_A h^2 \sim \left\{ \frac{3 \times 10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle} \right\} . \quad (\text{I.83})$$

5.4) Limite de Lee & Weinberg.

Nous pouvons appliquer la relation (I.83) à toute espèce se découplant pendant l'univers primordial. En particulier, considérons un hypothétique neutrino lourd de Dirac de masse M . La section efficace d'annihilation est donnée par la relation (I.73) dont la traduction numérique est

$$\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle = 2.16 \times 10^{-11} \text{ GeV}^{-2} N_A \left\{ \frac{M}{1 \text{ GeV}} \right\}^2 , \quad (\text{I.84})$$

soit encore

$$\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle = 2.53 \times 10^{-28} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} N_A \left\{ \frac{M}{1 \text{ GeV}} \right\}^2 . \quad (\text{I.85})$$

Le coefficient de conversion est

$$\hbar^2 c^3 = 1.171 \times 10^{-17} \text{ GeV}^2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} . \quad (\text{I.86})$$

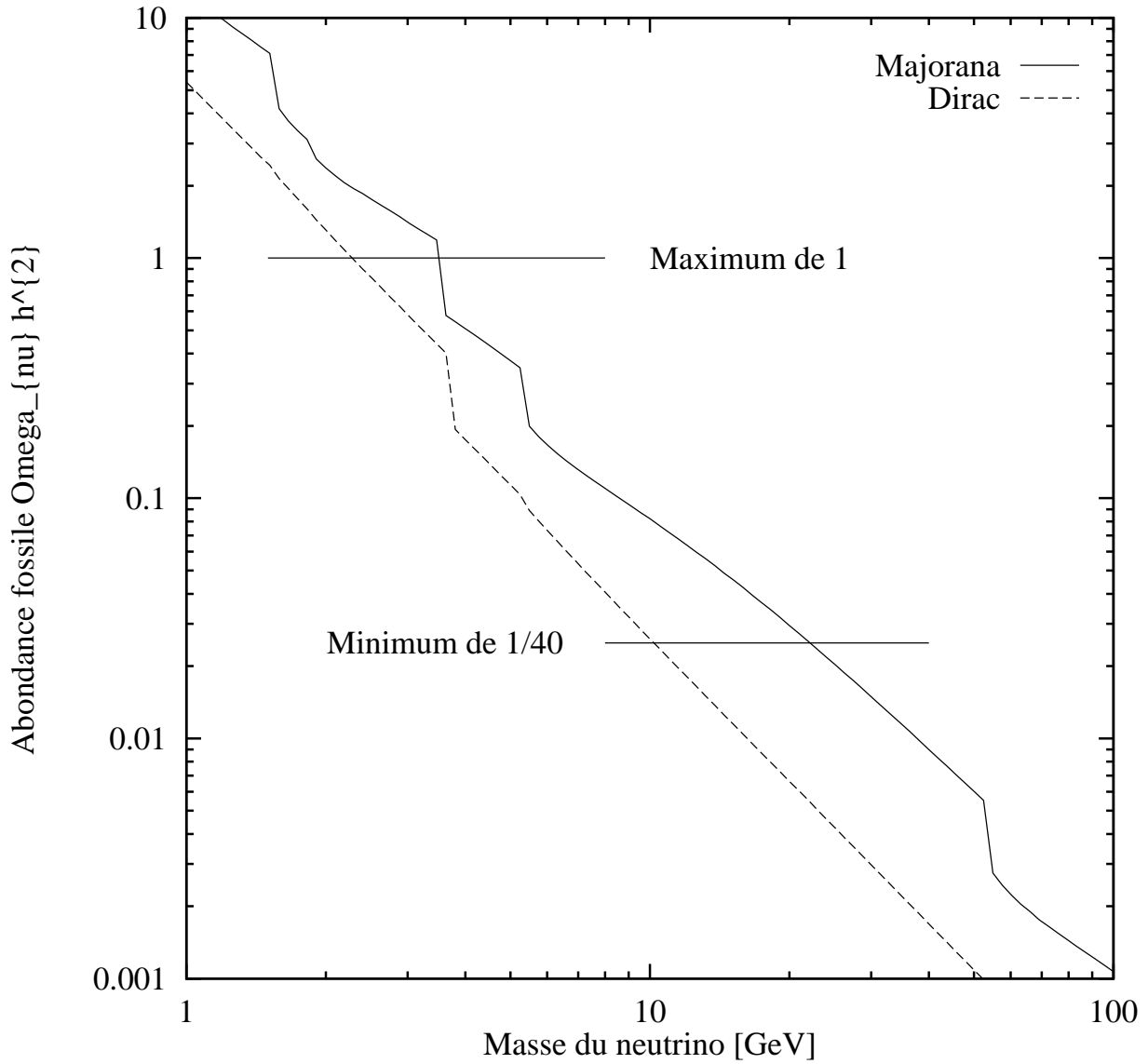


Figure I.6: L'abondance fossile $\Omega_\nu h^2$ de neutrinos lourds stables est tracée en fonction de leur masse M dans le cas de fermions de Majorana – trait plein – et de Dirac – tirets. Le paramètre Ω_ν correspond au rapport de la densité actuelle ρ_ν^0 de ces particules à la densité critique ρ_C^0 . La constante de Hubble – exprimée en unités de 100 km/s/Mpc – est notée h . Les courbes décroissent approximativement en M^{-2} comme le montre explicitement la relation (I.87).

La contribution de notre neutrino lourd à la densité actuelle de l'univers – sous réserve de la stabilité de cette particule – s'écrit

$$\Omega_\nu h^2 \sim \left\{ \frac{11.84}{N_A} \right\} \left\{ \frac{1 \text{ GeV}}{M} \right\}^2 . \quad (\text{I.87})$$

En imposant que cette contribution n'excède pas la valeur observationnelle pour $\Omega_{\text{CDM}} h^2$ de 0.12, nous dérivons une **limite inférieure** sur la masse du neutrino lourd

$$M \gtrsim \left\{ \frac{11.84}{N_A} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{\Omega_{\text{CDM}} h^2} \right\}^{1/2} \sim 2.65 \text{ GeV} , \quad (\text{I.88})$$

où $N_A = 14$. Cette limite a été dérivée en 1977 par B. Lee et S. Weinberg. La figure I.6 illustre la dépendance de l'abondance actuelle de neutrinos lourds stables en fonction de leur masse M . La courbe en trait plein correspond à une particule de Majorana alors que celle en tirets se rapporte à un neutrino de Dirac [†]. Plus la masse M est importante, plus faible est leur contribution à la masse totale de l'univers aujourd'hui.

5.5) Neutralinos et matière noire.

De nombreuses extensions du modèle standard de la physique des particules prédisent assez naturellement la présence d'espèces neutres, massives et interagissant faiblement avec leur environnement. En anglais, de telles particules sont dénommées weakly interacting massive particles ou encore WIMPs. Elles se comportent comme des neutrinos lourds, d'où également le terme de neutralino que j'utilise dans ce cours. En général, les WIMPs – ou neutralinos – sont stables dans la mesure où ils sont protégés par la conservation d'un nombre quantique et se comportent donc exactement comme nous venons de l'étudier. Dès le milieu des années 1980, ces particules ont été pressenties comme des candidats potentiels à la matière noire astronomique. Trente ans plus tard, on les recherche toujours et le premier run du LHC ne les a pas révélées.

[†]Un fermion de Majorana est sa propre antiparticule. Il n'a donc que 2 états de spin. Par contre, un fermion A de Dirac est différent de son antiparticule \bar{A} . Chacune des espèces A ou \bar{A} a 2 états d'hélicité.

Chapitre II

Le problème de la matière noire astronomique

En 1933, l'astronome suisse Zwicky détermina la dispersion de vitesse au sein de l'amas de Coma, situé dans la constellation de la chevelure de Berenice. Distant d'environ 50 Mpc, l'amas de Coma Berenices contient des milliers de grosses galaxies de taille comparable à la Voie Lactée ainsi que de très nombreux objets plus modestes. Zwicky fut étonné de découvrir que la masse dynamique de Coma était une centaine de fois supérieure à la valeur déduite de sa luminosité *. Le problème de la matière noire était né.

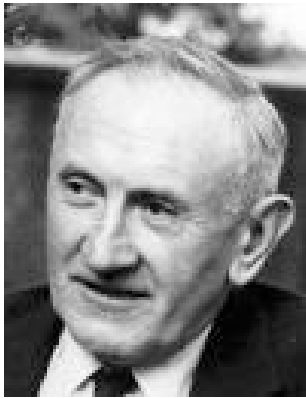


Figure II.1: Fritz Zwicky découvre le problème de la matière noire.

La présence de grandes quantités de matière invisible autour des galaxies et à l'intérieur de leurs amas a depuis lors été confirmée par toute une série d'observations indépendantes. Le mystère s'est épaissi – enfin plutôt notre incompréhension – avec la confirmation par les satellites WMAP et Planck de l'existence d'une composante cosmologique importante de matière non-baryonique atteignant $\Omega_{\text{CDM}} = 0.268$. Nous ne savons toujours pas quelle est la nature de cette matière noire astronomique [1]. Des particules massives et neutres pourraient la constituer à l'instar des **neutralinos** ou autres **WIMPs** qui font l'objet d'actives recherches sous terre, au fond des mers et en orbite autour de la Terre.

*La masse lumineuse est déterminée en effet à partir de la mesure de la luminosité L et de l'emploi d'un rapport masse-sur-luminosité M/L dont la valeur – sujette à débat – est fixée par hypothèse.

1) Matière noire astronomique.

1.1) Courbes de rotation et méthodes cinématiques.

Les galaxies spirales possèdent un disque en rotation dont la vitesse V_C est mesurée grâce à l'effet Doppler observé sur ses nuages d'hydrogène neutre HI dans la raie à 21 cm. Cette technique s'est développée au début des années 1970 avec l'avènement de la radioastronomie. De nombreuses spirales ont une courbe de rotation qui reste plate bien au-delà du rayon optique de leur disque. Ces galaxies sont donc entourées d'un halo de matière invisible qui domine la gravité du système à longue distance r . La masse M de ce halo est reliée à la vitesse de rotation par

$$\frac{V_C^2}{r} = \frac{G M(r)}{r^2} . \quad (\text{II.1})$$

Si toute la masse était confinée dans le disque, la courbe de rotation diminuerait de manière képlérienne en $1/\sqrt{r}$ loin du centre. Or, pour de nombreuses spirales, V_C reste constant et la masse totale augmente linéairement avec la distance r

$$M(r) = \frac{V_C^2}{G} r . \quad (\text{II.2})$$



Figure II.2: Edwin Hubble mesure en 1926 la distance de la galaxie d'Andromède M31 et découvre en 1929 l'expansion de l'univers.

Il semble que la courbe de rotation de la Voie Lactée soit plate. La vitesse circulaire au niveau du système solaire est de

$$V_C(r_\odot) = 220 \pm 15 \text{ km s}^{-1} , \quad (\text{II.3})$$

pour un rayon galactocentrique $r_\odot = 8.5 \text{ kpc}$. Si notre halo galactique était seul responsable de cette vitesse de rotation, sa densité serait de $\rho_\odot \sim 0.012 M_\odot \text{ pc}^{-3}$ dans le

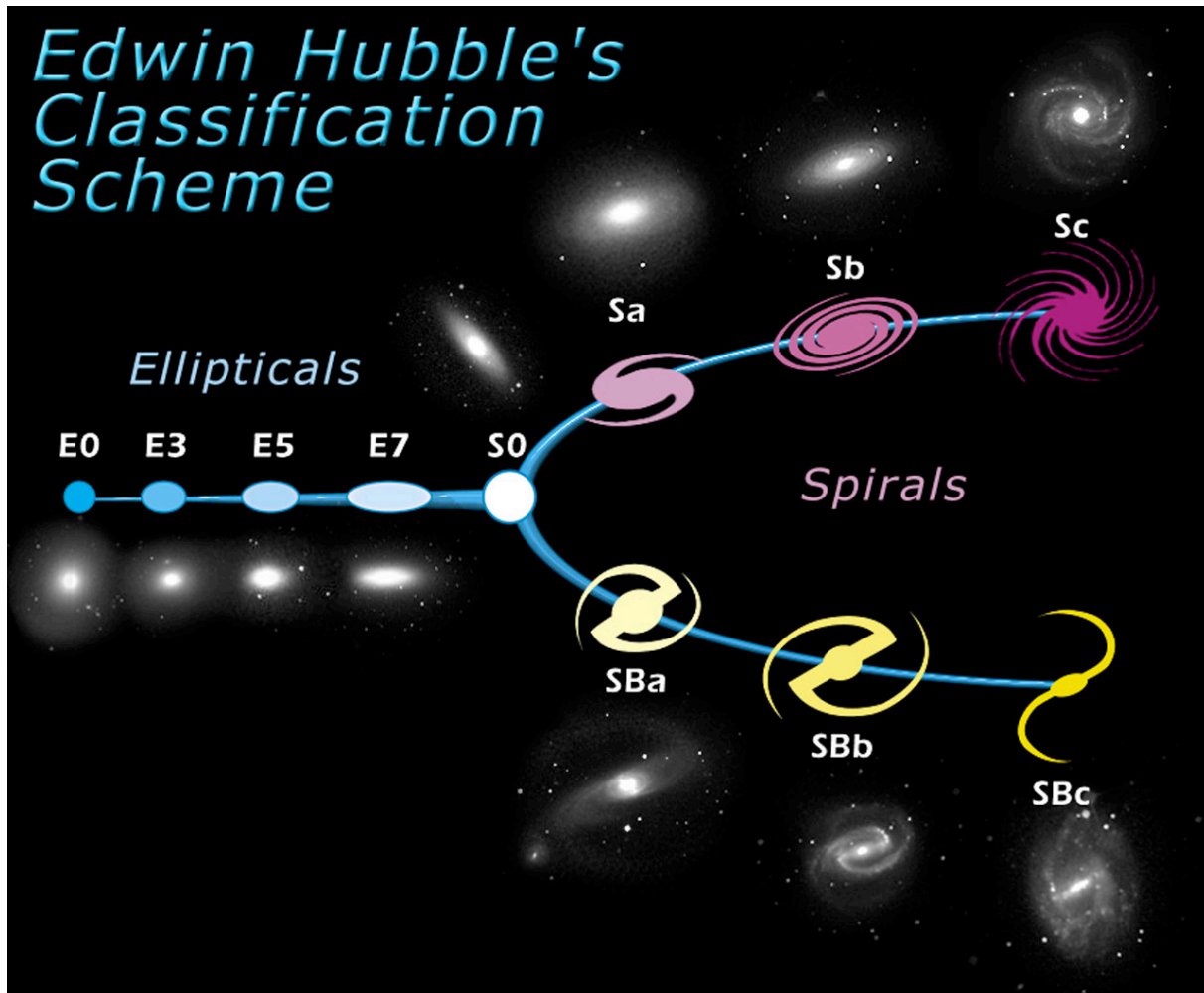


Figure II.3: Edwin Hubble classe les galaxies selon leur morphologie en deux grandes classes : les elliptiques et les spirales. Celles-ci tournent sur elles-mêmes et la raie à 21 cm permet de mesurer la vitesse de rotation en fonction de la distance au centre.

voisinage solaire, soit encore de $\sim 0.47 \text{ GeV cm}^{-3}$ en unités de physique des particules [†]. La contribution du disque à V_C n'est pas négligeable surtout dans la partie centrale de la galaxie. Une valeur plus correcte pour ρ_\odot est $\sim 0.3 \text{ GeV cm}^{-3}$. D'après la relation (II.2), la masse du halo loin du centre – et donc la masse totale de la Voie Lactée – est donnée par

$$M(r) \simeq 1.125 \times 10^{11} M_\odot \left\{ \frac{r}{10 \text{ kpc}} \right\} . \quad (\text{II.4})$$

Nous déduisons une masse de $\sim 10^{12} M_\odot$ à l'intérieur de 100 kpc.

Le modèle de **la sphère isotherme** permet de reproduire les courbes de rotation plates

[†]Une densité de $1 M_\odot \text{ pc}^{-3}$ correspond à 38.3 GeV cm^{-3} . Rappelons que $1 M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ et que 1 parsec (pc) vaut 3.26 années-lumière soit encore $3.086 \times 10^{13} \text{ km}$.

des spirales. Considérons un halo constitué d'objets – étoiles mortes ou neutralinos – dont la distribution de position et de vitesse suit la loi maxwellienne

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = C \exp \left\{ -\frac{E}{\sigma^2} \right\} , \quad (\text{II.5})$$

où $E = v^2/2 + \Phi(\vec{r})$ désigne l'énergie mécanique totale par unité de masse. Les vitesses sont distribuées de manière isotrope et la dispersion de vitesse unidimensionnelle est dénotée σ . Nous sommes en présence d'un gaz où l'équipartition des vitesses – et non des énergies – est réalisée.

Problème n° II-1 – Niveau [1] : Calculer la vitesse quadratique moyenne et montrer que

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\sigma^2 . \quad (\text{II.6})$$

Problème n° II-2 – Niveau [1] : Etablir que si la fonction de distribution dans l'espace des phases f ne dépend que de l'énergie E par unité de masse, elle est solution stationnaire de l'équation de Vlasov dont la forme générale est

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v) f = 0 . \quad (\text{II.7})$$

L'accélération \vec{a} des particules dérive de l'énergie potentielle de gravitation

$$\vec{a} = \vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi . \quad (\text{II.8})$$

En déduire que

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f - (\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}_v) f = 0 . \quad (\text{II.9})$$

Nous supposons également que la distribution f est spatialement isotrope de sorte que le halo est une sphère. Le profil de densité s'obtient en intégrant la fonction f sur la vitesse \vec{v} et s'écrit

$$\rho(\vec{r}) = \rho_c \exp \left\{ -\frac{\Phi(r)}{\sigma^2} \right\} , \quad (\text{II.10})$$

où ρ_c est la valeur centrale. Le rayon galactocentrique r est désormais le seul paramètre pertinent. Le potentiel de gravitation – supposé nul en $r = 0$ – vérifie alors l'équation de

Poisson

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right\} = 4\pi G \rho(r) . \quad (\text{II.11})$$

Problème n° II-3 – Niveau [2] : Nous cherchons ici une solution invariante d'échelle de l'équation précédente (II.11) sous la forme $\rho = A r^\alpha$. Déterminer les paramètres A et α afin d'établir le profil de densité du halo isotherme

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2} . \quad (\text{II.12})$$

Un tel profil $\rho \propto r^{-2}$ implique une augmentation linéaire de la masse du halo avec le rayon

$$M(r) = 2 \frac{\sigma^2}{G} r \equiv \frac{V_C^2}{G} r , \quad (\text{II.13})$$

ainsi qu'une courbe de rotation plate de vitesse $V_C = \sqrt{2} \sigma$.

D'une manière générale, les méthodes cinématiques sont fondées sur l'application du théorème du Viriel. Energie cinétique et énergie potentielle de gravitation sont égales à un facteur numérique près de l'ordre de l'unité. Si le système étudié de taille typique R contient des populations – étoiles, amas globulaires ou galaxies – dont la vitesse de dispersion sur la ligne de visée est σ , sa masse se déduit de la relation

$$\sigma^2 \sim \frac{GM}{R} . \quad (\text{II.14})$$

C'est grâce à cette méthode que Zwicky estima la masse dynamique de l'amas de Coma Berenices. Pour notre part, nous appliquerons ici la méthode du Viriel – et plus précisément le modèle de la sphère isotherme – au cas de la galaxie elliptique géante M87 qui réside au centre de l'amas de la Vierge. Les mesures indiquent une dispersion de vitesse le long de la ligne de visée de 500 km/s. La relation (II.13) implique une masse totale d'un ordre de grandeur supérieure à la valeur typique de la Voie Lactée

$$M(r) \simeq 1.163 \times 10^{12} M_\odot \left\{ \frac{r}{10 \text{ kpc}} \right\} . \quad (\text{II.15})$$

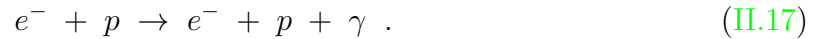
1.2) Milieu intra–amas et gas chaud X.

Si nous supposons que le gaz contenu dans la partie centrale de l'amas de la Vierge – et donc en particulier dans le halo de M87 – est également virialisé, la dispersion de vitesse

unidimensionnelle des protons le constituant est également donnée par σ . Les protons et électrons du gaz interagissent entre eux et l'agitation thermique qui en résulte est alors associée à la température thermodynamique

$$T_{\text{gaz}} = \frac{m_B \sigma^2}{k} \sim 3 \times 10^7 \text{ K} . \quad (\text{II.16})$$

Le gaz contenu au centre de l'amas de la Vierge est donc très chaud puisque sa température atteint $\sim 3 \text{ keV}$. Il est également complètement ionisé et le plasma résultant doit émettre un rayonnement X provenant du processus de bremsstrahlung



L'émission X en provenance de M87 a bien été observée et étudiée par les observatoires X récemment embarqués sur des satellites comme Einstein, Exosat ou Ginga. Le gaz tombe dans la cuvette de potentiel creusée au centre de l'amas de la Vierge par **la masse totale** présente et s'y réchauffe jusqu'à virialisation. En mesurant la distribution du gaz au centre des amas, nous pouvons déterminer le potentiel gravitationnel global qui y règne et remonter ainsi à la masse totale de ces systèmes.

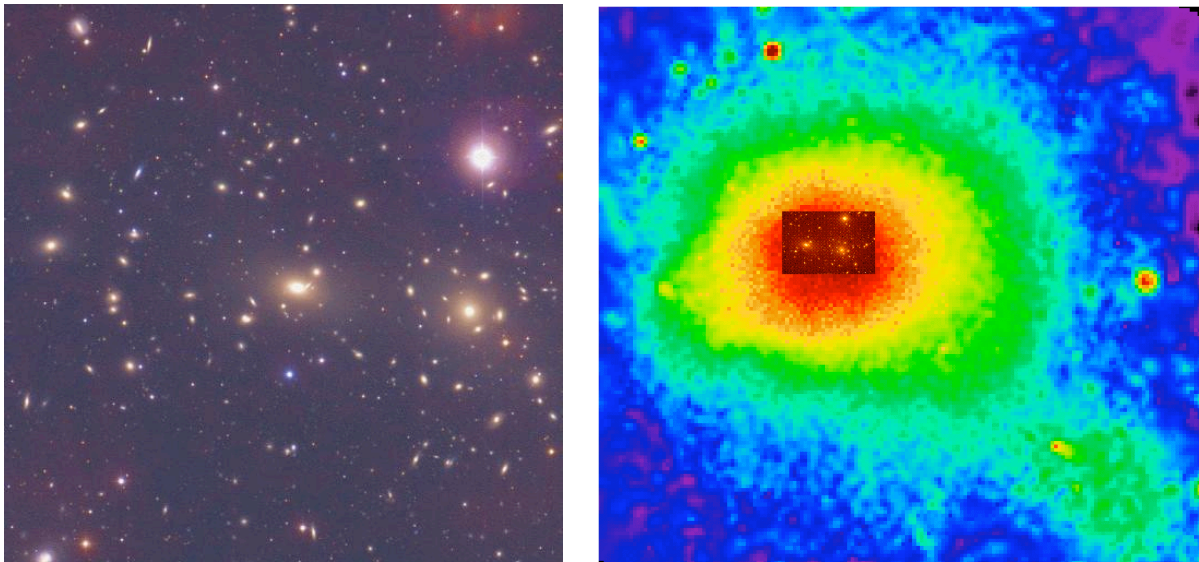


Figure II.4: L'amas de Coma tel qu'il apparaît dans un télescope – image de gauche – et vu en rayonnement X – panneau de droite – baigne dans du gaz chauffé à une température d'une centaine de millions de K.

Le bremsstrahlung étant un processus à deux corps, l'intensité du rayonnement X dépend du carré de la densité électronique n_e^2 ainsi que de la température T du plasma. L'analyse du spectre X émis permet de déterminer à la fois ces deux paramètres. On ne mesure que la brillance X de surface en projection sur le fond du ciel. Afin de la convertir en

profil radial de densité $n_e(r)$ et de température $T(r)$, on peut par exemple supposer que la distribution du gaz est sphérique. L'étape suivante consiste à postuler que le gaz de l'amas a atteint l'équilibre hydrostatique et donc la virialisation. C'est sans doute faux tout près du centre où la densité est suffisamment élevée pour que le plasma s'y refroidisse – par bremsstrahlung – plus qu'ailleurs. N'étant plus soutenu par la pression, le gaz tend à tomber au centre des amas où l'on observe une accrétion de gaz refroidi – cooling flow en anglais. Si l'on suppose que le reste de la distribution est néanmoins en équilibre hydrostatique, la pression P et la masse volumique ρ du gaz sont liées par

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g(r) , \quad (\text{II.18})$$

où g dénote le champ gravitationnel du système entier – matière noire comprise.

Problème n° II-4 – Niveau [2] : La densité du gaz intra-amas est $n = n_e + n_{ion}$ alors que sa pression est donnée par $P = nkT$. Traduire la condition d'équilibre hydrostatique (II.18) en

$$\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} = -\frac{1}{kT} \frac{G \bar{\mu} M(r)}{r} , \quad (\text{II.19})$$

où $\bar{\mu}$ est le poids moléculaire moyen. En supposant une composition chimique homogène, dériver le profil de la masse totale $M(r)$

$$M(r) = -\frac{kT}{G \bar{\mu}} r \left\{ \frac{d \ln n_e}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right\} . \quad (\text{II.20})$$

Problème n° II-5 – Niveau [1] : Le gaz des amas a typiquement une composition primordiale avec une fraction massique de 75% d'hydrogène et de 25% d'hélium. Montrer que son poids moléculaire moyen vaut $\bar{\mu} = (16/27) m_B \simeq 0.6 m_B$ et que la masse moyenne par électron est de $\bar{\mu}_e = (8/7) m_B$.

Il est donc possible de déterminer la masse totale des amas à partir de la distribution radiale en densité et en température de leur gaz chaud. Dans le cas de M87, les observations de la brillance X de surface effectuées par Tsai [6] se traduisent en

$$n_e(r) = n_0 \frac{(r/a_1)^{-\alpha_1}}{1 + (r/a_1)^{\alpha_3}} , \quad (\text{II.21})$$

et

$$T(r) = T_\infty \left\{ \frac{r}{r + a_2} \right\}^{\alpha_2}, \quad (\text{II.22})$$

avec $n_0 = 4.31 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$, $a_1 = 6.63 \text{ kpc}$, $\alpha_1 = 0.49$, $\alpha_3 = 0.869$, $T_\infty = 8.35 \times 10^7 \text{ K}$, $a_2 = 4.58 \times 10^5 \text{ kpc}$ et $\alpha_2 = 0.114$.

Problème n° II-6 – Niveau [2] : A partir de la relation (II.20) ainsi que des profils de densité et de température dérivés par Tsai, montrer que la masse totale de M87 – et donc la masse de la partie centrale de l’amas de la Vierge – est donnée par

$$M(r) \simeq (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) \frac{kT}{G\bar{\mu}} r. \quad (\text{II.23})$$

La température du plasma intra-amas est de $\sim 3.194 \times 10^7 \text{ K}$ à 100 kpc du centre de M87, en bon accord avec notre estimation (II.16). En déduire que la masse totale de M87 augmente linéairement avec le rayon r comme

$$M(r) \simeq 1.298 \times 10^{12} M_\odot \left\{ \frac{r}{10 \text{ kpc}} \right\}. \quad (\text{II.24})$$

Il est remarquable que la détermination dynamique (II.15) concorde à 10% près avec le résultat (II.24) dérivé de la brillance X de surface. Certes nous supposons que la virialisation est atteinte dans les deux cas. Il est cependant troublant de constater que des populations aussi différentes que les étoiles et les amas globulaires d’une part et le gaz chaud ionisé d’autre part voient bien le même puits de potentiel qu’elles sont d’ailleurs incapables de creuser seules.

1.3) A l’échelle cosmologique.

La relation entre distance de luminosité et décalage vers le rouge d’objets dont la luminosité absolue est constante – comme les supernovae de type Ia que l’on note SNeIa – permet de déterminer la différence $\Omega_M - \Omega_\Lambda$. L’observation des anisotropies du fond cosmologique de rayonnement micro-onde conduit à la densité totale de l’univers $\Omega_M + \Omega_\Lambda$ par l’intermédiaire de la mesure de sa géométrie. Lorsqu’une perturbation linéaire de densité pénètre à l’intérieur de l’horizon causal, elle se met à osciller comme le ferait une onde sonore. Elle commence par se condenser fortement d’où la présence d’un pic acoustique marqué dans les inhomogénéités observées du fond micro-onde. La taille physique de ce

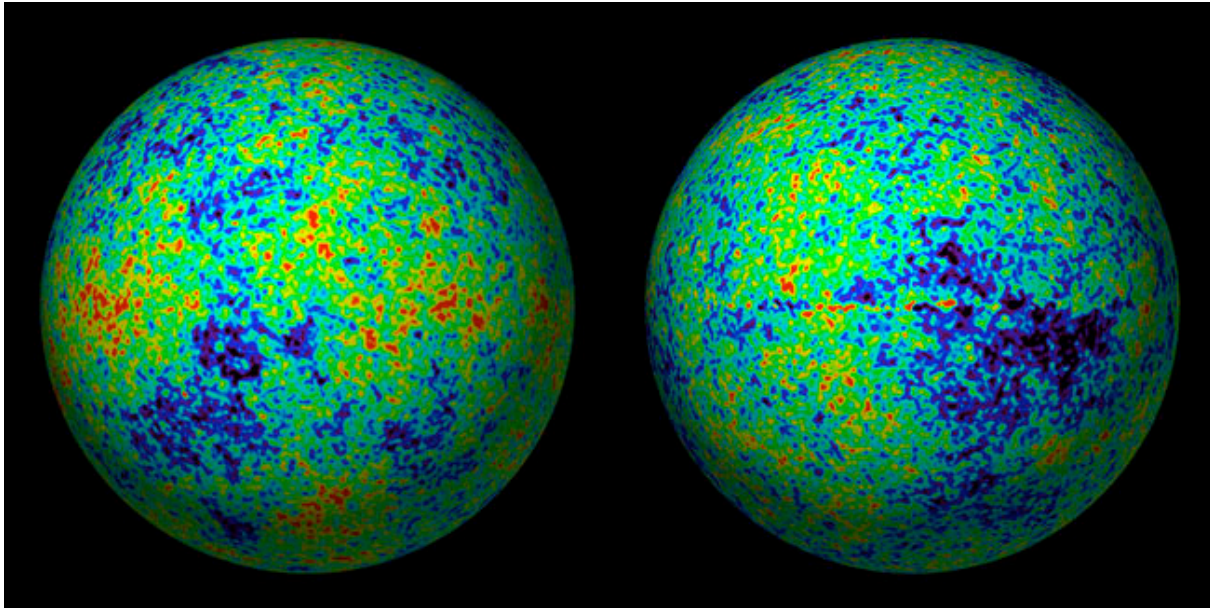


Figure II.5: Le satellite WMAP a permis de cartographier en 2003 le fond de rayonnement cosmologique et ses anisotropies à partir desquelles les amas de galaxies se formeront ensuite.

pic acoustique est connue puisqu'elle correspond à celle de l'horizon sonore au moment du découplage entre matière et rayonnement électromagnétique. L'angle sous-tendu aujourd'hui par ce pic permet de déterminer si l'univers est plat, sphérique ou hyperbolique.

Les mesures des satellites WMAP [8] et Planck [9] peuvent être combinées aux recherches des supernovae SNeIa [7] ou aux catalogues de weak lensing. L'image cohérente qui en résulte est celle d'un univers plat. Une fraction importante $\Omega_\Lambda = 0.693 \pm 0.019$ de la densité de fermeture provient d'une constante cosmologique ou énergie noire dont l'équation d'état – le rapport pression sur densité $w = P/\rho$ – est proche de la valeur négative -1 . Le reste est constitué de matière non-relativiste dont la contribution atteint $\Omega_M = 0.307 \pm 0.019$. Avec une constante de Hubble H_0 égale à 67.9 ± 1.5 km/s/Mpc, cette valeur conduit à $\Omega_M h^2 = 0.1414 \pm 0.0029$. Cette composante ne peut pas être complètement baryonique car la hauteur relative des pics Doppler du CMB ainsi que la nucléosynthèse primordiale [10] conduisent à une abondance baryonique $\Omega_B h^2 = 0.02217 \pm 0.00033$ ne représentant qu'une fraction de $\sim 15.7\%$ de $\Omega_M h^2$. La présence de matière noire est donc bien confirmée aux échelles cosmologiques où il apparaît de surcroît qu'elle est d'origine non-baryonique. Sa contribution à la masse de l'univers est $\Omega_{\text{CDM}} h^2 = 0.1186 \pm 0.0031$.

2) Neutralinos et matière noire non-baryonique.

Les observations indiquent donc la présence de matière noire astronomique de nature essentiellement non-baryonique. Or les développements récents de la physique sub-nucléaire ont conduit à explorer de nouvelles pistes et à prédire l'existence de particules dont la masse est comprise entre ~ 30 GeV et quelques TeV, neutres et stables qui pourraient fort bien constituer la masse invisible de l'univers.

• Le problème de la hiérarchie et la supersymétrie

Dans les années soixante, des mathématiciens russes ont tenté d'unifier les interactions de jauge responsables des interactions sub-nucléaires avec les symétries de l'espace-temps. L'idée était de réaliser la fusion de l'algèbre de Poincaré – cette algèbre contient les rotations de Lorentz et les translations – avec l'algèbre d'un groupe de jauge comme $SU(2) \times U(1)$. Il fut démontré qu'une telle fusion n'était possible que si l'on avait recours à une algèbre de Lie **graduée** contenant donc des opérateurs **anticommutants**. Ces opérateurs de nature fermionique transforment un boson en fermion et vice-versa. De la même manière que les états de spin $+1/2$ et $-1/2$ d'un électron sont deux manifestations de l'entité plus fondamentale qu'est la représentation de spin $1/2$ du groupe des rotations $SU(2)$, un scalaire chargé A et un bi-spinneur ψ_α apparaissent en supersymétrie comme des projections différentes du multiplet scalaire de supersymétrie

$$\Phi(y, \theta, \bar{\theta}) = A(y) + \sqrt{2} \theta^\alpha \psi_\alpha(y) + F(y) \theta^\alpha \theta_\alpha . \quad (\text{II.25})$$

Le champ $F(y)$ est auxiliaire et θ_α est une variable de Grassman anticommutante où l'indice α ne prend que les valeurs 1 et 2. Très rapidement, les extensions supersymétriques du modèle standard furent étudiées. Elles prédisent que chaque particule connue est associée à son double supersymétrique dont elle diffère par une demi-unité de spin. C'est pourquoi aux bosons de jauge B et W_3 sont associés les fermions de Majorana – à deux états d'hélicité et invariant par conjugaison de charge – \tilde{B} et \tilde{W}_3 . N'observant aucune particule supersymétrique jusqu'à ce jour, force est d'admettre que la supersymétrie est brisée à une échelle typique Λ fixant la masse des partenaires supersymétriques. L'intérêt pour la supersymétrie redoubla quand on s'aperçut qu'elle permettait de résoudre le problème de la hiérarchie. Si l'on essaie en effet d'unifier les interactions électro-faibles dont le groupe de jauge est $SU(2) \times U(1)$ avec les interactions fortes décrites par $SU(3)$, l'échelle naturelle d'unification est très élevée et vaut $\sim 10^{15}$ – 10^{16} GeV. Dans le cadre de ces théories grand-unifiées, la masse du boson de Higgs – cette particule est responsable de la brisure de la symétrie électro-faible qui intervient à l'échelle beaucoup plus faible de ~ 100 GeV – se retrouvait renormalisée par les corrections quantiques et prenait une valeur de l'ordre de l'échelle grand-unifiée. On risquait donc de se retrouver avec un boson Z^0 ou W de masse voisine de $\sim 10^{15}$ – 10^{16} GeV. Or, si la supersymétrie est réalisée au dessus d'une échelle

Λ , la co-existence de boucles fermioniques et scalaires dans les diagrammes responsables de la renormalisation de la masse m_H du Higgs et surtout l'annulation réciproque de ces boucles conduisent à $m_H \sim \Lambda$. En prenant une échelle de brisure Λ de la supersymétrie de l'ordre de 100 GeV à 1 TeV, on permet au Higgs de rester léger. Dans le modèle supersymétrique standard, la masse des particules supersymétriques est de l'ordre de grandeur de l'échelle de brisure Λ . Deux bosons de Higgs sont nécessaires et la particule supersymétrique la plus légère – qui se trouve également être stable – est une combinaison linéaire de quatre états fermioniques bi-spineurs de Majorana

$$\chi = \alpha \tilde{B} + \beta \tilde{W}_3 + \gamma \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 . \quad (\text{II.26})$$

les états \tilde{B} et \tilde{W}_3 sont des jauginos alors que \tilde{H}_1 et \tilde{H}_2 sont les higgsinos associés aux bosons de Higgs.

• **Le problème de la hiérarchie et les dimensions supplémentaires**

Le problème de la hiérarchie se manifeste également par la grande différence entre l'échelle électro-faible – environ 100 GeV – et la masse de Planck M_P qui vaut $\sim 10^{19}$ GeV. La constante de gravitation apparaît dans l'action de la relativité générale

$$\mathcal{S} = \int \frac{R}{16 \pi G} \sqrt{g} d^4x = \frac{M_P^2}{16 \pi} \int \sqrt{g} d^4x . \quad (\text{II.27})$$

Imaginons que l'espace possède une quatrième dimension spatiale recourbée sur elle-même. Après avoir parcouru la distance L dans cette direction supplémentaire, on revient au point de départ. L'action à 5 dimensions d'espace-temps qu'il convient d'associer à la gravitation s'écrit alors

$$\mathcal{S} = \frac{\mu^3}{16 \pi} \int \sqrt{\bar{g}} d^5y . \quad (\text{II.28})$$

Si la dimension supplémentaire est un tore de longueur L , il vient

$$\mathcal{S} = \frac{\mu^3 L}{16 \pi} \int \sqrt{g} d^4x \equiv \frac{M_P^2}{16 \pi} \int \sqrt{g} d^4x , \quad (\text{II.29})$$

et la masse de Planck est alors reliée à la véritable échelle μ de la gravité à 5 dimensions par

$$M_P^2 = \mu^3 L . \quad (\text{II.30})$$

Problème n^o II-7 – Niveau [1] : Calculer la valeur que doit avoir la nouvelle échelle μ pour que l'inverse L^{-1} de la longueur compactifiée soit égale à 1 TeV. On exprimera μ en GeV et on évaluera L en centimètres.

Il est possible de prendre plus d'une dimension supplémentaire et d'obtenir différentes valeurs de μ pour une même longueur L . Les particules élémentaires se propagent à l'instar des photons dans un guide d'onde. Les modes 0 correspondent aux états déjà observés alors que les excitations d'ordre $n \geq 1$ le long des dimensions supplémentaires acquièrent une masse proportionnelle à $L^{-1} \sim \Lambda$. La particule de Kaluza–Klein la plus légère est donc dotée de l'excitation $n = 1$. Elle peut être neutre et massive et ses propriétés sont alors identiques à celles de la particule supersymétrique la plus légère.

• **Le neutralino**

La supersymétrie et les théories de Kaluza–Klein prédisent toutes deux l'existence d'une particule neutre de masse $M \sim \Lambda$. Celle-ci s'annihile en échangeant des états de masse $\sim \Lambda$ et la section efficace correspondante s'écrit

$$\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle \sim \mathcal{O}(\alpha_{\text{em}}^2) \frac{M^2}{\Lambda^4} . \quad (\text{II.31})$$

Problème n° II-8 – Niveau [1] : En prenant $M \sim \Lambda \sim 100 \text{ GeV}$ et $\alpha_{\text{em}} = 1/137$, donner une estimation de la section efficace d'annihilation et montrer que

$$\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle \sim 2 \text{ pb} \left\{ \frac{100 \text{ GeV}}{\Lambda} \right\}^2 . \quad (\text{II.32})$$

Avec des sections efficaces d'annihilation de l'ordre du picobarn

$$\langle \sigma_{\text{an}} v \rangle \sim 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} , \quad (\text{II.33})$$

nous obtenons **naturellement** une densité relique $\Omega_\chi h^2 \sim 0.1$ susceptible d'expliquer le problème de la matière noire astronomique.

3) La distribution des neutralinos.

3.1) Simulations numériques.

Si les neutralinos constituent la matière noire de la Voie Lactée, ils sont distribués de manière à reproduire sa courbe de rotation plate avec un profil de densité donné par la relation (II.12) où $\sigma \sim 160 \text{ km s}^{-1}$. Ce profil s'aplatit au centre de la galaxie pour y constituer un coeur de densité constante et de rayon $\sim 4 \text{ kpc}$. Cette image canonique d'un halo isotherme a été modifiée par les résultats des simulations numériques à N-corps qui tentent de reproduire la formation des grandes structures dans le régime d'effondrement non-linéaire. Ces simulations indiquent la présence d'une divergence centrale – nommée **cusp** en anglais – avec une densité proportionnelle à $r^{-\gamma}$. Les auteurs s'accordent sur l'existence de ce cusp central bien que les résultats diffèrent d'un groupe à l'autre. Les divers modèles décrivant la distribution galactique des neutralinos peuvent se résumer par

$$\rho_{\text{CDM}}(r) = \rho_{\text{CDM}\odot} \left\{ \frac{r_{\odot}}{r} \right\}^{\gamma} \left\{ \frac{1 + (r_{\odot}/a)^{\alpha}}{1 + (r/a)^{\alpha}} \right\}^{(\beta-\gamma)/\alpha}, \quad (\text{II.34})$$

où la distance du système solaire au centre de la Voie Lactée est $r_{\odot} = 7 - 8.5 \text{ kpc}$ et où la densité solaire de matière noire est prise égale à $\rho_{\text{CDM}\odot} = 0.2 - 0.8 \text{ GeV cm}^{-3}$. Les indices α , β et γ sont donnés dans la table II.1. Plus l'indice γ est élevé, plus la

Table II.1: Différents modèles de distribution de matière noire dans la Voie Lactée correspondant à la relation (II.34).

Modèle de halo	α	β	γ	a [kpc]
Profil canonique isotherme avec coeur [11]	2	2	0	4
Kravtsov, Klypin & Khokhlov [12]	2	3	0.2-0.4	10
Navarro, Frenk & White [13]	1	3	1	25
Moore [14]	1.5	3	1.5	30

distribution des neutralinos est divergente au centre de la galaxie, entraînant ainsi une très forte annihilation des particules et engendrant alors une émission de rayonnement gamma potentiellement détectable. De récentes simulations numériques indiquent que le profil central des neutralinos serait mieux décrit par la loi de Einasto selon laquelle

$$\rho_{\text{CDM}}(r) = \rho_s \exp \left\{ -\frac{2}{\alpha} \left[\left(\frac{r}{r_s} \right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}. \quad (\text{II.35})$$

Les valeurs de l'indice spectral α et de la densité ρ_s à la distance d'échelle r_s sont reportées dans la table II.2

Table II.2: Profils de Einasto correspondant à la relation (II.35).

Modèle de halo	α	r_s [kpc]	ρ_s [GeV/cm ³]
Profil de Einasto [15]	0.17	28.44	0.033
Modèle B de Einasto [16]	0.11	35.24	0.021

Une autre découverte des simulations numériques [17] concerne la présence de nombreux grumeaux – nommés **clumps** en anglais – au sein des halos galactiques et à l’intérieur desquels la densité des neutralinos peut être élevée. Les signatures provenant de leur annihilation en sont alors également renforcées. Ces clumps pourraient donc apparaître comme des points chauds dans le ciel gamma ou dans celui du rayonnement neutrinique.

Notre enthousiasme concernant la structure très granulaire de la distribution des neutralinos – et leur signal d’annihilation renforcé – devrait toutefois être tempéré par l’observation de profils plats – et non de cusps pointus – au coeur de certaines galaxies à faible brillance de surface [18]. L’autre problème vient des clumps qui ne sont pas observés. Alors que les simulations numériques prévoient l’existence d’environ 500 sous-structures au sein du halo de la Voie Lactée, nous n’observons guère plus d’une douzaine de galaxies naines sphéroïdes de masse supérieure à $10^8 M_\odot$.

3.2) Le trou noir au centre de la Voie Lactée.

Le mouvement des étoiles autour de la source radio Sgr A* située au centre de la Voie Lactée – donc dans la constellation du Sagittaire – indique la présence d’un objet très massif situé à moins de $\sim 10^{-3}$ pc de cette source. L’étoile SO–2 par exemple tourne en moins de 16 ans sur une trajectoire très excentrique évoluant entre 130 et 1900 UA [‡] de ce que l’on pense être un trou noir supermassif. L’observation du spectre de SO–2 et la détermination de sa vitesse exacte par effet Doppler fournit une détermination précise de la masse du trou noir central

$$M_{\text{BH}} = (4.1 \pm 0.6) \times 10^6 M_\odot \left\{ \frac{r_\odot}{8 \text{ kpc}} \right\}^3, \quad (\text{II.36})$$

où r_\odot est la distance galactocentrique du système solaire.

En 1999, Gondolo et Silk [19] ont suggéré que le trou noir central aurait pu se former lentement – de manière adiabatique – au centre d’une distribution de neutralinos qui se

[‡]Une unité astronomique – abréviation UA – correspond à la distance entre le Soleil et la Terre et vaut environ 150 millions de km.

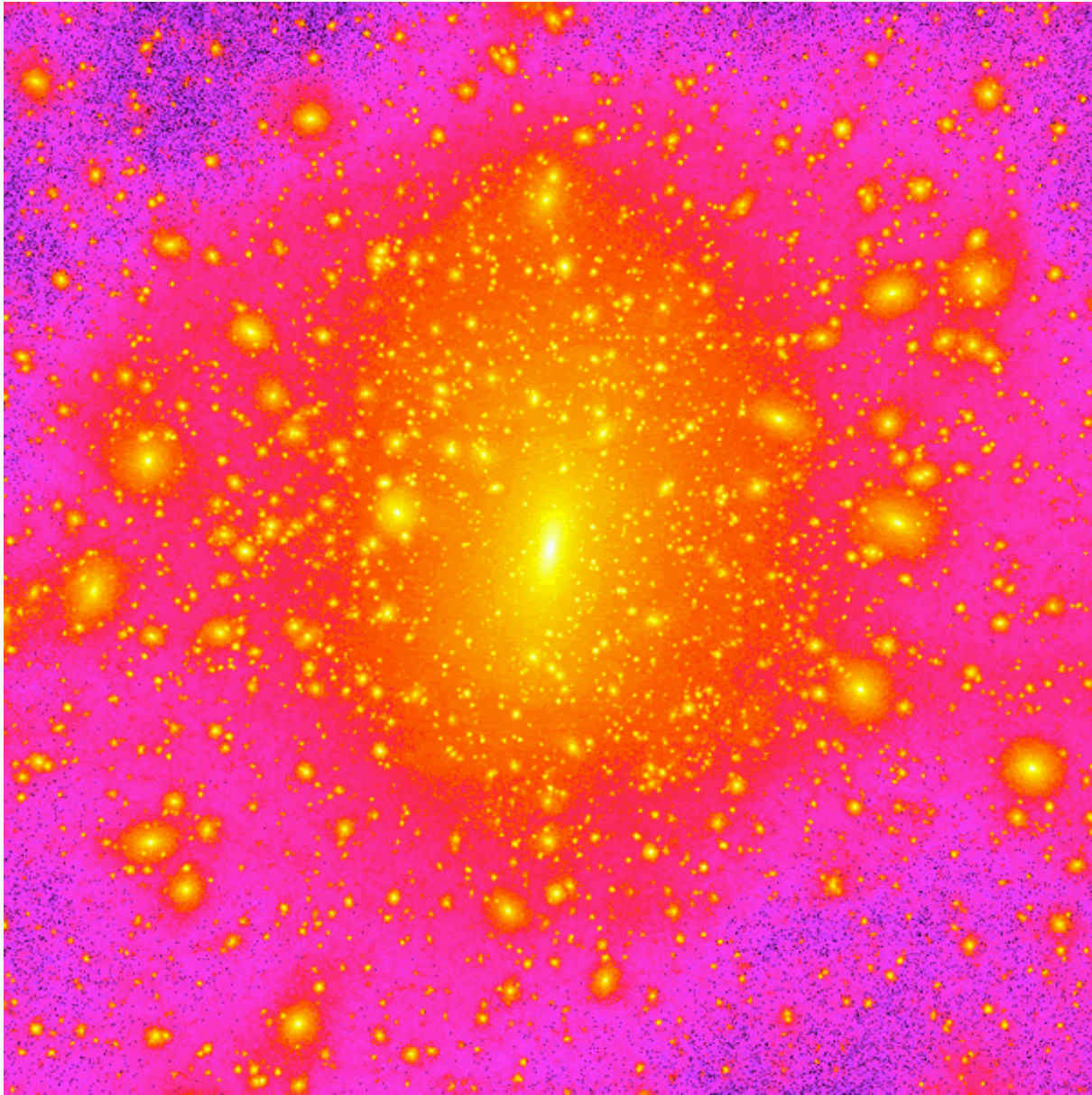


Figure II.6: Les simulations numériques de Ben Moore et de ses collaborateurs avec la Z-box de Zurich indiquent que la matière noire se condense sous forme d'un très grand nombre de grumeaux – ou clumps en anglais – que l'on voit clairement sur cette représentation en fausse couleur d'un halo typique d'une galaxie comme la Voie lactée.

serait condensée auparavant, lors de la formation du bulbe central de la Voie Lactée il y a 12 milliards d'années. Si les neutralinos présentaient déjà une divergence centrale – donc un cusp – ils auraient pu être concentrés plus avant par la formation du trou noir. Nous allons calculer la modification du profil de leur densité en supposant que leurs trajectoires sont toutes circulaires afin de simplifier la discussion. Nous supposons qu'initialement,

leur distribution est donnée par

$$\rho_i^h \propto r_i^{-\gamma} , \quad (\text{II.37})$$

et qu'ils sont seuls. L'indice γ est donné dans la table II.1. Dans l'état final, leur profil s'est condensé en

$$\rho_f^h \propto r_f^{-A} , \quad (\text{II.38})$$

où l'exposant $A > \gamma$. La dynamique centrale est alors dominée par la présence du trou noir de masse M_{BH} . Nous voulons déterminer la relation existant entre les exposants γ et A .

Problème n° II-9 – Niveau [1] : *Le moment cinétique orbital d'une particule de masse unité est défini par*

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v} . \quad (\text{II.39})$$

Montre que si la force est à tout instant centrale, \vec{L} reste constant quelle que soit la rapidité avec laquelle le trou noir se forme.

Considérons un neutralino dont la trajectoire initiale est un cercle de rayon r_i . Si la formation du trou noir était soudaine, le neutralino migrerait sur une trajectoire excentrique l'amenant à proximité du trou noir – sans que \vec{L} soit modifié. Si par contre le trou noir se condense très lentement – sur une échelle de temps bien supérieure à la période de révolution – la trajectoire reste circulaire et son rayon diminue peu à peu jusqu'à la valeur finale r_f .

Problème n° II-10 – Niveau [2] : *En imposant que $L_i = L_f$, montrer que dans ce cas*

$$r_i M_i \{r_i\} = r_f M_f \{r_f\} . \quad (\text{II.40})$$

En déduire que

$$r_i M_i^h = r_f M_{\text{BH}} . \quad (\text{II.41})$$

La masse M_i^h correspond aux neutralinos qui sont initialement à une distance inférieure à r_i et dont la distribution est donnée par la relation (II.37). Dans l'état final, la masse comprise en-deçà du rayon r_f est dominée par le trou noir. Etablir alors que

$$r_f \propto r_i^{4-\gamma} . \quad (\text{II.42})$$

La sphère de rayon initial r_i s'est contractée au rayon final r_f sous l'effet de la formation du trou noir. Elle contient toujours les mêmes neutralinos.

Problème n° II-11 – Niveau [1] : En imposant maintenant que la masse des neutralinos s'est conservée pendant la formation du trou noir

$$M_i^h \{r_i\} = M_f^h \{r_f\} \quad , \quad (\text{II.43})$$

montrer que

$$r_i^{3-\gamma} \propto r_f^{3-A} \quad . \quad (\text{II.44})$$

En déduire alors que

$$A = \frac{9 - 2\gamma}{4 - \gamma} \quad . \quad (\text{II.45})$$

Si les neutralinos ont initialement un profil à la Navarro, Frenk et White avec $\rho_i^h \propto r_i^{-1}$, la formation du trou noir les condense davantage avec un profil final très divergent en $\rho_f^h \propto r_f^{-7/3}$. Dans le cas d'un profil initialement plat avec $\gamma = 0$, la focalisation centrale des neutralinos est plus faible et l'on montre – de manière compliquée – que $A = (9 - \alpha)/4$ pour $1 \leq \alpha < 2$ § et $A = 3/2$ dans le cas où $\alpha = 2$. Une divergence avec $\gamma > 0$ et $A > 2.25$ devrait produire une annihilation visible en rayonnements gamma et neutrinique au centre de la galaxie.

La focalisation de la distribution des neutralinos par la formation du trou noir central repose sur deux hypothèses qui sont peut être erronées. Si l'effondrement de cet objet a eu lieu de manière soudaine – et non adiabatique – la densité finale de la matière noire varie en $\rho_f^h \propto r^{-4/3}$ et son profil est plus doux. L'annihilation des neutralinos est alors beaucoup plus faible que dans le cas envisagé par Gondolo et Silk. Le trou noir peut également s'être formé à l'extérieur du nuage initial des neutralinos et avoir ensuite gagné son centre en perdant de l'énergie par friction dynamique. En spiralant, il a tendance à homogénéiser les particules et même à gommer le profil initial divergent.

§Se reporter à l'équation II.34 pour la définition de α et de γ .

4) La détection directe et son défi.

La possibilité qu'une particule élémentaire soit une composante essentielle de l'univers et rende compte d'un problème astronomique majeur a suscité une vive excitation. Depuis une trentaine d'années, de nombreux groupes expérimentaux tentent d'observer les neutralinos venus de l'espace. Il s'agit plus précisément des particules qui constituent le gigantesque halo de matière qui entoure notre galaxie et en domine la dynamique interne jusqu'à imposer à son disque – la Voie Lactée – une vitesse de rotation constante. L'idée est donc de déceler directement leur impact au sein d'un détecteur terrestre.

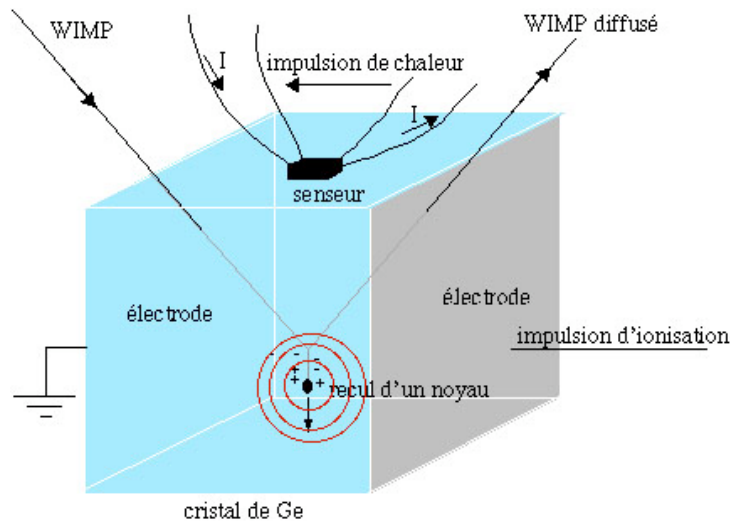


Figure II.7: Schéma de principe d'une expérience de détection directe de neutralinos par impact sur une cible nucléaire et dépôt d'énergie.

4.1) Distribution en énergie du signal.

Considérons donc un neutralino de masse m_χ et supposons qu'il entre en collision avec un noyau au repos de masse m_N . La particule incidente a la vitesse non-relativiste \vec{V}_χ et est diffusée élastiquement sous l'angle θ^* dans le référentiel du centre de masse. Dans le laboratoire, le noyau reçoit une énergie de recul E_{rec} reliée à l'impulsion transférée \vec{q} par

$$Q = \frac{\vec{q} \cdot \vec{q}}{2 m_N} = \frac{q^2}{2 m_N} . \quad (\text{II.46})$$

Problème n⁰ II-12 – Niveau [1] : Montrer que l'énergie de recul du noyau est donnée par

$$E_{\text{rec}} = \frac{\mu^2 V_\chi^2}{m_N} \{1 - \cos \theta^*\} , \quad (\text{II.47})$$

où μ est la masse réduite du système neutralino–noyau

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_\chi} + \frac{1}{m_N} . \quad (\text{II.48})$$

En prenant $m_\chi = m_N = 100$ GeV et une vitesse incidente $V_\chi \sim 10^{-3} c$, nous obtenons une énergie transférée au noyau comprise entre 0 et 50 keV.

Afin d'évaluer la distribution des événements en fonction de l'énergie de recul E_{rec} , nous allons nous intéresser maintenant à la section efficace de diffusion d'un neutralino sur un noyau. Nous supposons tout d'abord que le neutralino incident χ est un fermion de Dirac ainsi que le noyau cible f . Le Lagrangien effectif dont nous partons a la forme

$$\mathcal{L}_{\text{effectif}} = g_S \{\bar{\chi}\chi\} \{\bar{f}f\} + g_A \{\bar{\chi}\gamma^\mu \gamma_5 \chi\} \{\bar{f}\gamma_\mu \gamma_5 f\} , \quad (\text{II.49})$$

et prend en compte une interaction scalaire de couplage g_S ainsi qu'une interaction axiale de couplage g_A . Les couplages sont reliés à l'échelle Λ discutée précédemment par

$$g_S \sim g_A \sim \frac{e^2}{\Lambda^2} = \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}}{\Lambda^2} . \quad (\text{II.50})$$

D'un point de vue cinématique, nous nous intéressons à la réaction

$$\chi(P_1) + \text{noyau } f(k_1) \longrightarrow \chi(P_2) + \text{noyau } f(k_2) . \quad (\text{II.51})$$

Problème n° II-13 – Niveau [2] : En ne considérant que le couplage scalaire, montrer que l'élément de matrice d'interaction se met sous la forme

$$\mathcal{M}_{\text{scalaire}} = g_S \cdot \bar{u}(P_2)u(P_1) \cdot \bar{u}(k_2)u(k_1) . \quad (\text{II.52})$$

Montrer alors que dans la limite non-relativiste où les vitesses des particules sont négligeables, la moyenne sur les spins du carré de l'amplitude précédente s'écrit

$$\mathcal{T} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\text{scalaire}}|^2 = 16 g_S^2 m_\chi^2 m_N^2 . \quad (\text{II.53})$$

On dérivera ensuite pour le cas axial et dans les mêmes conditions les relations correspondantes

$$\mathcal{M}_{\text{axial}} = g_A \cdot \bar{u}(P_2)\gamma^\mu\gamma_5 u(P_1) \cdot \bar{u}(k_2)\gamma_\mu\gamma_5 u(k_1) , \quad (\text{II.54})$$

et

$$\mathcal{T} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\text{axial}}|^2 = 64 g_A^2 m_\chi^2 m_N^2 \left\{ J(J+1) = \frac{3}{4} \right\} , \quad (\text{II.55})$$

où J désigne le spin du noyau cible – ici $J = 1/2$.

La section efficace est alors donnée par l'intégrale de l'élément \mathcal{T} sur l'espace des phases de l'état final en sorte que

$$d\sigma \cdot \left| \vec{V}_\chi - \vec{V}_N \right| = \frac{1}{2P_1^0} \frac{1}{2k_1^0} \int d\tilde{P}_2 d\tilde{k}_2 (2\pi)^4 \delta(P_1 + k_1 - P_2 - k_2) \mathcal{T} , \quad (\text{II.56})$$

où la mesure invariante de Lorentz $d\tilde{P}$ est définie par

$$d\tilde{P} \equiv \frac{d^3\vec{P}}{(2\pi)^3 2P^0} . \quad (\text{II.57})$$

Problème n° II-14 – Niveau [3] : Calculer l'intégrale (II.56) et établir que dans le cas de la diffusion d'un neutralino sur un noyau

$$d\sigma \cdot \left| \vec{V}_\chi - \vec{V}_N \right| = \frac{1}{32\pi} \frac{m_N}{V_\chi} \frac{\mathcal{T}}{m_\chi^2 m_N^2} dE_{\text{rec}} . \quad (\text{II.58})$$

Associé aux expressions (II.53) et (II.55), le résultat précédent (II.58) conduit à la section efficace scalaire

$$d\sigma \cdot \left| \vec{V}_\chi - \vec{V}_N \right| = \frac{g_S^2}{2\pi} \frac{m_N}{V_\chi} dE_{\text{rec}} , \quad (\text{II.59})$$

ainsi qu'à la section efficace axiale

$$d\sigma \cdot \left| \vec{V}_\chi - \vec{V}_N \right| = \frac{2g_A^2}{\pi} \frac{m_N}{V_\chi} \left\{ J(J+1) = \frac{3}{4} \right\} dE_{\text{rec}} . \quad (\text{II.60})$$

Si les deux couplages coexistent, la section efficace totale est la somme directe des expressions (II.59) et (II.60). Dans les deux cas, le neutralino est diffusé de manière isotrope dans le référentiel du centre de masse.

Afin d'évaluer les ordres de grandeur en jeu dans la collision d'un neutralino avec le noyau d'un détecteur terrestre, nous nous concentrons désormais sur le cas scalaire uniquement. La longueur d'onde de De Broglie associée à l'impulsion transférée \vec{q} est grande devant les dimensions du noyau. Tous les nucléons de ce dernier réagissent de manière cohérente d'où un facteur multiplicatif que nous prendrons égal au carré A^2 du numéro atomique associé. De surcroît, le neutralino est une particule de Majorana et toutes les amplitudes calculées jusqu'ici sont deux fois plus importantes que dans le cas d'un fermion de Dirac. Un facteur multiplicatif supplémentaire de 4 est donc à prendre en compte dans les expressions (II.59) et (II.60). En particulier, la section efficace scalaire de diffusion d'un neutralino sur un noyau de numéro atomique A est donnée par

$$d\sigma \cdot \left| \vec{V}_\chi - \vec{V}_N \right| = \frac{2}{\pi} g_S^2 A^2 \frac{m_N}{V_\chi} dE_{\text{rec}} . \quad (\text{II.61})$$

On comprend l'intérêt des collaborations pour le Germanium dont le numéro atomique élevé $A \sim 73$ implique une section efficace scalaire environ cinq mille fois plus grande que dans le cas de l'hydrogène.

Afin de dériver quelques ordres de grandeur, nous allons toutefois nous restreindre ici à la diffusion d'un neutralino sur un nucléon au repos. Pour être à même de pouvoir comparer les différentes expériences entre elles, il a été décidé en effet de ramener par convention tous les résultats au cas où la cible serait exclusivement constituée d'hydrogène ou de neutrons isolés. Si l'on prend $m_\chi = 100$ GeV et $m_N = 1$ GeV, nous obtenons une masse réduite μ égale à 1 GeV. En intégrant la section efficace différentielle (II.61), il vient

$$\sigma_S = \frac{4}{\pi} g_S^2 \mu^2 . \quad (\text{II.62})$$

Problème n° II-15 – Niveau [1] : En prenant l'échelle typique Λ égale à 100 GeV, montrer que l'expression (II.50) conduit à

$$g_S \simeq 9.2 \times 10^{-6} \text{ GeV}^{-2} \sim 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} . \quad (\text{II.63})$$

En déduire que la section efficace scalaire neutralino–proton vaut

$$\sigma_S \simeq 10^{-10} \text{ GeV}^{-2} \simeq 4 \times 10^{-38} \text{ cm}^2 . \quad (\text{II.64})$$

Avec une échelle typique Λ de l'ordre de 100 GeV à 1 TeV, notre approche naïve confère à la section efficace scalaire une valeur s'étalant entre $\sim 4 \times 10^{-6}$ et 0.04 picobarns. Les prédictions des modèles supersymétriques couvrent une région étendue ne dépassant pas $\sigma_S \sim 10^{-5}$ picobarn. Pour un élément de numéro atomique A , les estimations précédentes croissent d'un facteur A^2 .

La distribution des événements – par noyau cible – s'obtient finalement en convoluant la section efficace de diffusion $d\sigma_S$ avec la distribution de vitesse f_χ des neutralinos

$$d^2\Gamma = \left\{ d\sigma_S \cdot \left| \vec{V}_\chi - \vec{V}_N \right| \right\} \times \left\{ n_\chi(\odot) \cdot f_\chi(\vec{V}_\chi) d^3\vec{V}_\chi \right\} . \quad (\text{II.65})$$

La densité numérique des particules dans le voisinage solaire est notée $n_\chi(\odot)$. Simplifions l'analyse en supposant qu'elles suivent **par rapport à la Terre** la distribution maxwellienne (II.5) en sorte que

$$f_\chi(\vec{V}_\chi) = \left\{ 2\pi\sigma^2 \right\}^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{V_\chi^2}{2\sigma^2} \right\} . \quad (\text{II.66})$$

On remarquera avec attention et profit que dans la formule précédente σ désigne la dispersion de vitesse uni-dimensionnelle des neutralinos et non leur section efficace !

Problème n° II-16 – Niveau [3] : Pour qu'un neutralino transfère au noyau l'énergie de recul E_{rec} , sa vitesse \vec{V}_χ doit vérifier la condition

$$E_{\text{rec}} \leq \frac{2 \mu^2 V_\chi^2}{m_N} . \quad (\text{II.67})$$

Intégrer alors l'expression (II.65) afin de montrer que sur un élément de numéro atomique A , la distribution des diffusions élastiques provenant d'une interaction scalaire est donnée par

$$\frac{d\Gamma}{dE_{\text{rec}}} = \frac{8}{(2\pi)^{3/2}} g_S^2 A^2 \frac{m_N n_{\text{CDM}\odot}}{\sigma} \exp\left\{-\frac{E_{\text{rec}}}{E_0}\right\} , \quad (\text{II.68})$$

où l'échelle d'énergie E_0 est définie par

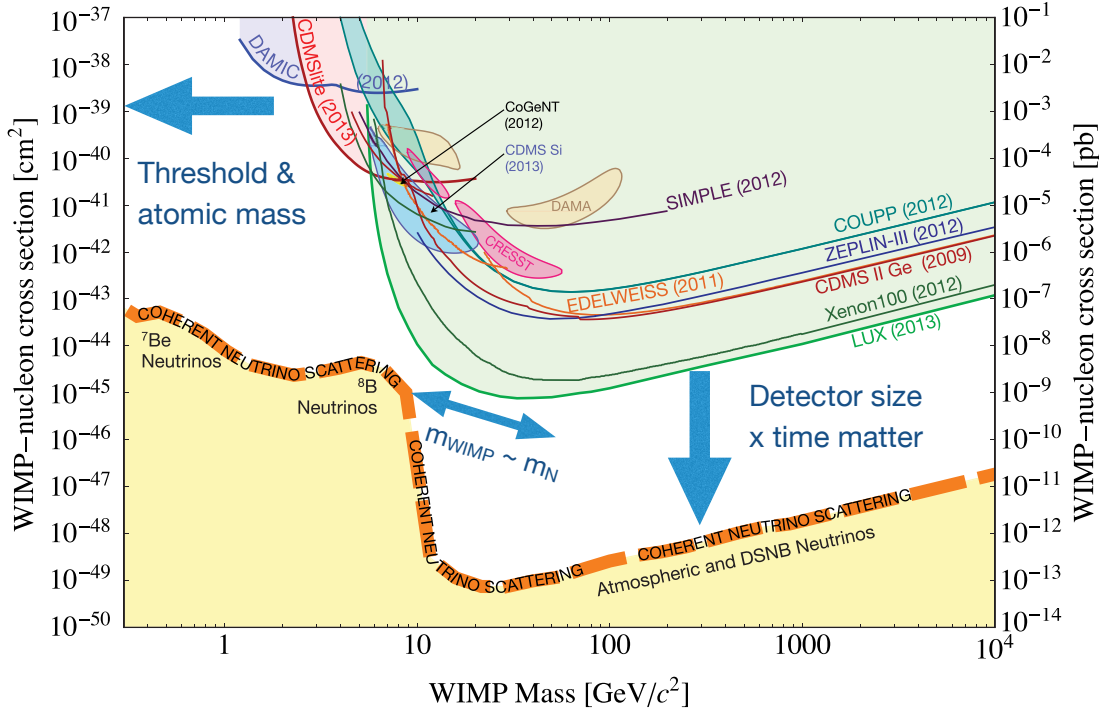
$$E_0 = 4 \frac{\mu^2}{m_N} \sigma^2 . \quad (\text{II.69})$$

La distribution des événements décroît exponentiellement avec l'énergie de recul E_{rec} du noyau cible. Considérons alors le cas d'un neutralino de 100 GeV entrant en collision avec un noyau de masse $m_N = 100$ GeV et par conséquent de numéro atomique $A = 100$. L'échelle typique Λ de la théorie dont est issu notre candidat à la matière noire est prise égale à 1 TeV dans cet exemple. La dispersion de vitesse du halo est $\sigma = V_C/\sqrt{2} = 156$ km s⁻¹ et sa densité locale $\rho_{\text{CDM}\odot}$ vaut 0.3 GeV cm⁻³. On dérive alors le taux d'événements

$$\frac{d\Gamma}{dE_{\text{rec}}} = \{0.18 \text{ collision kg}^{-1} \text{ jour}^{-1} \text{ keV}^{-1}\} \exp\left\{-\frac{E_{\text{rec}}}{E_0}\right\} , \quad (\text{II.70})$$

avec une décroissance exponentielle où $E_0 \simeq 27$ keV.

The WIMP landscape in (early December) 2015



22

Figure II.8: Limites actuelles sur la section efficace neutralino–nucléon indépendante du spin. Cette figure est extraite d’une présentation de Laura Baudis lors de la conférence *28th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics* à Genève en décembre 2015. Les meilleures limites sont obtenues par les expériences LUX et Xenon 100 dont les détecteurs contiennent du xénon en phases liquide et gazeuse. Lorsqu’un hypothétique neutralino entre en collision avec un noyau de xénon, il doit produire tout d’abord un flash lumineux (S1) ainsi que des électrons d’ionisation. Ces derniers sont extraits du xénon liquide par un champ électrique qui les accélèrent ensuite dans la phase gazeuse où ils percutent des atomes, engendrant ainsi une seconde scintillation (S2). La mesure de l’intensité relative entre S1 et S2 permet de trier entre collisions nucléaires – celles que doivent produire les particules de matière noire – et interactions électromagnétiques avec les couches électroniques des atomes de xénon – engendrées par des électrons ou des photons ayant réussi à pénétrer le détecteur. Si la sensibilité augmente encore, les expériences commenceront à voir les neutrinos d’origine astrophysique.

4.2) Le bruit de fond.

La détection directe constitue donc un pari audacieux car même avec une densité d'environ 0.3 GeV cm^{-3} et une vitesse moyenne $\sqrt{3}\sigma \sim 270 \text{ km/s}$, les neutralinos interagissent si faiblement avec leur environnement qu'une seule collision est tout au plus attendue chaque jour par kilogramme de matière exposée. Un noyau reculant sous l'impact d'un neutralino de passage reçoit cependant une énergie de l'ordre de 10 à 100 keV qu'il s'agit de mesurer. Un cristal scintillant comme l'iodure de sodium (NaI) émettra un flash lumineux alors qu'un matériau semi-conducteur comme le germanium ou le silicium réagira en s'ionisant et en devenant temporairement conducteur. Les bolomètres constituent également une voie prometteuse. La sensibilité que les équipes doivent atteindre donne cependant le vertige. L'augmentation de température engendrée par l'unique impact d'un neutralino ne dépasse guère le microkelvin. Pour la déceler, il convient de refroidir le bolomètre jusqu'à 10 à 20 millikelvins, donc pratiquement au zéro absolu.

Une difficulté supplémentaire provient de la radioactivité naturelle qui produit un fond d'événements dans lequel le signal des neutralinos est susceptible d'être noyé. Le potassium ^{40}K et le carbone ^{14}C contenus dans le corps humain par exemple y engendrent déjà 8.000 désintégrations chaque seconde. La réduction du niveau de radioactivité ambiante constitue donc le problème crucial auquel les expériences se sont attaquées dès la fin des années quatre-vingts. Différentes stratégies ont depuis lors été développées avec succès. Il convient tout d'abord de protéger les détecteurs des rayonnements environnants grâce à de véritables armures. Un blindage de 15 centimètres de plomb suffit par exemple à diviser par mille le flux de photons. La paraffine permet également de se prémunir contre les neutrons. Un soin particulier a été apporté dans le choix des matériaux constituant l'appareillage et seuls les moins radioactifs d'entre eux sont employés. On est même allé jusqu'à récupérer le plomb sur l'épave d'un galion espagnol. Gisant au fond de la mer depuis plusieurs siècles, ce plomb archéologique est très prisé car il a eu le temps de se désactiver. Il faut ensuite s'affranchir du rayonnement cosmique qui nous bombarde sans cesse. Le flux de muons à la surface du sol est d'une vingtaine de particules par m^2 et par seconde. La plupart des expériences sont donc installées dans des sites souterrains profondément enfouis sous la montagne comme le complexe italien du Gran Sasso ou le laboratoire français de Modane.

EDELWEISS

<http://edelweiss.in2p3.fr>



(Experience pour Detecter Les Wimps en Site Souterrain)

Modane Underground Laboratory (Fréjus, France) : 4800 mwe

- muon flux = $4/m^2/d$
- neutron flux = $1.6 \cdot 10^{-6}/s/cm^2$

- Low radioactivity cryostat
- Shield: 30 cm paraffin, 20 cm Pb, 10 cm Cu

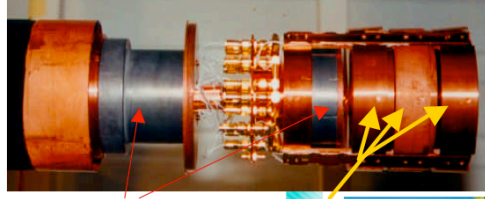
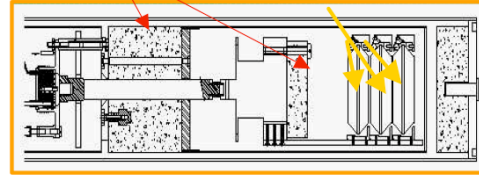
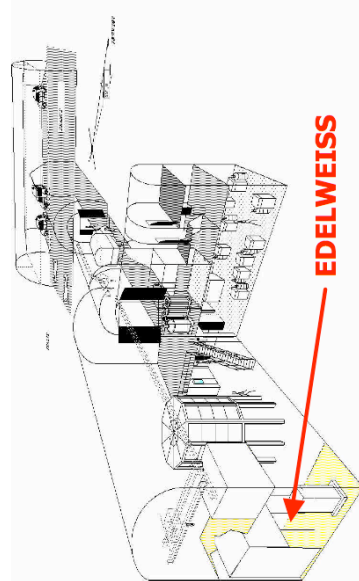


Figure II.9: L'expérience Edelweiss est installée dans le laboratoire sous-terrain de Modane, dans le tunnel du Fréjus.

Un fond irréductible de radiations réussit malgré tout à traverser les meilleures protections. La technique de la double détection constitue alors la parade grâce à l'identification des particules résiduelles. Un électron ou un photon de passage interagissent essentiellement avec les électrons de la sonde alors qu'un neutron – ou un neutralino – n'en verra que les noyaux. L'expérience française EDELWEISS et sa concurrente américaine CDMS ont choisi d'explorer cette voie prometteuse en développant des détecteurs cryogéniques capables de mesurer à la fois l'ionisation et la chaleur dégagées par un événement. A énergie transférée constante, un électron de recul produira en effet plus d'ionisation qu'un noyau bousculé par l'impact. Les électrons et photons ambiants peuvent être reconnus et donc éliminés. Ne restent alors que les neutrons qui, en rebondissant sur les noyaux, sont indiscernables des neutralinos recherchés. Comment alors séparer ces deux rayonnements ?

Notre système solaire est entraîné par la rotation du disque galactique à une vitesse de 220 km/s par rapport au halo fixe de matière noire au sein duquel les neutralinos sont eux-même animés d'une agitation propre. La vitesse des particules, qui détermine de manière cruciale le signal attendu, peut atteindre jusqu'à 500 km/s par rapport à la Terre. La plupart des neutralinos doivent provenir de la région du ciel vers laquelle le soleil et son cortège se déplacent. Il est malheureusement impossible pour l'instant de déterminer les trajectoires de ces particules. Par contre, la Terre se déplaçant autour du soleil à une vitesse de 30 km/s, on s'attend à une modulation du signal exactement comme un cycliste sous la pluie s'attend à être davantage trempé lorsqu'il roule contre le vent. En juin, la Terre accompagne le soleil dans son déplacement et leurs vitesses s'ajoutent. En décembre, c'est le contraire. Le nombre d'impacts dus aux neutralinos doit donc varier de manière saisonnière et passer par un maximum en juin pour décroître jusqu'en décembre.

En 1997, la collaboration sino-italienne DAMA [21] annonce qu'elle vient d'observer une telle modulation annuelle. La nouvelle est accueillie avec un certain scepticisme. La collaboration conclut toutefois à l'existence d'un neutralino cinquante fois plus massif que le proton – $M = (52 \pm 10)$ GeV. Depuis lors, les collaborations CDMS et EDELWEISS ont exploré la région de DAMA et n'ont pas observé le moindre signal.

5) Recherches indirectes & signatures astrophysiques.

Une autre direction de recherche consiste à déceler les signatures indirectes – ou astrophysiques – des neutralinos. Si ces particules constituent la matière noire astronomique et donc le halo de la Voie Lactée, elles continuent de s’y annihiler via la réaction

$$\chi + \chi \rightarrow q\bar{q}, W^+W^-, \dots \rightarrow \gamma, \bar{p}, \bar{D}, e^+ \text{ \& } \nu's \text{ ,} \quad (\text{II.71})$$

et de produire ainsi des rayons cosmiques susceptibles d’être détectés. En règle générale, le problème du bruit de fond se pose avec acuité car les rayons cosmiques sont déjà produits par des mécanismes conventionnels que nous allons discuter dans ce paragraphe. Il est crucial d’estimer le fond et son bruit afin d’être certain d’observer une distortion dans le spectre qui pourrait révéler la présence de neutralinos.

5.1) Amplification de l’annihilation.

Les signatures indirectes proviennent de l’annihilation des neutralinos entre eux via la réaction à deux corps (II.71). L’intensité du signal correspondant – soit le flux des rayons cosmiques ainsi produits – est amplifiée si la distribution des neutralinos n’est pas homogène.

Problème n° II–17 – Niveau [1] : Considérons ici un domaine de volume \mathcal{V} à l’intérieur duquel la densité numérique $n_\chi(\vec{x})$ n’est pas uniforme. C’est par exemple le cas si des grumeaux de neutralinos se sont formés au sein du halo galactique. Si la répartition des particules était homogène, leur densité serait donnée par la moyenne

$$\langle n_\chi \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} n_\chi(\vec{x}) d^3\vec{x} \text{ .} \quad (\text{II.72})$$

Montrer alors que les inhomogénéités de densité amplifient le taux d’annihilation par le facteur

$$\mathcal{C} = \frac{\langle n_\chi^2 \rangle}{\langle n_\chi \rangle^2} \text{ ,} \quad (\text{II.73})$$

où

$$\langle n_\chi^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} n_\chi^2(\vec{x}) d^3\vec{x} \text{ .} \quad (\text{II.74})$$

Les estimations de ce facteur d’amplification \mathcal{C} varient beaucoup d’un auteur à l’autre. Elles dépendent des sites astrophysiques où les annihilations ont lieu et des particules

détectées sur Terre. Dans le cas de photons de haute énergie et du centre galactique, les valeurs numériques prédites s'étalent entre 2–3 dans le cas d'un halo isotherme et $\sim 10^2$ – 10^3 si le profil de matière noire est particulièrement piqué. Pour les halos galactiques pris dans leur ensemble, l'amplification relative à la production de photons est de l'ordre d'une centaine dans la mesure où les clumps situés en périphérie contribuent fortement au signal. Ces sous-structures ne sont pas détruites par les forces de marée. Par contre, positrons et antiprotons nous parviennent d'une région plus centrale de la galaxie où les clumps ont tendance à être détruits, d'où des facteurs d'amplification modestes, ne dépassant pas ~ 2 . Certains auteurs pensent aussi que les neutralinos sont distribués suivant des nappes dans l'espace des phases et que ces dernières se replient parfois sur elles-mêmes, engendrant ainsi des caustiques de densité virtuellement infinie où une annihilation intense a lieu.

5.2) Le rayonnement gamma des neutralinos.

Un signal particulièrement clair de la présence de neutralinos au sein de la Voie Lactée ou dans certaines galaxies satellites de la nôtre dénommées naines sphéroïdes – il s'agit d'objets intermédiaires entre les amas globulaires et les petites galaxies – est leur annihilation en photons de haute énergie. Ceux-ci sont produits de manière monochromatique en raie gamma fine via les réactions

$$\chi + \chi \rightarrow \gamma + \gamma \quad \& \quad \gamma + Z^0 \quad , \quad (\text{II.75})$$

ou bien en un continuum provenant de la désintégration de mésons π^0 et K^0 produits lors de l'hadronisation de paires de quarks et de bosons de jauge en jets

$$\chi + \chi \rightarrow q\bar{q}, W^+W^-, \dots \rightarrow \gamma + \dots \quad . \quad (\text{II.76})$$

Une autre possibilité est le rayonnement d'un photon par un lepton chargé dans l'état final (final state radiation) ou bien par une particule chargée intervenant de manière virtuelle dans le diagramme de Feynman décrivant l'annihilation (virtual internal bremsstrahlung).

Le flux gamma correspondant engendré sur Terre est donné par l'intégrale le long de la ligne de visée traversant la distribution ρ_χ de neutralinos

$$\Phi_\gamma^{\text{CDM}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\langle \sigma v \rangle N_\gamma}{m_\chi^2} \int_{\text{los}} \rho_\chi^2 ds \quad , \quad (\text{II.77})$$

où $\langle \sigma v \rangle N_\gamma$ désigne $2 \langle \sigma_{\gamma\gamma} v \rangle$ ou $\langle \sigma_{\gamma Z^0} v \rangle$ dans le cas d'une raie gamma monochromatique et $\langle \sigma v \rangle_{\text{tot}} dN_\gamma/dE_\gamma$ dans les autres cas. La raie offre une signature sans équivoque de la présence de particules massives car aucun processus connu ne peut engendrer des photons monochromatiques dont l'énergie est de l'ordre de la masse m_χ des neutralinos, soit ~ 100 GeV à quelques TeV.

Problème n⁰ II–18 – Niveau [1] : Montrer que l'énergie des photons produits dans la réaction (II.75) vaut $E_\gamma = m_\chi$ et

$$E_\gamma = m_\chi - \frac{m_Z^2}{4m_\chi} . \quad (\text{II.78})$$

Problème n⁰ II–19 – Niveau [2] : Etablir la relation (II.77). Dans le cas de la raie à 2 photons, montrer que le flux est donné par

$$\Phi_\gamma^{\text{CDM}} = 3.54 \times 10^{-13} \text{ photons cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \frac{\langle \sigma_{\gamma\gamma} v \rangle_{29}}{m_{100}^2} \mathcal{I}(\vec{u}) , \quad (\text{II.79})$$

où la section efficace d'annihilation et la masse du neutralino sont respectivement exprimées en unités de $10^{-29} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ et 100 GeV. L'intégrale $\mathcal{I}(\vec{u})$ le long de la ligne de visée pointant dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} est alors définie par

$$\mathcal{I}(\vec{u}) = \left\{ \rho_{\text{CDM} \odot}^2 r_\odot \right\}^{-1} \int_{\text{los}} \rho_\chi^2 ds . \quad (\text{II.80})$$

On prendra $\rho_{\text{CDM} \odot} = 0.3 \text{ GeV cm}^{-3}$ et $r_\odot = 8 \text{ kpc}$.

La valeur de l'intégrale \mathcal{I} dépend de la distribution des neutralinos. Les différents modèles de halo présentés dans la table II.1 donnent des valeurs semblables sauf en direction du centre galactique où les prédictions couvrent 6 ordres de grandeur suivant que l'on prenne un halo isotherme avec coeur homogène ou bien un profil très piqué en $r^{-7/3}$. Les incertitudes astrophysiques sont énormes mais la possibilité d'un signal intense motive les observations en direction du centre galactique. Considérons à titre d'exemple le profil galactique de Navarro, Frenk et White. Près du centre de la Voie Lactée, la densité des neutralinos se simplifie en

$$\rho_\chi(r) = \eta \rho_{\text{CDM} \odot} \left\{ \frac{r_\odot}{r} \right\} . \quad (\text{II.81})$$

où $\eta = 1.742$ est une constante. On considère une ligne de visée faisant l'angle α avec la direction du centre galactique.

Problème n° II-20 – Niveau [1] : En supposant que α est petit, montrer que l'intégrale \mathcal{I} est simplement donnée par

$$\mathcal{I}(\alpha) = \eta^2 \frac{\pi}{\alpha} . \quad (\text{II.82})$$

Problème n° II-21 – Niveau [1] : On considère maintenant une région circulaire de rayon angulaire θ dont le centre correspond à celui de la Voie Lactée. Montrer que la moyenne de \mathcal{I} sur ce disque vaut

$$\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{1}{\pi \theta^2} \int_0^\theta 2 \pi \alpha \mathcal{I}(\alpha) d\alpha = \eta^2 \frac{2\pi}{\theta} . \quad (\text{II.83})$$

Etablir alors numériquement que

$$\langle \mathcal{I} \rangle_{NFW}(\theta) = 1092 \left\{ \frac{1^\circ}{\theta} \right\} . \quad (\text{II.84})$$

La détection des photons de haute énergie est réalisée en orbite à bord de satellites dédiés comme CGRO – Compton Gamma Ray Observatory – AMS et surtout Fermi. La surface collectrice est faible. Au-delà de quelques dizaines de GeV, les télescopes à effet Cerenkov atmosphérique entrent en scène. Ils offrent une grande surface de réception. Un photon de haute énergie interagit avec les couches supérieures de l'atmosphère et engendre ainsi une gerbe de photons optiques au niveau du sol dont l'observation permet de reconstruire l'énergie et la direction de la particule incidente initiale.

Un signal gamma n'est détectable que s'il excède le bruit associé au fond dans lequel il se cache. Pour les télescopes à effet Cerenkov atmosphérique – ACT – le fond principal provient des électrons cosmiques qui pénètrent dans l'atmosphère et y engendrent des gerbes électromagnétiques identiques à celles créées par les photons de haute énergie. Il n'est donc pas possible de distinguer les rayons gamma des électrons dont le flux est donné par

$$\Phi_e = (6.4 \times 10^{-2} \text{ GeV}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}) (E/1 \text{ GeV})^{-3.3 \pm 0.2} . \quad (\text{II.85})$$

Une contribution hadronique non-résolue doit également être prise en compte. Le flux correspondant

$$\Phi_{\text{had}} = (1.8 \text{ GeV}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}) (E/1 \text{ GeV})^{-2.75} \quad (\text{II.86})$$

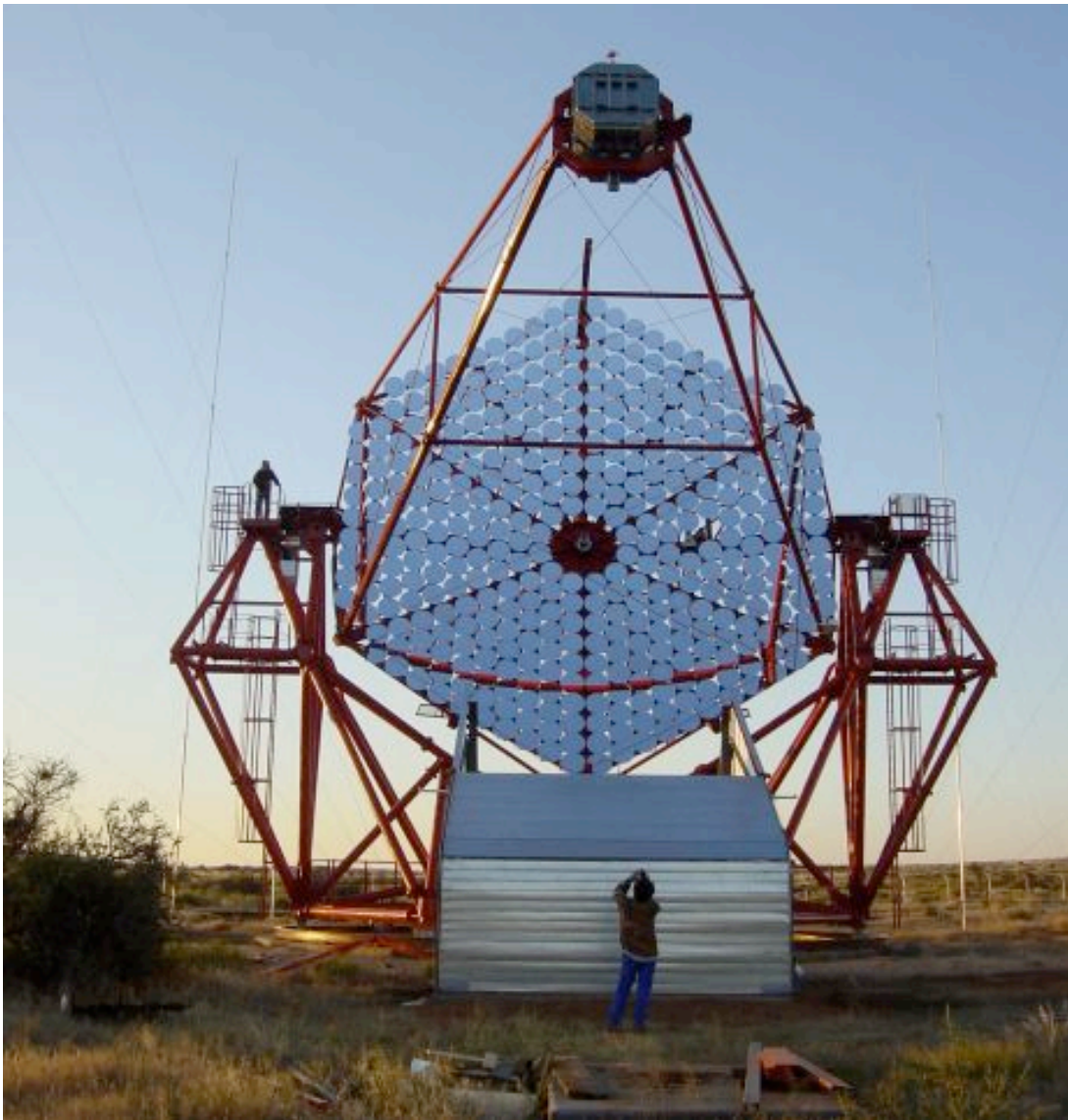


Figure II.10: L'un des quatre télescopes du détecteur HESS-I installé en Namibie d'où il peut sonder le centre galactique et les galaxies naines sphéroïdes. Un cinquième télescope encore plus imposant a été rajouté en 2012. Il permet d'abaisser le seuil de détection à environ 50 GeV, permettant ainsi de comparer les observations de HESS-II à celles du satellite Fermi.

des protons et noyaux du rayonnement cosmique – dont une fraction $\sim 10^{-3}$ – 10^{-2} est identifiée à tort comme étant des photons – a également été mesuré. Un détecteur embarqué sur satellite ne souffre pas de ces problèmes mais doit quand même s'affranchir du fond diffus galactique de rayonnement gamma produit par la spallation des rayons cosmiques – protons et noyaux – sur le gaz interstellaire du disque de la Voie Lactée. Le flux correspondant est assez bien mesuré mais il est susceptible de varier brutalement sur de

petites échelles angulaires dans les régions où des nuages moléculaires se sont condensés.

Nous nous proposons maintenant de déterminer la sensibilité d'un télescope ACT du calibre de HESS. Cet instrument possède une surface effective de détection \mathcal{S} d'environ 0.1 km^2 . Une des cibles de HESS est le centre galactique où les hypothétiques neutralinos ont pu se condenser. Nous supposons que leur profil suit la distribution de Navarro, Frenk et White avec $\rho_\chi \propto r^{-1}$. Supposons que HESS observe de manière continue le centre galactique pendant une durée \mathcal{T} de un à deux mois. Nous prendrons donc une acceptation égale à

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} = 0.01 \text{ km}^2 \text{ an} . \quad (\text{II.87})$$

Supposons que le champ observé par HESS sur le fond du ciel soit un disque de rayon angulaire $\theta \sim 1^\circ$ entourant le centre de la Voie Lactée. L'annihilation des neutralinos en deux photons produit des rayons gamma monochromatiques d'énergie $E_\gamma = m_\chi$.

Problème n° II-22 – Niveau [2] : En moyennant le flux Φ_γ^{CDM} donné par l'expression (II.79) sur le disque observé et en convoluant le résultat avec l'acceptance de HESS, montrer que le nombre total des photons collectés provenant des neutralinos galactiques vaut

$$N_\gamma^{\text{CDM}} = 1170 \text{ photons} \frac{\langle \sigma_{\gamma\gamma} v \rangle_{29}}{m_{100}^2} \left\{ \frac{\theta}{1^\circ} \right\} . \quad (\text{II.88})$$

Ces photons seront détectés dans un intervalle en énergie dont la largeur est donnée par la résolution de HESS que nous prendrons égale à $\pm 10\%$ en valeur relative. Les électrons cosmiques d'énergie $E_e = m_\chi$ seront identifiés à tort comme des photons – ils engendrent le même type de gerbe – et seront également collectés dans le même intervalle en énergie. Ils constituent le fond dont il faut extraire le signal.

Problème n° II-23 – Niveau [2] : En convoluant le flux (II.85) avec l'acceptance de HESS, montrer que le nombre de photons d'origine électronique détectés dans l'intervalle d'énergie centré sur $E_\gamma = m_\chi$ et de largeur $\Delta E_\gamma = 0.2 m_\chi$ vaut

$$N_\gamma^e = 9.71 \times 10^5 \text{ photons} m_{100}^{-2.3} \left\{ \frac{\theta}{1^\circ} \right\}^2 . \quad (\text{II.89})$$

A priori, la détection d'un quelconque signal est sans espoir tant N_γ^e excède N_γ^{CDM} . C'est sans compter avec le caractère homogène du fond électronique qui produit un signal constant sur le fond du ciel. En pointant le télescope sur la source puis à côté – détection ON et OFF – le surplus N_γ^{CDM} de photons provenant de l'annihilation des neutralinos du centre galactique est décelable s'il excède le bruit statistique de fond. Celui-ci est donné par la racine carré de N_γ^e de sorte qu'une détection avec un niveau de confiance de n -sigma n'est possible que si

$$\frac{N_\gamma^{\text{CDM}}}{\sqrt{N_\gamma^e}} \geq n . \quad (\text{II.90})$$

Problème n⁰ II-24 – Niveau [1] : Montrer que HESS est susceptible de détecter la présence de matière noire supersymétrique ou de Kaluza-Klein au centre de la Voie Lactée avec un rapport signal sur bruit de 3-sigma si la masse du neutralino et sa section efficace d'annihilation en deux photons vérifient la condition

$$\langle \sigma_{\gamma\gamma} v \rangle \geq 2.5 \times 10^{-29} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} m_{100}^{0.85} @ 3\sigma . \quad (\text{II.91})$$

Dans le cas d'un profil à la Gondolo et Silk, HESS est bien plus sensible aux neutralinos et peut même explorer une grande partie de l'espace des paramètres supersymétriques.

5.3) Rayons cosmiques chargés.

Les neutralinos peuvent également s'annihiler en rayons cosmiques chargés. Nous nous intéresserons uniquement aux antiparticules dont le fond conventionnel est faible et discuterons le cas des antiprotons, antideuteron et positrons.

Les noyaux du milieu interstellaire sont parfois accélérés par le passage d'ondes de choc induites par l'explosion de supernovae. Les sources du rayonnement cosmique primaire sont donc situées dans le disque de gaz de la Voie Lactée. Les primaires se propagent ensuite dans le champ magnétique galactique et sont diffusés par ses irrégularités – les ondes d'Alfvén. Parce que ces centres diffuseurs ne sont pas au repos, un mécanisme de Fermi de second ordre engendre une diffusion en énergie à laquelle se rajoutent les pertes essentiellement par ionisation. Un vent galactique vertical peut également entraîner par convection les rayons cosmiques de part et d'autre du disque. Les rayons cosmiques primaires peuvent finalement interagir avec le gaz interstellaire et produire des espèces secondaires parmi lesquelles des noyaux d'antimatière qui constituent le fond naturel du

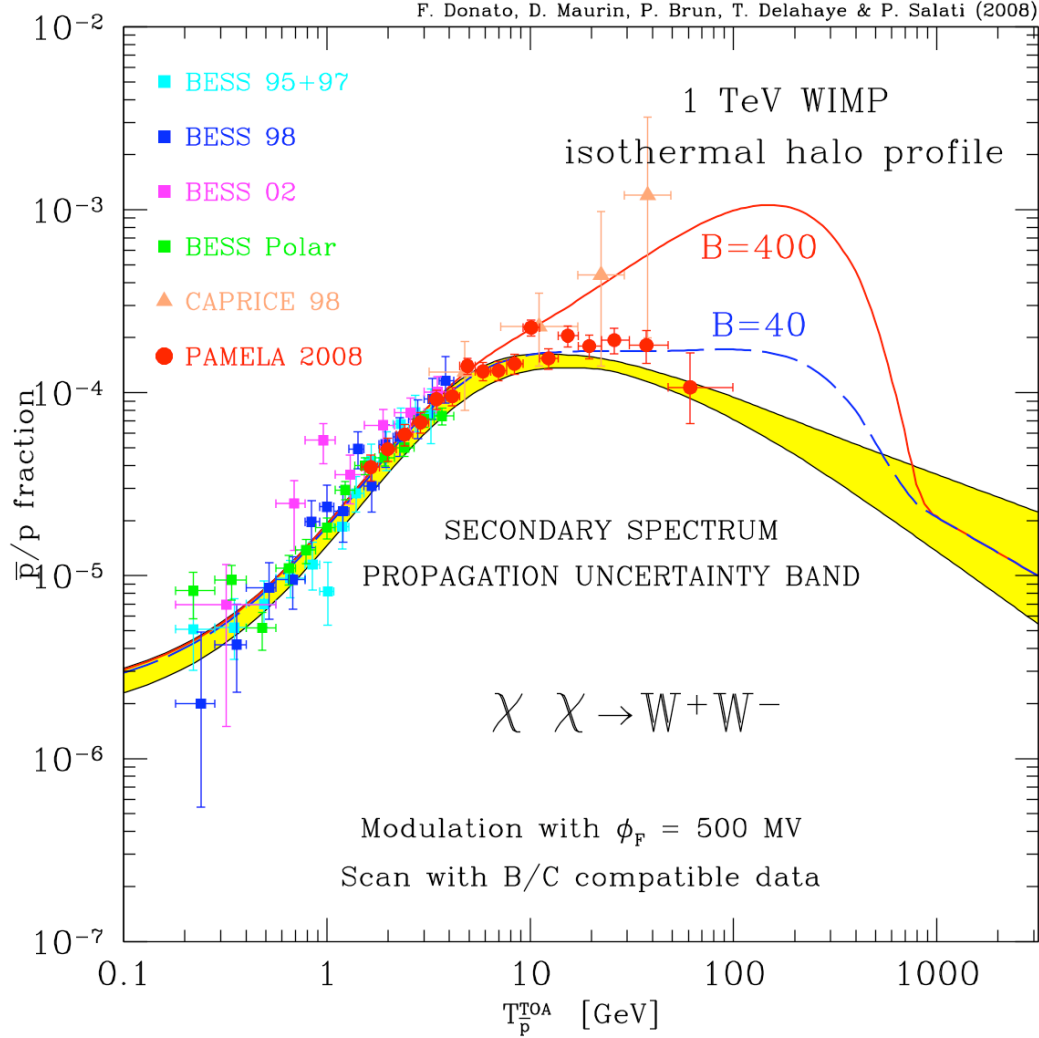


Figure II.11: La bande jaune enveloppe l'ensemble des spectres des antiprotons secondaires de spallation engendrés par tous les paramètres de diffusion compatibles avec le rapport B/C. Sa largeur permet d'estimer l'incertitude théorique associée au modèle de propagation des rayons cosmiques au sein de la Voie Lactée. Les mesures du satellite PAMELA [25] (points en rouge) sont en excellent accord avec le fond secondaire. Un neutralino de 1 TeV s'annihilant exclusivement en paires W^+W^- est susceptible d'expliquer l'excès de positrons au-delà de 10 GeV mesuré par PAMELA [26] à condition de prendre un facteur de boost de 400. Cette possibilité est cependant exclue car elle conduirait à la courbe rouge. (figure tirée de [28]).

signal d'annihilation des neutralinos. Ce schéma général peut être implémenté de manière numérique comme dans le code de Strong et Moskalenko [22] ou bien de manière semi-analytique grâce au modèle à deux zones de David Maurin *et al.* [23]. La dernière méthode

permet une détermination plus aisée des erreurs théoriques liées au modèle de propagation lui-même. L'espace des paramètres a d'ailleurs été exploré de manière à ne garder que les régions reproduisant correctement le rapport bore sur carbone – un rapport typique et bien mesuré d'un secondaire stable sur un primaire.

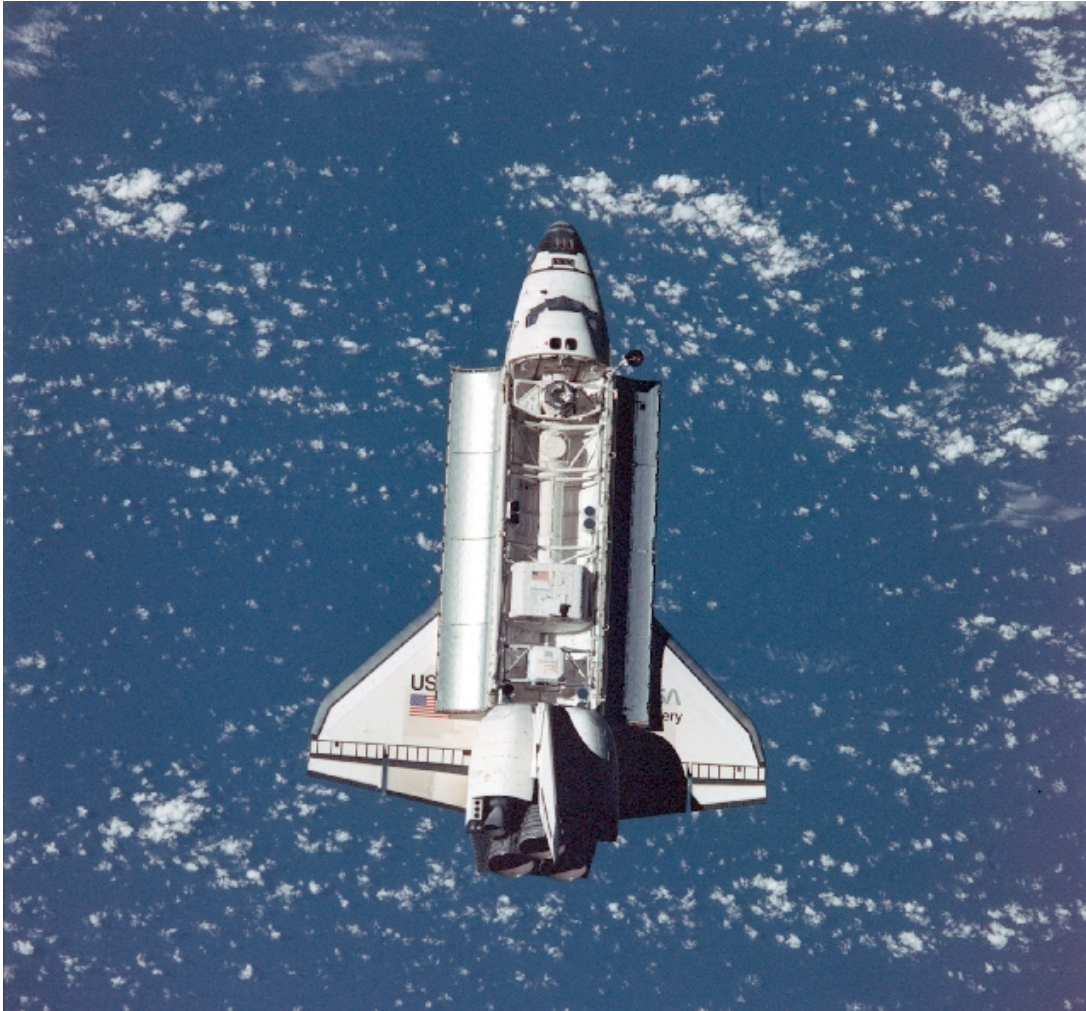


Figure II.12: Le détecteur de rayons cosmiques de la collaboration AMS est situé à l'arrière de la navette spatiale lors du vol test de 1998 au cours duquel le flux d'antiprotons a été mesuré – voir figure II.11. Il a été installé à bord de la station spatiale internationale ISS le 20 mai 2011 où il a recueilli une importante moisson de données très précises sur le rayonnement cosmique – voir en particulier la figure II.14.

• Antiprotons secondaires et primaires

Dans la mesure où les antiprotons secondaires ne sont pas produits au repos par rapport à la galaxie, leur spectre devrait être déficitaire à basse énergie – en dessous de $T_{\bar{p}} \sim 1$ GeV – dans une région où les antiprotons produits par l’annihilation de neutralinos immobiles devraient au contraire être abondants. Cependant les antiprotons peuvent subir des diffusions inélastiques sur des protons interstellaires qu’ils transforment en résonances Δ . Les antiprotons ne s’annihilent pas mais survivent à l’interaction en perdant de l’énergie. Le spectre secondaire est considérablement aplati lorsque ces collisions inélastiques et non-annihilantes sont prises en compte et ne présente plus dès lors de signature spectrale distincte de la composante primaire produite par les neutralinos ainsi que l’illustrent les figures II.11 et II.13.

Dans la mesure où les neutralinos sont susceptibles d’induire en s’annihilant une distortion dans le spectre des antiprotons, il est crucial de déterminer aussi précisément que possible le flux des antiprotons secondaires de spallation ainsi que l’erreur théorique associée. L’incertitude sur le spectre de cette composante conventionnelle provient tout d’abord du modèle de propagation choisi. Elle a été déterminée récemment et est présentée dans la figure II.11. Elle varie de $\sim 9\%$ à 100 MeV pour atteindre $\sim 24\%$ à 10 GeV. Il est surprenant de constater que la source principale d’erreur provient désormais de la physique nucléaire et de notre piètre connaissance des section efficaces de production des antiprotons dans les collisions p -He, He- p et He-He. L’incertitude correspondante vaut $\sim \pm 22\%$ - 25% pour des énergies cinétiques allant de 100 MeV à 100 GeV. Dans la mesure où noyaux et antiprotons secondaires proviennent du disque galactique, il est normal que le rapport B/C contraigne fortement la production des antiprotons de spallation. Au contraire, les antiprotons primaires sont engendrés dans tout le halo diffusif – une région s’étendant de part et d’autre du disque galactique dans laquelle les rayons cosmiques diffusent sur les irrégularités du champ magnétique et sont confinés. L’épaisseur de ce halo détermine de manière cruciale le flux des antiprotons primaires mais n’est pas contrainte par le rapport B/C. Du coup, les prédictions sur le spectre primaire souffrent d’importantes incertitudes et couvrent presque deux ordres de grandeur – voir figure II.13. Il est difficile dans ces conditions de détecter les neutralinos.

Le 15 avril 2015, la collaboration AMS a présenté des données préliminaires concernant le rapport du flux des antiprotons sur celui des protons. Ces données semblent indiquer un excès par rapport aux prédictions concernant le fond des secondaires. Cependant, une ré-estimation de ce dernier [24] a permis de montrer que la production des secondaires seule permet d’expliquer les observations. La figure II.14 présente les données préliminaires de AMS-02 et celles publiées auparavant par la collaboration PAMELA. Les prédictions

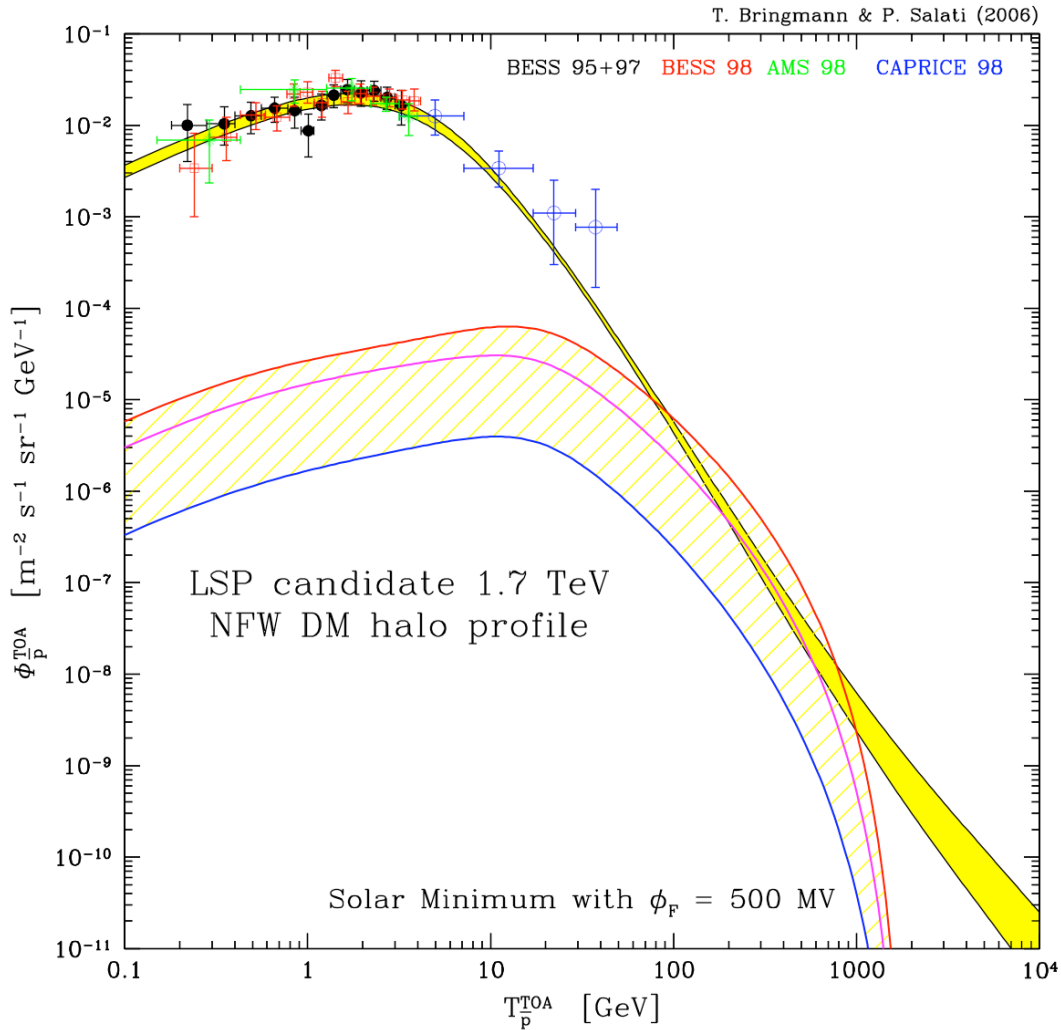


Figure II.13: La zone hachurée en jaune représente le flux des antiprotons primaires engendrés par l’annihilation de neutralinos de 1.7 TeV dans un scénario particulier dit AMSB de la supersymétrie. Les courbes bleue et rouge correspondent à des configurations astrophysiques minimales et maximales entre lesquelles le rapport B/C est bien reproduit. La ligne médiane en magenta est obtenue en ajustant ce rapport au mieux.

du fond secondaire sont indiquées par la courbe rouge entourée des différentes bandes d’incertitude liées au calcul, *i.e.*,

- (i) la section efficace de production d’un antiproton lors d’une collision entre un proton cosmique et un atome d’hydrogène du milieu interstellaire (rouge),
- (ii) les paramètres décrivant la propagation du rayonnement cosmique dans le halo magnétique de la galaxie (jaune),
- (iii) le spectre à haute énergie, au-delà de 250 GeV, des protons et noyaux d’hélium

cosmiques à l'origine des antiprotons secondaires (violet),
 (iv) et la modulation solaire susceptible d'être différente pour les protons et les antiprotons (vert).

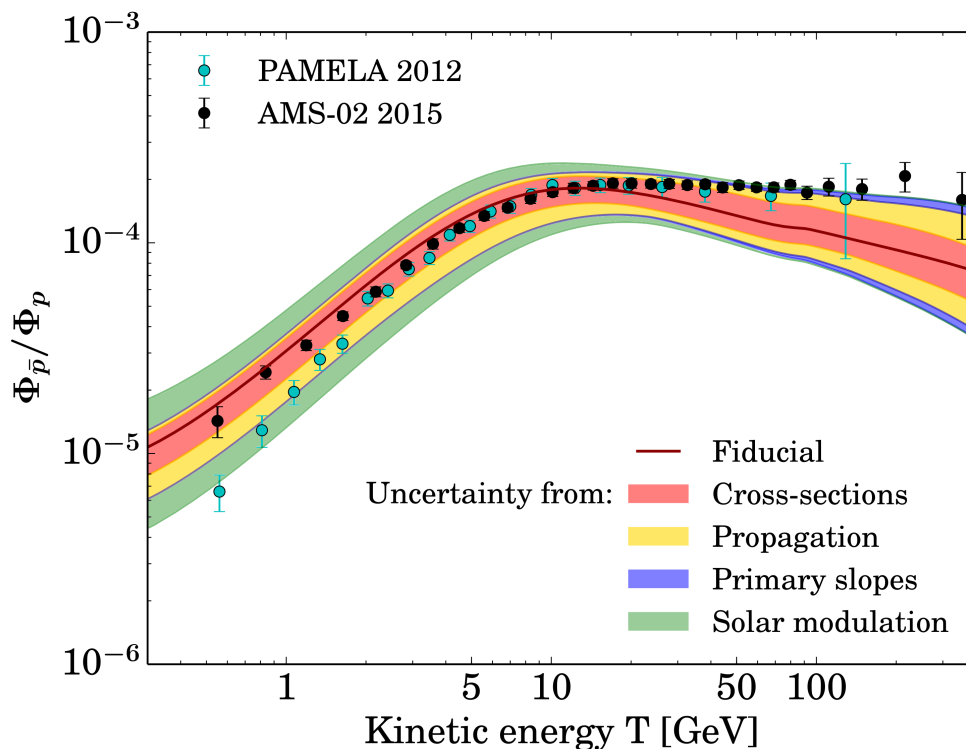


Figure II.14: Le flux des antiprotons secondaires produits par la spallation des protons et noyaux d'hélium cosmiques sur le gaz interstellaire a été récemment ré-évalué [24] et comparé aux données publiées par la collaboration PAMELA en 2012 et celles présentées lors des AMS days au CERN le 15 avril 2015. Même en conservant pour le calcul des antiprotons secondaires les paramètres de propagation dérivés en 2001 à partir de vieilles données sur le rapport B/C [23], il est possible d'expliquer les observations par le fond astrophysique seul. Les données tendent cependant à être situées sur le bord supérieur de la bande globale d'incertitude. A suivre...

• **L'antidéutérium**

Les antideutons sont facilement détruits lorsqu'ils interagissent car leur énergie de liaison n'est que de 2.2 MeV. Ils ne subissent donc pas en principe de collisions inélastiques et non-annihilantes. Contrairement aux antiprotons, le spectre des antideutons secondaires ne se repeuple pas à basse énergie par migration à partir du pic et ce spectre doit présenter un déficit en dessous d'une énergie cinétique d'environ 3 GeV par nucléon. C'est là que

les antideutons primaires produits par les neutralinos doivent être cherchés. Cependant les flux attendus sont extrêmement faibles et même l'expérience AMS-02 ne pourra pas observer de noyaux d'antideutérium.

• PAMELA, AMS-02 et l'excès de positrons

Les mesures du satellite PAMELA [26] mettent en évidence un excès de positrons au-delà d'une dizaine de GeV qu'il est difficile d'expliquer par une pure composante secondaire comme la figure II.15 l'indique. L'excès de positrons a été confirmé par les observations récentes et très précises de AMS-02 [27]. L'anomalie est sans équivoque. La production de positrons secondaires par spallation du milieu interstellaire par des protons et des noyaux d'hélium cosmiques n'expliquent par la remontée de la fraction positronique à haute énergie.

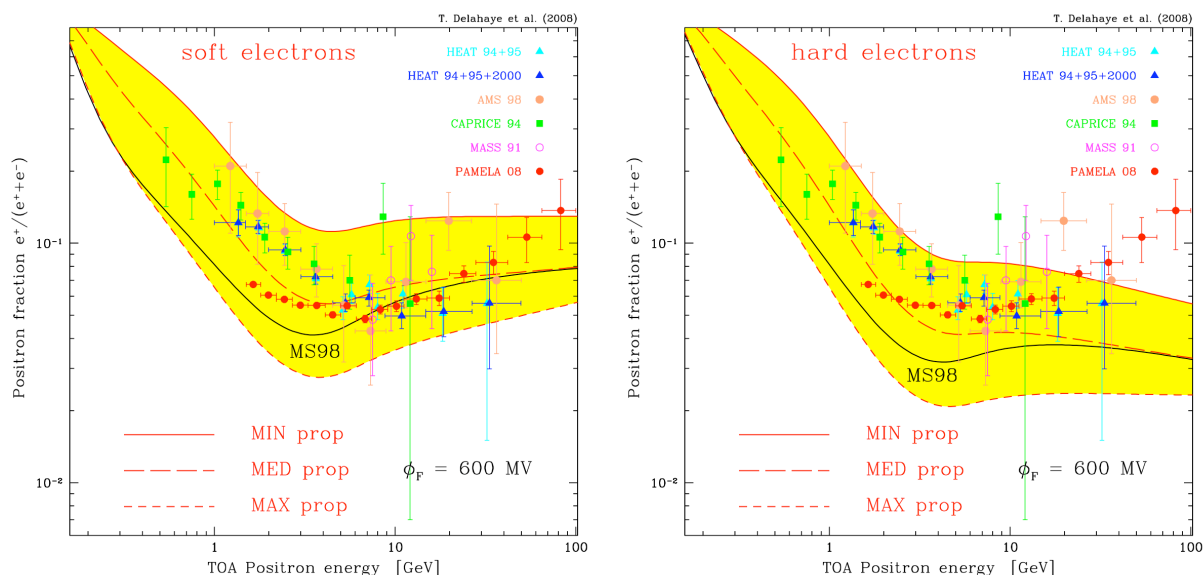


Figure II.15: La bande jaune correspond aux incertitudes que la propagation du rayonnement cosmique induit sur la fraction positronique. Le spectre des électrons joue un rôle crucial. Une distribution électronique molle conduit à un rapport $e^+/(e^+ + e^-)$ en accord marginal avec les observations de PAMELA [26] (panneau de gauche) alors que dans le cas dur de droite, un excès est clairement visible (figure tirée de [30]). Les données récentes de AMS-02 [27] montrent clairement la présence d'un excès de positrons au-delà de 10 GeV.

L'existence d'un excès de positrons par rapport au fond astrophysique attendu a engendré à partir de 2008 une activité théorique fébrile autour de l'explication de cette anomalie par des neutralinos s'annihilant dans le halo galactique. Cet excès est-il le signal tant attendu de la présence de WIMPs dans la Voie Lactée ? Beaucoup y ont cru. Depuis, la

poussière est retombée et l'hypothèse des neutralinos souffrent de problèmes rédhibitoires. Certes, un WIMP de quelques centaines de GeV ou de quelques TeV est bien susceptible d'engendrer des positrons à l'énergie où l'excès est observé. Mais trois problèmes demeurent.

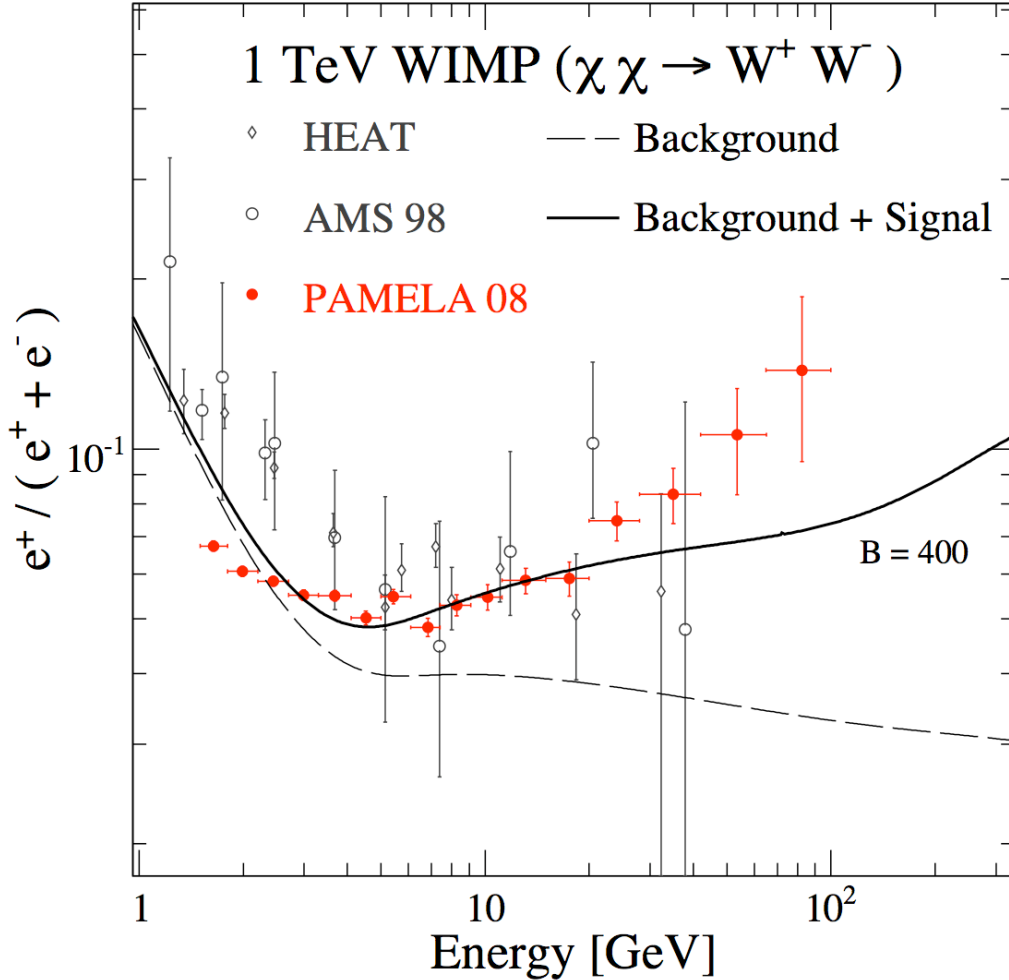


Figure II.16: Les données de PAMELA [26] (points en rouge) ne sont pas en accord avec le fond secondaire (courbe noire en tirets). On peut dès lors invoquer un neutralino de 1 TeV s'annihilant exclusivement en paires W^+W^- avec une section efficace canonique de $3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Il faut cependant augmenter quatre cents fois l'annihilation afin d'obtenir la courbe solide noire. (figure tirée de [28]).

(i) Les positrons de haute énergie détectés par PAMELA et AMS-02 ne peuvent pas avoir été produits loin de la Terre. Ils diffusent en effet dans les champs magnétiques galactiques tout en perdant de l'énergie par rayonnement synchrotron et inverse Compton. Or

nous connaissons la densité de matière noire $\rho_{\text{CDM}\odot}$ dans l’environnement solaire. De plus, la section efficace d’annihilation des neutralinos susceptible d’expliquer une densité relic $\Omega_{\text{CDM}}h^2$ égale à 0.12 est de l’ordre de $3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Cette valeur est qualifiée de **thermique**. Le taux d’annihilation des WIMPs ainsi obtenu est de loin très inférieur à celui requis pour expliquer l’excès observé. Dans le cas pédagogique de la figure II.16, l’annihilation a lieu en une paire de bosons W . Il convient d’augmenter le taux d’annihilation par un facteur 400 pour commencer à expliquer de manière marginale les observations.

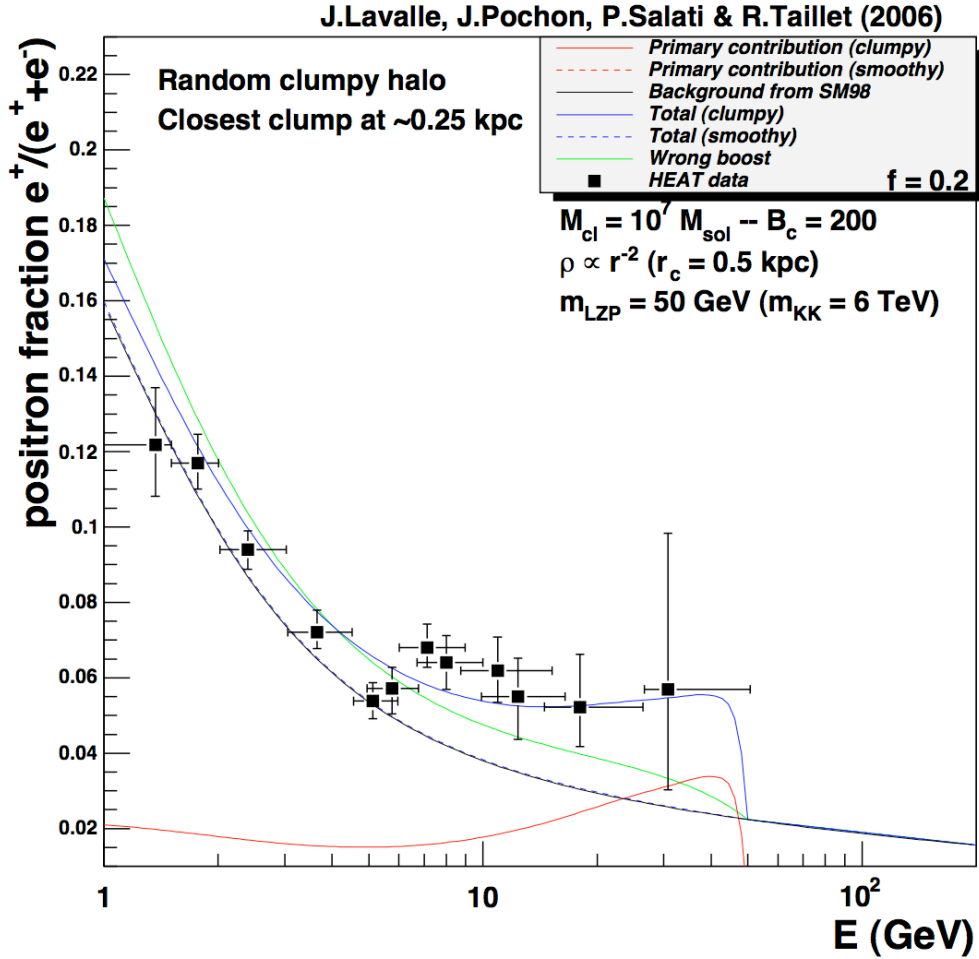


Figure II.17: L’excès positronique, ici mesuré par la collaboration HEAT [29], est comparé au signal engendré par un halo de matière noire isotherme constitué de WIMPs de Kaluza–Klein de 50 GeV. Ceux-ci s’agglomèrent en sous-structures de $10^7 M_{\odot}$ dont la plus proche est à 250 pc de la Terre dans cette simulation Monte–Carlo.

Certains auteurs ont donc invoqué l’effet Sommerfeld où les neutralinos s’attirent lorsque

leur énergie est faible et où la section efficace d'annihilation augmente lorsque la vitesse relative des particules incidentes diminue. Une autre possibilité est d'imaginer, comme dans la figure II.17 que des clumps de matière noire flottent dans le voisinage solaire. La probabilité correspondante est en fait ridiculement faible et ce scénario a été abandonné.

(ii) Même si l'on arrive à expliquer l'excès de positrons en augmentant de manière artificielle le taux d'annihilation des neutralinos, le second problème vient de la surproduction d'antiprotons associée. La figure II.11 reprend le cas pédagogique précédent et montre que le flux d'antiprotons primaires produits en même temps que les positrons est incompatible avec les mesures. Les WIMPs doivent s'annihiler en particules ne conduisant pas à des antiprotons. Ils doivent donc être **leptophiles**.

(iii) Finalement, une pléthore d'observations exclue les paramètres dans le plan masse vs section efficace susceptibles d'expliquer l'anomalie positronique. Les mesures sur les naines sphéroïdes par exemple sont particulièrement contraignantes.

Une analyse récente extrêmement détaillée [31] montre qu'il reste très peu de possibilités d'expliquer l'anomalie positronique avec des WIMPs et permet de contraindre très fortement les paramètres en jeu. Une analyse en cours semble indiquer d'ailleurs qu'aucun candidat neutralino ne peut reproduire le spectre observé par AMS-02.

References

- [1] Voir l'excellent site web que Richard Taillet a consacré au problème de la matière noire astronomique et dont l'adresse est <http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/taillet/>
- [2] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology** (1972) Wiley, New York.
- [3] C.W. Misner, K. Thorne et J.A. Wheeler, **Gravitation** (1973) Freeman, San Francisco.
- [4] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, **Classical Theory of Fields** (1975) Pergamon Press, Oxford.
- [5] R.M. Wald, **General Relativity** (1984) University of Chicago Press, Chicago.
- [6] J.C. Tsai, *Astrophys. J. Letters* **413**, L 59 (1993).
- [7] S. Perlmutter *et al.* [The Supernova Cosmology Project], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).

- [8] C.L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003);
G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 135 (2003);
D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [9] *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, P.A.R. Ade *et al.*, *Astronomy & Astrophysics* **571** (2014) A16.
- [10] S. Burles and D. Tytler, *Astrophys. J.* **499**, 699 (1998) et *Astrophys. J.* **507**, 732 (1998).
- [11] J.N. Bahcall and R.M. Soneira, *Astrophys. J. Suppl.* **44**, 73 (1980).
- [12] A.V. Kravtsov, A.A. Klypin & A.M. Khokhlov, *Astrophys. J. Suppl.* **111**, 73 (1997);
A.V. Kravtsov, A.A. Klypin, J.S. Bullock and J.R. Primack, *Astrophys. J.* **502**, 48 (1998).
- [13] J.F. Navarro, C.S. Frenk and S.D.M. White, *Astrophys. J.* **462**, 563 (1996).
- [14] B. Moore *et al.*, *Astrophys. J. Letters* **499**, L L5 (1998).
- [15] A.W. Graham *et al.*, *Astron. J.* **132** (2006) 2685;
J.F. Navarro *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **402** (2010) 21.
- [16] M. Cirelli *et al.*, *JCAP* **1103** (2011) 051.
- [17] B. Moore *et al.*, *Astrophys. J. Letters* **524**, L L19 (1999).
- [18] W.J.G. De Blok, S.S. McGaugh, A. Bosma and V.C. Rubin, *Astrophys. J. Letters* **552**, L L23 (2001).
- [19] P. Gondolo and J. Silk, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1719 (1999).
- [20] E. Aprile *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 131302 (2010).
- [21] R. Bernabei *et al.*, *Phys. Lett. B* **424**, 195 (1998) et *Phys. Lett. B* **450**, 448 (1999).
- [22] A.W. Strong and I.V. Moskalenko, *Astrophys. J.* **509**, 212 (1998).
- [23] D. Maurin, F. Donato, R. Taillet and P. Salati, *Astrophys. J.* **555**, 585 (2001).
- [24] *AMS-02 antiprotons, at last! Secondary astrophysical component and immediate implications for Dark Matter*, G. Giesen *et al.*, *JCAP* **1509** (2015) 023.
- [25] *A new measurement of the antiproton-to-proton flux ratio up to 100 GeV in the cosmic radiation*, O. Adriani *et al.*, *Physical Review Letters* **102** (2009) 051101.

- [26] *An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100GeV*, O. Adriani *et al.*, Nature **458** (2009) 607.
- [27] *First Result from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station: Precision Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of 0.5-350 GeV*, M. Aguilar *et al.*, Physical Review Letters **110** (2013) 141102;
High Statistics Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of $>0.5-500$ GeV with the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, L. Accardo, Physical Review Letters **113** (2014) 121101;
Electron and Positron Fluxes in Primary Cosmic Rays Measured with the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, M. Aguilar *et al.*, Physical Review Letters **113** (2014) 121102.
- [28] *Constraints on WIMP dark matter from the high energy PAMELA \bar{p}/p data*, F. Donato, D. Maurin, P. Brun, T. Delahaye and P. Salati, Physical Review Letters **102** (2009) 071301.
- [29] S.W. Barwick *et al.* [HEAT Collaboration], Astrophys. J. Letters **482**, L L191 (1997);
S. Coutu *et al.* [HEAT- \bar{p} Collaboration], proceedings of the 27th ICRC (2001);
M.A. DuVernois *et al.* [HEAT Collaboration], Astrophys. J. Letters **559**, L 296 (2001).
- [30] *Galactic secondary positron flux at the Earth*, T. Delahaye, F. Donato, N. Fornengo, J. Lavalle, R. Lineros, P. Salati and R. Taillet, Astronomy & Astrophysics **501** (2009) 821.
- [31] *A new look at the cosmic ray positron fraction*, M. Boudaud *et al.*, Astronomy & Astrophysics **575** (2015) A67.
-

Chapitre III

Introduction à l'optique gravitationnelle

Les corps célestes modifient la géométrie de l'espace les entourant de sorte que les géodésiques empruntées par la lumière par exemple ne sont plus des droites. La lumière est ainsi attirée et c'est en mesurant sa déviation lors de l'éclipse de soleil du 29 mai 1919 que la relativité générale fut établie – au moins vis à vis du grand public. Le sujet tomba dans l'oubli et fut ressuscité au milieu des années 1980 lorsque Pacziński proposa d'utiliser l'amplification lumineuse d'étoiles lointaines par effet gravitationnel pour détecter des objets compacts susceptibles de constituer le halo de la Voie Lactée. L'observation d'arcs gravitationnels en direction de certains amas de galaxies permit de sonder leur structure et de mesurer leur masse. L'optique gravitationnelle était née et elle constitue désormais un champ entier de recherche en astronomie extra-galactique.

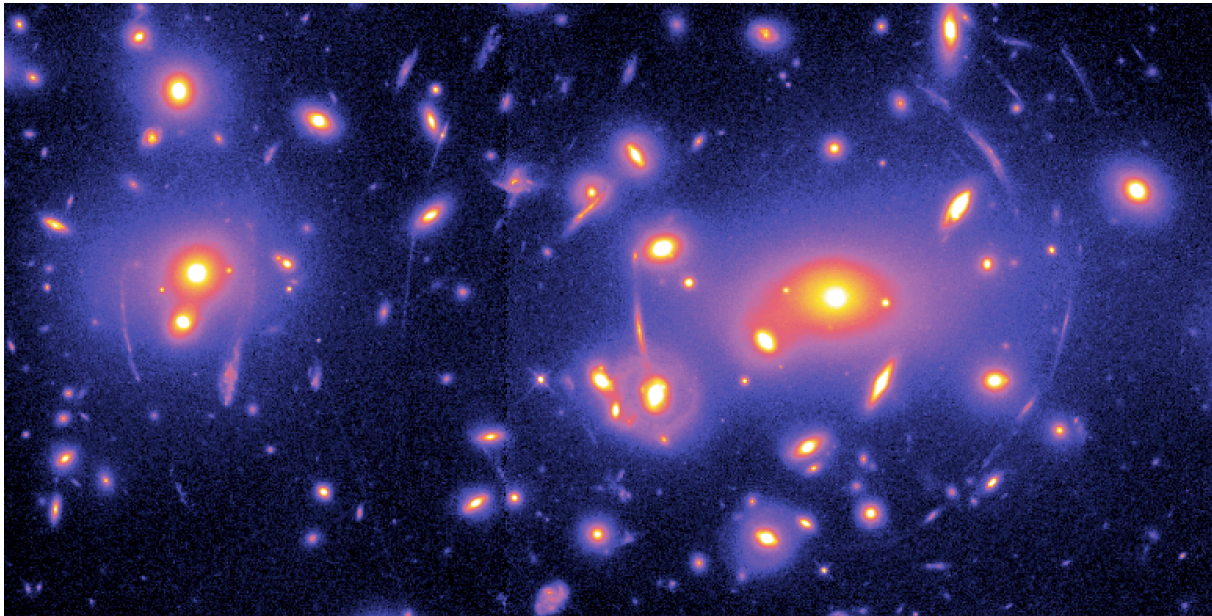


Figure III.1: L'amas de galaxies Abell 2218 est un exemple typique de lentille gravitationnelle qui donne de certains lointains objets d'arrière-plan une image en forme d'arc.

Nous allons tout d'abord étudier la limite de champ faible de la relativité générale et dériverons l'indice optique $n(M)$ gravitationnel. Nous établirons également l'équation décrivant la trajectoire d'un rayon lumineux se propageant au sein d'une distribution de masse en mouvement non-relativiste et développerons une analogie électromagnétique. Nous démontrerons ensuite l'équation des lentilles reliant la position d'une source objet

telle qu'elle apparaît sur le fond du ciel à celles de ses images engendrées par une lentille gravitationnelle mince. En application de nos calculs, nous étudierons l'effet d'une masse ponctuelle encore appelée lentille de Schwarzschild et déterminerons les mirages optiques engendrés par une galaxie dont la distribution de matière est décrite à l'aide du modèle de la sphère isotherme étudié dans un chapitre précédent.

1) L'indice de réfraction gravitationnel.

1.1) La limite de champ gravitationnel faible.

Les mirages que nous étudierons dans ce chapitre sont engendrés par des corps célestes classiques peu denses dont les champs gravitationnels sont faibles. Les puits de potentiel correspondants sont alors associés à des vitesses virialisées ou de libération v non-relativistes. Dans ce cas, il est clair que

$$\Phi \sim \left\{ \frac{v}{c} \right\}^2 \ll 1 . \quad (\text{III.1})$$

Dans cette limite de vitesse faible, le tenseur impulsion-énergie des distributions de matière auxquelles nous nous intéressons s'écrit

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu , \quad (\text{III.2})$$

où ρ désigne la densité de masse et où $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ est la quadri-vitesse. La pression est négligeable puisqu'elle vient comme une correction cinétique en v^2 . Notre source contient des particules dont le champ de vitesse est décrit par $\vec{v}(P, t)$. En fonction de l'échelle considérée, ces particules peuvent être des objets compacts – étoiles à neutrons, naines blanches éteintes ou grosses planètes de type Jupiter – ou bien des galaxies entières constituant un amas. Dans la limite de champ faible, le champ gravitationnel est une perturbation infinitésimale de la métrique plate de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (\text{III.3})$$

où h est petit devant l'unité. Nous allons montrer que la perturbation $h_{\mu\nu}$ est alors reliée à la densité de masse $\rho(P, t)$ ainsi qu'au champ de vitesse $\vec{v}(P, t)$ grâce à

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\Phi \\ h_{0i} &= -4V^i \\ h_{ij} &= 2\delta_{ij}\Phi , \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

où le potentiel scalaire de Newton Φ et le potentiel vecteur \vec{V} que les sources $\rho(P, t)$ et $\vec{v}(P, t)$ engendrent sont définis par

$$\begin{aligned}\Phi(M, t) &= -\frac{G}{c^2} \int_{\text{distribution}} \frac{\rho(P, t')}{r} d\tau_P \\ \vec{V}(M, t) &= -\frac{G}{c^3} \int_{\text{distribution}} \frac{\rho \vec{v}(P, t')}{r} d\tau_P .\end{aligned}\quad (\text{III.5})$$

Les potentiels (III.5) correspondent en réalité à la solution retardée de Lienard et Wiechert des équations d'Einstein au préalable linéarisées. Chaque élément de volume $d\tau_P$ de la source engendre à l'instant t' une contribution à Φ et à \vec{V} qui se propage de P à M à la vitesse de la lumière. Remarquons que nous obtenons bien la composante temps-temps habituelle égale à

$$g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + 2\Phi , \quad (\text{III.6})$$

où Φ désigne dans le cas statique le potentiel newtonien de la gravitation classique.

Problème n° III-1 – Niveau [3] : *A partir du tenseur de Riemann-Christoffel*

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\beta\eta}^{\alpha} , \quad (\text{III.7})$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ désigne la connexion affine

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \{ \partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu} \} , \quad (\text{III.8})$$

montrer que le tenseur de Ricci peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \{ \partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\mu}\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} \} \\ &+ g^{\alpha\beta}g_{ab} \{ \Gamma_{\alpha\beta}^a\Gamma_{\mu\nu}^b - \Gamma_{\alpha\nu}^a\Gamma_{\mu\beta}^b \} .\end{aligned}\quad (\text{III.9})$$

Linéariser le tenseur de Ricci dans la limite de champ faible où h est petit devant 1 afin de montrer que les équations de la relativité générale se simplifient en

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h^{\alpha}_{\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h^{\alpha}_{\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\alpha}_{\alpha} = -16\pi G S_{\mu\nu} . \quad (\text{III.10})$$

Les sources $S_{\mu\nu}$ sont évaluées dans la limite classique d'une métrique exactement plate en sorte que

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda} = \rho \left\{ U_{\mu}U_{\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \right\} . \quad (\text{III.11})$$

Nous avons également négligé les termes en $\mathcal{O}(v^2)$.

Problème n° III-2 – Niveau [2] : *En imposant la condition de jauge des coordonnées harmoniques*

$$\partial_\alpha h^\alpha{}_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha \quad , \quad (\text{III.12})$$

montrer que l'équation de propagation des potentiels gravitationnels $h_{\mu\nu}$ devient

$$\square h_{\mu\nu} = -16 \pi G S_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{III.13})$$

Résoudre cette équation de propagation et dériver les solutions retardées (III.5) de Lienard et Wiechert.

Nous venons d'obtenir la limite Maxwellienne de la relativité générale dans laquelle le champ de gravitation $h_{\mu\nu}$ est un tenseur de rang 2 vivant sur un espace plat et se propageant exactement comme le potentiel vecteur A_μ de l'électromagnétisme.

Les vitesses au sein des systèmes que nous étudions sont non-relativistes. Le temps que met la lumière – ou le champ gravitationnel qu'elle engendre – pour traverser une source est négligeable devant le temps caractéristique d'évolution de cette dernière. La Voie Lactée par exemple effectue une rotation tous les 200 millions d'années alors qu'un photon – ou un graviton – la traverse de part en part en moins de 2×10^5 ans. Dans la mesure où la lumière se propage pratiquement de manière instantanée à travers le système la déviant, nous pouvons donc remplacer t' par t dans les expressions (III.5). A partir de maintenant, nous négligerons de surcroît la dépendance temporelle des potentiels Φ et \vec{V} dans la mesure où la source les engendrant évolue lentement au cours du temps et se comporte essentiellement comme si elle était statique. Nous allons dans ces conditions dériver l'indice optique de réfraction associé à l'effet des potentiels Φ et \vec{V} sur les trajectoires lumineuses.

1.2) L'indice optique gravitationnel et les trajectoires lumineuses.

En écrivant que la propagation d'un rayon lumineux est caractérisée par un intervalle de temps propre $d\tau$ nul, on montre que la lumière parcourt la distance $d\vec{OM} = \vec{e} ds$ en un temps dt donné par

$$dt \simeq (1 - 2\Phi) ds + 4\vec{V} \cdot d\vec{OM} \quad . \quad (\text{III.14})$$

Le potentiel Φ et la vitesse \vec{V} sont des infiniment petits. Les vecteurs ont ici leur signification euclidienne usuelle. En particulier \vec{e} est unitaire et la distance ds entre les points

M et M' est définie par la relation habituelle

$$ds^2 = \delta_{mn} dx^m dx^n = d\vec{O}\vec{M} \cdot d\vec{O}\vec{M} . \quad (\text{III.15})$$

Les trajectoires lumineuses peuvent se concevoir comme des géodésiques au sein d'un

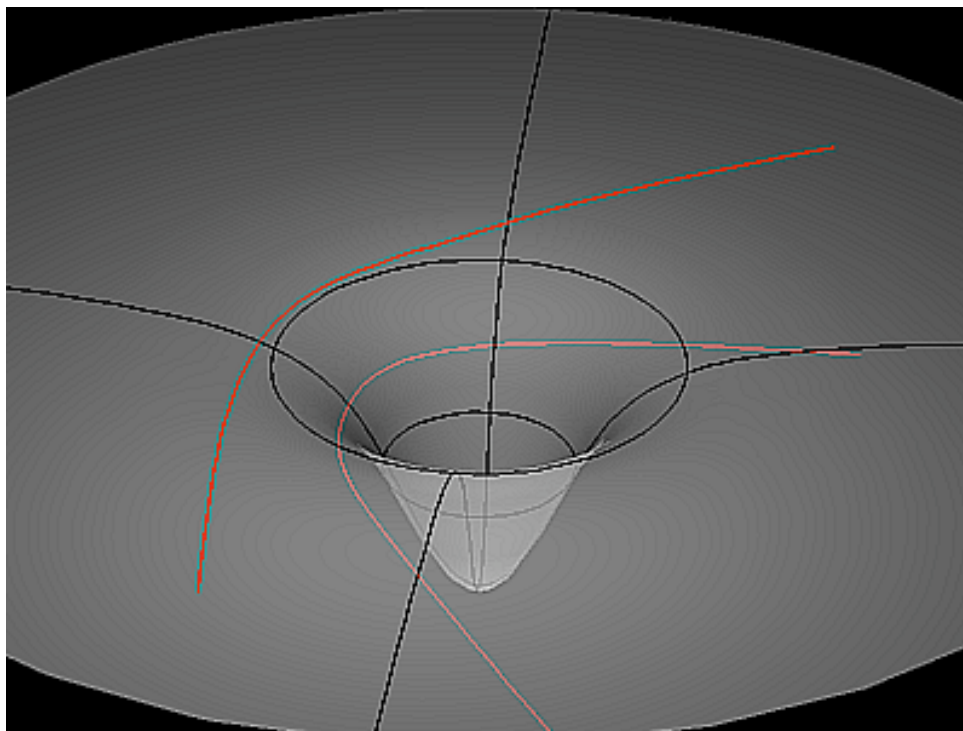


Figure III.2: Un corps céleste courbe l'espace autour de lui en sorte que les trajectoires lumineuses n'y sont plus des droites mais présentent des déviations. Tout se passe comme si l'indice optique de l'espace devenait supérieur à 1 au sein d'un champ de gravitation.

espace courbé par la gravitation. L'image que nous adopterons ici est de considérer que l'espace-temps est plat et que les rayons lumineux ne suivent pas des droites car ils se propagent dans un milieu **inhomogène** d'indice optique $n(M)$ variant avec la position M .

Problème n° III-3 – Niveau [1] : Dans un milieu où la vitesse de la lumière est v , l'indice de réfraction est défini par $n = c/v$. Deriver l'indice optique n associé à la distribution de matière non-relativiste étudiée précédemment

$$n = 1 - 2\Phi + 4\vec{V} \cdot \vec{e} . \quad (\text{III.16})$$

Nous voulons maintenant établir l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux se propageant au sein du champ gravitationnel précédent. La première méthode que je vous propose se fonde sur le principe de **Fermat**. Considérons la vraie trajectoire lumineuse $M(s)$ partant de A pour aboutir en B . L'abscisse curviligne correspondante est dénotée s . Ce chemin est perturbé en courbe $P(s)$ telle que $\vec{MP} = \delta\vec{OM} = \vec{\epsilon}(s)$. Les points de départ A et d'arrivée B restent **inchangés**.

Problème n° III-4 – Niveau [3] : Calculer la variation δt_{AB} du temps de parcours entre A et B au premier ordre en $\vec{\epsilon}$ lorsque l'on passe du **vrai chemin** à la **trajectoire perturbée**. En intégrant par partie, on montrera tout d'abord que

$$\delta t_{AB} = \int_A^B - ds \vec{\epsilon} \cdot \left\{ \frac{d}{ds} (n' \vec{e}) - \vec{\nabla} n' + 4 \frac{d\vec{V}}{ds} \right\} + 4 ds \vec{\epsilon} \cdot \delta\vec{V} \quad , \quad (\text{III.17})$$

où $n' = 1 - 2\Phi$. Le principe de Fermat stipule que le temps de parcours correspondant à la véritable trajectoire suivie par la lumière est stationnaire vis à vis des perturbations de chemin. Etablir alors l'équation éikonale relative à la trajectoire des rayons lumineux

$$(1 - 2\Phi) \frac{d\vec{e}}{ds} = -2 \vec{\nabla}_\perp \Phi + 4 \vec{e} \wedge \text{rot} \vec{V} \quad . \quad (\text{III.18})$$

Le vecteur unitaire \vec{e} est tangent à la **vraie trajectoire** en M . Le gradient $\vec{\nabla}$ peut se scinder en une partie parallèle à la trajectoire et une composante $\vec{\nabla}_\perp$ qui lui est perpendiculaire.

L'exercice précédent est particulièrement difficile. On s'aidera du fait qu'un vecteur \vec{a} constant et un vecteur \vec{V} susceptible de dépendre de la position vérifient les relations

$$\delta (\vec{a} \cdot \vec{V}) = \vec{a} \cdot \delta\vec{V} \quad , \quad (\text{III.19})$$

et

$$\vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{V}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \quad . \quad (\text{III.20})$$

Nous pouvons alors établir que

$$\vec{e} \cdot \delta\vec{V} = \vec{e} \cdot \left\{ \vec{e} \wedge \text{rot} \vec{V} + (\vec{e} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right\} \quad . \quad (\text{III.21})$$

Une autre propriété utile concerne la fonction scalaire f représentant par exemple le potentiel Φ ou une des composantes spatiales du vecteur \vec{V} . La variation de la fonction f autour du point M est donnée par son gradient

$$\delta f = f(P) - f(M) = \delta\vec{OM} \cdot \vec{\nabla} f \quad . \quad (\text{III.22})$$

La variation de f le long de la droite Ms orientée par le vecteur unitaire \vec{e} est donnée par

$$\delta_{\parallel} f = \left(\vec{e} \cdot \vec{\nabla} f \right) ds , \quad (\text{III.23})$$

où $ds = \vec{e} \cdot \delta O\vec{M}$. La projection du gradient le long de la droite Ms peut donc s'écrire

$$\vec{\nabla}_{\parallel} f = \vec{e} \left(\vec{e} \cdot \vec{\nabla} \right) f . \quad (\text{III.24})$$

alors que la composante perpendiculaire du gradient est définie par

$$\vec{\nabla}_{\perp} f = \left\{ \vec{\nabla} - \vec{e} \left(\vec{e} \cdot \vec{\nabla} \right) \right\} f . \quad (\text{III.25})$$

La seconde méthode permettant de dériver l'équation éikonale des rayons lumineux consiste à obtenir directement les géodésiques par une approche variationnelle étudiée en cours de relativité générale. Le Lagrangien correspondant est égal à

$$\mathcal{L} = \frac{d\tau^2}{dp^2} = g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} , \quad (\text{III.26})$$

et les équations usuelles des géodésiques

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{dp} \frac{dx^{\beta}}{dp} = 0 \quad (\text{III.27})$$

s'obtiennent directement à partir des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} . \quad (\text{III.28})$$

Le paramètre p repérant la position du point M le long de la trajectoire lumineuse est ici simplement l'abscisse curviligne s définie à partir de la relation (III.15).

Problème n^o III-5 – Niveau [2] : Etablir l'équation géodésique relative au temps. Les calculs étant développés jusqu'au premier ordre inclus en Φ et \vec{V} , retrouver la relation (III.14).

Problème n^o III-6 – Niveau [3] : Etablir ensuite les équations géodésiques relatives aux coordonnées d'espace et dériver directement la relation (III.18).

L'équation éikonale (III.18) décrivant les trajectoires suivies par la lumière dans un champ de gravitation nous rappelle le mouvement d'une particule chargée au sein d'un champ électromagnétique. Le premier terme dans le membre de droite de (III.18) est l'analogie de la force électrique. Le second terme peut être interprété comme une interaction gravito-magnétique où le rôle du champ magnétique est ici tenu par $\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$. Remarquons que le potentiel vecteur \vec{V} est vraiment défini de la même manière que sa contrepartie magnétique \vec{A} . Considérons en effet une particule de charge q et d'impulsion $\vec{p} = p \vec{e}$ se déplaçant au sein d'un champ électrostatique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ et d'un champ magnétostatique $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. L'équation qui régit sa trajectoire fait intervenir la force de Lorentz

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} . \quad (\text{III.29})$$

Problème n° III-7 – Niveau [1] : Montrer que la projection de la relation précédente perpendiculairement à la trajectoire – donc perpendiculairement au vecteur unitaire tangent \vec{e} – s'écrit

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = -\frac{q}{p} \vec{\nabla}_\perp V + \frac{qv}{p} \vec{e} \wedge \text{rot } \vec{A} . \quad (\text{III.30})$$

Conclure.

Dans la mesure où les sources du champ gravitationnel qui dévie la lumière sont non-relativistes, la contribution gravito-magnétique $\vec{e} \wedge \text{rot } \vec{V}$ dans l'équation éikonale est petite devant le terme électrique $\vec{\nabla}_\perp \Phi$. Dans la limite de champ faible considérée ici, le potentiel vecteur \vec{V} est donc négligeable par rapport à $\Phi \ll 1$ et l'équation régissant la trajectoire des rayons lumineux se simplifie en

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = -2\vec{\nabla}_\perp \Phi . \quad (\text{III.31})$$

2) Equation des lentilles minces.

L'effet d'un champ de gravitation sur la marche des rayons lumineux est donc identique à celui d'un milieu optique inhomogène dont l'indice serait égal à $n' = 1 - 2\Phi$ avec

$$\frac{d}{ds} \{n'\vec{e}\} = \vec{\nabla} n' . \quad (\text{III.32})$$

Les trajectoires lumineuses sont courbées du côté où l'indice n' augmente de manière maximale – donc du côté où le potentiel de gravitation de Newton Φ diminue le plus. Ce

phénomène est susceptible d'engendrer des mirages d'origine gravitationnelle qui sont par ailleurs observés.

Nous aimerions maintenant établir la relation qu'entretient la position d'une source lumineuse avec celles de ses images lorsque les rayons lumineux sont déviés par un déflecteur de faible épaisseur le long de la ligne de visée. Ces positions seront ramenées par commodité au plan du déflecteur bien que la source et ses images soient observées en projection sur le fond du ciel. Cette relation recherchée est **l'équation des lentilles** et permet de construire les images que donne d'une source lumineuse d'arrière plan une distribution de matière que nous supposerons – sans nuire à la généralité de notre étude – mince *.
 Considérons tout d'abord un rayon lumineux qui – en l'absence de toute perturbation gravitationnelle – se propage suivant la ligne droite verticale Az d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$. Le point A est situé en $x = \xi > 0$, $y = 0$ et $z = 0$. On place en O une masse ponctuelle m . La distance minimale d'approche entre la trajectoire lumineuse non-perturbée Az et la masse m est donc égale à $d(OA) = \xi$. En présence du champ gravitationnel engendré par la masse m , le rayon lumineux s'incurve légèrement vers les x négatifs. Initialement, le vecteur unitaire tangent à la trajectoire \vec{e}_{in} s'identifie au vecteur unitaire \vec{e}_z porté par l'axe Oz . Après son interaction avec la masse m , le rayon lumineux pointe selon le vecteur unitaire \vec{e}_{out} .

Problème n° III-8 – Niveau [2] : *En intégrant l'équation de la trajectoire (III.31) le long de la trajectoire non-perturbée Az , montrer que*

$$\vec{\alpha} = \vec{e}_{\text{in}} - \vec{e}_{\text{out}} = \frac{4Gm}{c^2} \frac{\vec{OA}}{\xi^2} . \quad (\text{III.33})$$

*Dans le cas des microlentilles gravitationnelles et des arcs des amas, la lentille est mince dans la mesure où son épaisseur est petite devant les distances en jeu.

Problème n° III-9 – Niveau [1] : En déduire qu'un rayon lumineux effleurant la surface solaire est dévié d'un angle

$$\delta = \frac{4G M_{\odot}}{R_{\odot} c^2} \simeq 1.75 \text{ arcsec} . \quad (\text{III.34})$$

On prendra $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ et $R_{\odot} = 7 \times 10^8 \text{ m}$. L'angle de déviation δ prédit par la relativité générale a été mesuré pour la première fois par deux expéditions lors de l'éclipse totale du 29 mai 1919 et la valeur observée est bien celle donnée par la théorie.

Compliquons un peu le problème en considérant maintenant une distribution statique de matière de masse volumique $\rho(x, y, z)$ et située au voisinage du plan horizontal $z = 0$. En l'absence de champ gravitationnel, le rayon lumineux décrit cette fois l'axe vertical Oz et son vecteur tangent est $\vec{e}_{\text{in}} = \vec{e}_z$. Chaque point P de la source défectrice se comporte comme la masse ponctuelle infinitésimale $dm = \rho(P) d\tau(P)$ où $d\tau(P)$ désigne l'élément de volume l'entourant.

Problème n° III-10 – Niveau [2] : En sommant l'effet de chaque masse élémentaire dm , calculer la variation totale du vecteur \vec{e} en intégrant de nouveau son évolution le long de la trajectoire non-perturbée Oz et montrer que

$$\vec{\alpha} = \vec{e}_{\text{in}} - \vec{e}_{\text{out}} = \frac{4G}{c^2} \int \int dx dy \Sigma(x, y) \frac{\vec{\xi}}{\xi^2} . \quad (\text{III.35})$$

Le vecteur $\vec{\xi}$ est horizontal et pointe de P vers l'axe Oz en sorte que

$$\vec{\xi} = -x \vec{e}_x - y \vec{e}_y . \quad (\text{III.36})$$

La déviation $\vec{\alpha}$ fait intervenir la masse surfacique

$$\Sigma(x, y) = \int \rho(x, y, z) dz , \quad (\text{III.37})$$

donc la projection de la distribution de masse $\rho(x, y, z)$ sur le plan du ciel (Oxy). Nous venons de supposer implicitement que le défecteur – ou lentille – gravitationnel était mince dans la mesure où nous avons sommé les déviations élémentaires $\delta\vec{e}$ suivant la trajectoire

non-perturbée. Si la distribution était étalée suivant Oz , il conviendrait de calculer cette somme le long de la véritable trajectoire. L'erreur que nous commettons est d'autant plus faible que la lentille est mince et tout se passe comme si la distribution à l'origine de la déviation lumineuse était entièrement comprimée sur le plan (Oxy) . La relation (III.35) peut être transposée au cas général où la trajectoire lumineuse non-perturbée est encore verticale mais traverse le plan de la lentille (Oxy) au point A défini par $\vec{OA} = \vec{a}$.

Problème n° III-11 – Niveau [1] : Montrer alors que l'expression (III.35) se met sous la forme

$$\vec{\alpha}(\vec{a}) = \frac{4G}{c^2} \int_{(Oxy)} d^2\xi \Sigma(\vec{\xi}) \frac{(\vec{a} - \vec{\xi})}{\|\vec{a} - \vec{\xi}\|^2} . \quad (\text{III.38})$$

Chaque point M de la lentille mince est repéré par le vecteur $\vec{\xi} = \vec{OM}$ et associé à l'élément de masse $\Sigma(\vec{\xi}) d^2\xi$.

Considérons finalement une lentille gravitationnelle mince associée à une distribution de matière concentrée autour de l'origine O . Un observateur T est situé sur l'axe vertical Oz en $z_T = D_d > 0$. Il observe une étoile E située bien au-delà de la lentille et à proximité de l'axe Oz . Les rayons issus de E et qui atteignent l'observateur T sont donc pratiquement verticaux. C'est pourquoi la distribution de matière défectrice se comporte vis-à-vis de la source et de l'observateur comme une lentille mince dont le plan est (Oxy) . La projection de la source E sur l'axe vertical Oz est le point S situé en $z_S = z_E = -D_{ds} < 0$. En l'absence de tout effet gravitationnel, le rayon issu de E et atteignant l'observateur T irait en droite ligne en traversant le plan de la lentille en I . Le point I correspond donc à la position de la source sur le fond du ciel une fois cette dernière ramenée au plan $z = 0$ du défecteur. En présence de l'effet gravitationnel étudié dans ce chapitre, le rayon issu de E et qui atteint effectivement l'observateur T traverse le plan de la lentille en A . Il subit une déflexion car le vecteur unitaire \vec{e}_{in} porté par le segment de droite EA n'est pas identique au vecteur unitaire \vec{e}_{out} porté par le segment de droite AT . On notera

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= \vec{\eta} && \text{position de l'objet source} \\ \vec{OA} &= \vec{a} && \text{position de son (ses) image(s)} . \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Problème n^o III–12 – Niveau [2] : Faire une figure. En tenant compte du fait que les distances SE , OI et OA sont très petites devant les distances D_d et D_{ds} – limite paraxiale de Gauss – établir que

$$\vec{\eta} = \vec{a} - \frac{D_{ds}D_d}{D_s} \vec{\alpha}(\vec{a}) . \quad (\text{III.40})$$

La distance D_s est égale à la somme $D_d + D_{ds}$.

Nous venons de démontrer l'équation des lentilles minces gravitationnelles qui relie la position d'un objet–source $\vec{\eta}$ à celles de ses images \vec{a} . Ces positions sont ramenées au plan du défecteur. On parle en anglais de mapping entre $\vec{\eta}$ et \vec{a} .

3) Microlentilles gravitationnelles.

Nous avons discuté dans un chapitre précédent du problème de la matière noire dont la nature semble être essentiellement non–baryonique. Or en marge de cette composante importante, la matière noire baryonique – constituée de nucléons – est également présente dans l'univers puisque $\Omega_B \sim 0.05$ est bien supérieur à la contribution visible $\Omega_{\text{lum}} \sim 10^{-3}$. Cette masse baryonique sombre est vraisemblablement constituée de gaz mais aussi d'étoiles obscures à l'instar des naines brunes dont la masse inférieure à $\sim 0.08 M_\odot$ ne permet pas à la température centrale d'atteindre le seuil critique de la fusion d'hydrogène en hélium. L'émission infrarouge des naines brunes est trop faible pour qu'elles soient observées directement. En 1986, l'astronome polonais Paczyński [1] a proposé de détecter de tels objets grâce à l'amplification lumineuse qu'ils sont susceptibles d'engendrer sur des sources ponctuelles lointaines lorsqu'ils viennent s'interposer entre elles et un éventuel observateur. Loin d'écranter la source d'arrière plan, un objet compact dévie ses rayons lumineux en les focalisant vers l'observateur qui dès lors observe une augmentation de luminosité. Nous allons tout d'abord nous intéresser aux mirages gravitationnels engendrés par une source ponctuelle – que l'on dénomme lentille de Schwarzschild – puis présenterons les recherches de microlentilles qui ont permis de sonder la structure du halo de la Voie Lactée.

3.1) La lentille de Schwarzschild.

Considérons à nouveau un observateur T recevant la lumière émanant d'une source E et reprenons la configuration du problème de la page III-12 dans lequel la relation (III.40) a été établie. Un déflecteur ponctuel de masse M est situé au centre O de notre système de coordonnées. La densité surfacique de masse dans le plan (Oxy) de la lentille est simplement donnée par

$$\Sigma(\vec{\xi}) = M \delta^2(\vec{\xi}) . \quad (\text{III.41})$$

Elle engendre la déviation gravitationnelle

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{\vec{a}}{a^2} . \quad (\text{III.42})$$

L'équation des lentilles correspondante à ce déflecteur de Schwarzschild s'en déduit



Figure III.3: Dans le panneau de gauche, ce château d'un parc de Washington D.C. a été photographié à partir du museum d'histoire naturelle. A droite, un trou noir de même masse que Saturne est interposé au milieu de l'allée. En traversant cette lentille de Schwarzschild, l'image du château est fortement distordue – voir le site du Center for Astrophysics <http://cfa-www.harvard.edu/bmcleod/castle.html>.

immédiatement

$$\vec{\eta} = \vec{a} \left\{ 1 - \frac{R_E^2}{a^2} \right\} , \quad (\text{III.43})$$

où le rayon du cercle d'Einstein est défini par

$$R_E^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}D_d}{D_s} . \quad (\text{III.44})$$

Vus dans le ciel en projection sur le plan de la lentille, le déflecteur O , la source d'arrière plan I et ses images A sont tous alignés. Les images A_1 et A_2 sont respectivement situées en dehors et à l'intérieur du cercle d'Einstein.

Problème n° III-13 – Niveau [2] : Montrer que la lentille de Schwarzschild de masse M placée en O donne de la source I située en

$$\vec{OI} = \vec{\eta} = \{\eta > 0\} \vec{e}_x , \quad (\text{III.45})$$

deux images A_1 et A_2 également alignées suivant l'axe Ox et dont les abscisses a_1 et a_2 sont données par

$$a_{1,2} = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4R_E^2}}{2} . \quad (\text{III.46})$$

Lorsque l'alignement entre la source E , la lentille ponctuelle O et l'observateur T est parfait, on serait tenté de conclure hâtivement que l'étoile d'arrière plan est masquée par O venant se placer sur la ligne de visée. En réalité, la source apparaît sous forme d'un cercle centré sur la lentille O – l'anneau d'Einstein – et sa luminosité est amplifiée comme nous allons le démontrer.

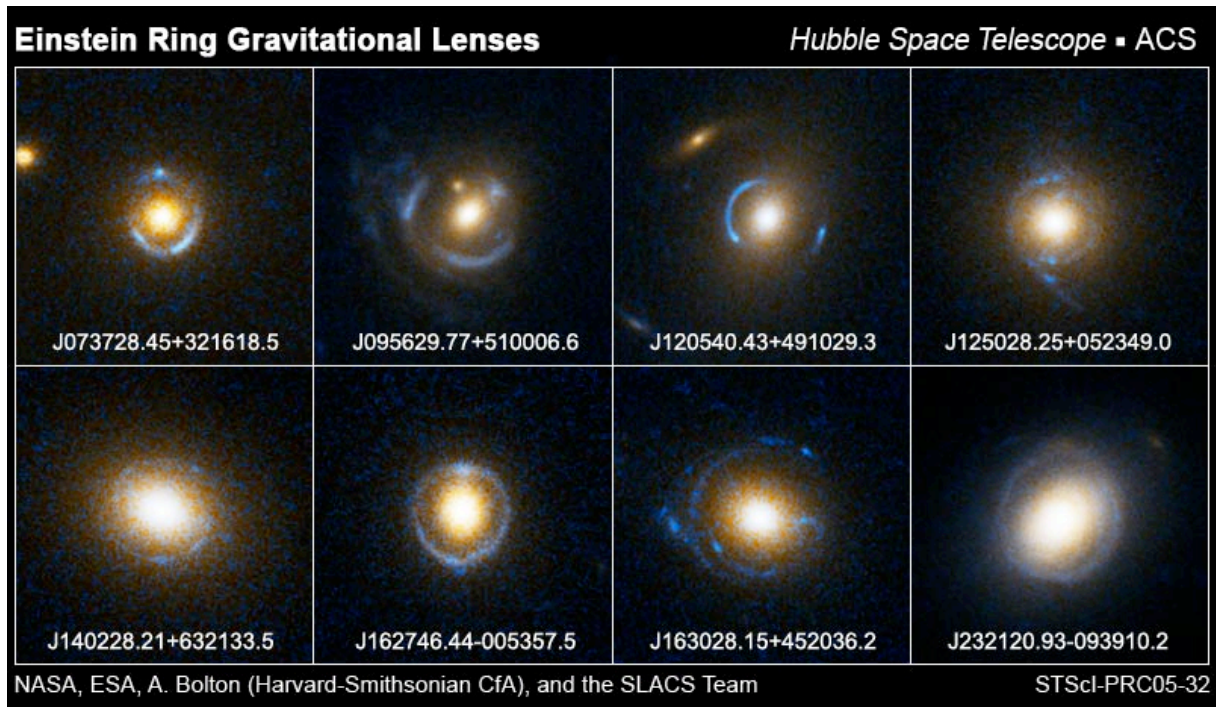


Figure III.4: Ces anneaux d'Einstein ont été photographiés à l'aide du télescope spatial Hubble.

Problème n⁰ III–14 – Niveau [1] : Montrer que dans le cas d’une étoile–source située dans le grand nuage de Magellan – une galaxie irrégulière satellite de la Voie Lactée distante de 52 kiloparsecs de la Terre – le rayon angulaire du cercle d’Einstein engendré par une masse défectrice de $1 M_{\odot}$ s’interposant à mi–chemin vaut ~ 0.4 milliarcsec. Le pouvoir de résolution des meilleurs instruments comme le Hubble Space Telescope atteint 0.1 arcsec. Peut–on observer le cercle d’Einstein ?

Le mirage dû à une lentille de Schwarzschild n’est pas observable et un tel défecteur est dénommé **microlentille gravitationnelle**.

Le problème est pratiquement symétrique lorsqu’on permute l’observateur et la source. Certes, le nouvel axe optique devrait être maintenant la droite EO et non plus l’axe Oz . Certes, le plan de la lentille n’est plus (Oxy) car il doit être désormais perpendiculaire à la droite EO . Cependant, le résultat numérique de l’exercice précédent nous permet de confondre le nouvel axe optique avec l’ancien ainsi que les deux plans lenticulaires. Un point de la source doit donc voir sur le fond du ciel la ou les images A ramenées au plan de la lentille là où n’aurait dû apparaître que l’objet I . Si ce dernier est un télescope, son miroir ou antenne radio parabolique devrait normalement avoir une surface projetée sur le plan de la lentille égale à $d^2\vec{\eta}$. En présence de déviation gravitationnelle, cette surface collectrice est remplacée par celles de ses images et l’on doit dès lors substituer $d^2\vec{a}$ à $d^2\vec{\eta}$.

Problème n⁰ III–15 – Niveau [3] : La source rayonne de manière isotrope. Montrer alors que la quantité d’énergie reçue par le télescope en présence de la lentille gravitationnelle est amplifiée d’un facteur

$$\mathcal{A} = \frac{d^2\vec{a}}{d^2\vec{\eta}} = \mathcal{J} \left(\frac{\partial a^i}{\partial \eta^j} \right) , \quad (\text{III.47})$$

où \mathcal{J} est le Jacobien de la transformation de $\vec{\eta}$ en \vec{a} . En déduire immédiatement que les luminosités surfaciques de la source et de ses images observées maintenant par l’astronome T sont identiques.

Problème n° III-16 – Niveau [2] : Dans le cas de la lentille ponctuelle de Schwarzschild, calculer le facteur \mathcal{A} d'amplification et montrer que

$$\mathcal{A} = \left| \frac{a_1 da_1}{\eta d\eta} \right| + \left| \frac{a_2 da_2}{\eta d\eta} \right|. \quad (\text{III.48})$$

La distance réduite entre la source I et le déflecteur O – toujours en projection sur le plan de la lentille – est définie par $u = \eta/R_E$. Exprimer le facteur d'amplification \mathcal{A} en fonction de u et dériver la relation fondamentale des microlentilles gravitationnelles

$$\mathcal{A} = \frac{u^2 + 2}{u \sqrt{u^2 + 4}}, \quad (\text{III.49})$$

3.2) Recherche d'objets compacts dans le halo galactique.

Chaque fois qu'une source I se retrouve à l'intérieur du cercle d'Einstein d'un déflecteur ponctuel, sa luminosité est amplifiée d'un facteur supérieur à ~ 1.34 – valeur correspondant également à une variation de ~ 0.3 magnitude. L'effet est susceptible d'être observé mais il faut pouvoir distinguer un tel mirage gravitationnel des sautes d'humeur d'une étoile variable. De manière heureuse, l'amplification lumineuse résultant de l'alignement presque parfait d'une étoile–source d'arrière plan avec un objet compact situé sur la ligne de visée présente une signature bien particulière.

- L'augmentation de luminosité est achromatique. Les géodésiques ne dépendent pas de la fréquence du photon qui les parcourt. L'indice optique $n' = 1 - 2\Phi$ en effet n'est fonction que du potentiel de Newton Φ .
- Projeté sur le fond du ciel, l'étoile–source d'arrière plan se déplace le long d'une ligne droite qui passe à proximité de la lentille. L'effet d'amplification est dès lors symétrique dans le temps par rapport à l'instant où la distance u est minimale et où le pic de luminosité est atteint.
- Finalement, les événements dus à des microlentilles gravitationnelles sont tellement rares – comme nous allons le voir – qu'une étoile d'arrière plan ne peut subir d'amplification lumineuse qu'une seule fois. Si une source devient à nouveau plus intense, elle doit être immédiatement cataloguée comme une variable intrinsèque et rejetée comme candidat potentiel à un mirage de Schwarzschild.

Paczynski [1] a proposé en 1986 d'utiliser les microlentilles gravitationnelles afin de sonder le halo de la Voie Lactée et d'y détecter d'éventuels objets compacts, candidats à la matière

noire galactique. La probabilité **statique** τ qu'une quelconque étoile d'arrière plan soit amplifiée et voit sa luminosité varier de plus de 0.3 magnitude revient à calculer le nombre de défecteurs N_{lens} situés le long de la ligne de visée à moins d'un rayon d'Einstein de cette dernière. Cette probabilité est appelée **profondeur optique** et est donnée par l'intégrale

$$\tau \equiv N_{\text{lens}} = \int dx \pi R_E^2 n_{\text{lens}}(x) . \quad (\text{III.50})$$

Problème n° III-17 – Niveau [2] : Montrer que la profondeur optique τ ne dépend que de la masse volumique ρ_{lens} des lentilles le long de la ligne de visée x

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int dx \rho_{\text{lens}}(x) \left\{ \frac{x(D_s - x)}{D_s} \right\} . \quad (\text{III.51})$$

Nous avons vu que le halo de la Voie Lactée pouvait être décrit grâce au modèle de la sphère isotherme. Supposons donc que la densité d'objets compacts – et donc de lentilles potentielles – soit donnée par [†]

$$\rho_{\text{lens}} \sim \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{x^2} . \quad (\text{III.52})$$

Nous venons de remplacer le rayon galactocentrique r par la distance x le long de la ligne de visée à partir de la Terre. En dépit de cette grossière approximation, nous pouvons dériver une estimation relativement correcte de la profondeur optique en direction d'une source lointaine d'arrière plan distante de D_s

$$\tau \sim \frac{V_C^2}{c^2} \left\{ \ln \frac{D_s}{r_\odot} + \frac{r_\odot}{D_s} - 1 \right\} . \quad (\text{III.53})$$

Le petit – SMC – et le grand – LMC – nuages de Magellan contiennent chacun des millions d'étoiles géantes que l'on peut observer et surveiller individuellement. Ces galaxies satellites de la Voie Lactée sont suffisamment éloignées pour que l'on puisse ainsi sonder une bonne partie du halo galactique. Dans le cas du grand nuage de Magellan pour lequel $D_s \simeq 52$ kpc, nous dérivons une profondeur optique égale à

$$\tau \sim 5.2 \times 10^{-7} , \quad (\text{III.54})$$

où nous avons pris une distance $r_\odot = 8.5$ kpc. Des calculs exacts tenant compte de la géométrie réelle du système conduisent à une valeur comparable de 4.5×10^{-7} pour le

[†]Voir la relation (II.12).

LMC et de 6.8×10^{-7} pour le SMC. La durée d'une amplification lumineuse dépend de la vitesse transverse relative v_{\perp} – que l'on peut ramener par commodité au plan de la lentille – entre la source et le défecteur

$$t_{\text{event}} = \frac{R_E}{v_{\perp}} . \quad (\text{III.55})$$

L'étude détaillée de Paczyński a démontré que si le halo galactique était constitué de naines brunes ou de grosses planètes comme Jupiter, un événement–microlentille est attendu chaque année par million d'étoiles d'arrière plan. Au début des années 1990, les collaborations expérimentales EROS [2] – Expérience de Recherche d'Objets Sombres – et MACHO [3] – Massive Compact Halo Objects – ont mis au point une procédure de surveillance automatique des quelques millions d'étoiles bien visibles que comptent les nuages de Magellan. L'expérience acquise auprès des accélérateurs de particules a été très utile pour concevoir les algorithmes de discrimination. Dès 1992, les premiers événements furent découverts. Après une dizaine d'années d'observation, ils sont finalement moins nombreux que ne le prévoyait l'étude initiale de Paczyński. Une vingtaine seulement d'amplifications ont été observées en direction du LMC et les mesures de MACHO [4] par exemple conduisent à une profondeur optique de

$$\tau(\text{LMC}) = \left(1.2 \begin{array}{c} +0.4 \\ -0.3 \end{array} \right) \times 10^{-7} . \quad (\text{III.56})$$

Force est de conclure qu'une fraction seulement du halo de la Voie Lactée est constituée de lentilles de Schwarzschild. Une limite supérieure de $\sim 10\%$ a été obtenue avec un niveau de confiance de 95% sur la contribution d'objets compacts dont la masse va de 5×10^{-7} à $2 \times 10^{-3} M_{\odot}$. Deux événements sont dus à des lentilles binaires. En ce cas, il est possible de dériver la distance et les défecteurs furent localisés non pas dans le halo galactique mais dans les nuages eux-mêmes ! Le petit nuage de Magellan ressemble à un cigare pointant dans notre direction. Pour le grand nuage de Magellan, la possibilité que ses étoiles s'amplifient entre elles a également été étudiée.

En dépit de sa forme irrégulière, le grand nuage de Magellan est en fait une galaxie spirale dont l'axe de rotation pointe vers nous avec un angle de $\xi \simeq 27^{\circ}$. Nous la voyons donc pratiquement de face.

Problème n^o III-18 – Niveau [2] : *Considérons un disque galactique plan infini constitué d'une seule population d'étoiles dont la dispersion de vitesse verticale – dans la direction perpendiculaire Oz à ce plan – est σ . Nous supposons que la distribution stellaire est décrite par la fonction maxwellienne (II.5). La densité de masse stellaire le long de la verticale $0z$ est alors donnée par*

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \exp \left\{ -\frac{\Phi(z)}{\sigma^2} \right\} . \quad (\text{III.57})$$

Résoudre l'équation de Poisson

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 4\pi G \rho \quad (\text{III.58})$$

et montrer que la masse stellaire se distribue suivant la loi

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \cosh^{-2} \left\{ \frac{z}{\sqrt{2} a} \right\} , \quad (\text{III.59})$$

où l'échelle typique a est définie par

$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} . \quad (\text{III.60})$$

Pour un observateur éloigné, la fraction $(D_s - x)/D_s$ qui intervient dans la relation (III.51) peut être remplacée par ~ 1 pourvu que x soit maintenant la distance entre la lentille et la source.

Problème n^o III-19 – Niveau [3] : *Calculer la profondeur optique associé à l'amplification lumineuse gravitationnelle des étoiles d'arrière plan – que l'on prendra toutes en $z = 0$ pour simplifier – par les étoiles du disque situées devant. On remarquera avec profit que la distance x entre source et défecteur est géométriquement donnée par $z/\cos \xi$ et l'on dérivera l'expression*

$$\tau = \frac{2 \ln 2}{\cos^2 \xi} \frac{\sigma^2}{c^2} . \quad (\text{III.61})$$

Gould [5] a calculé en 1995 la profondeur optique exacte associée à **toutes** les sources lumineuses réparties dans l'épaisseur du disque. Son résultat est voisin de notre estimation

précédente puisque

$$\tau = \frac{2}{\cos^2 \xi} \frac{\sigma^2}{c^2} . \quad (\text{III.62})$$

La dispersion de vitesse verticale des géantes rouges du LMC est $\sim 20 \text{ km s}^{-1}$. Nous concluons que la profondeur optique associée à l'auto-amplification gravitationnelle du grand nuage de Magellan n'est que de $\sim 1.1 \times 10^{-8}$ – un ordre de grandeur en dessous des observations. Récemment, un biais a été découvert [6, 7] et la dispersion de vitesse σ pourrait fort bien avoir été sous-estimée d'un facteur ~ 3 . Si ce biais est confirmé, la valeur mesurée de $\tau \simeq 1 - 2 \times 10^{-7}$ trouverait alors son origine uniquement dans l'auto-amplification gravitationnelle des étoiles du LMC sur elles-mêmes. La nature du halo de la Voie Lactée reste finalement mystérieuse.

4) Amas galactiques et mirages gravitationnels.

Un amas galactique comme Abbel 2218 présente un système complexe d'arcs gravitationnels géants ainsi que d'arçlets – petits arcs – plus modestes. Afin d'étudier le mirage gravitationnel qu'un tel système est susceptible d'engendrer, nous remarquerons tout d'abord que son puits de potentiel est généralement dominé par la galaxie elliptique centrale et est alors bien décrit par le modèle de la sphère isotherme étudié précédemment. Nous supposons que la matière est distribuée de manière isotrope autour du centre O de l'amas.

Problème n° III–20 – Niveau [2] : Calculer la masse surfacique $\Sigma(\vec{\xi})$ associée au modèle de la sphère isotherme de vitesse de dispersion σ et dont le profil de densité est donné par la relation (II.12). Montrer que

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \frac{\sigma^2}{2G\xi} . \quad (\text{III.63})$$

La déviation $\vec{\alpha}$ subie par un rayon lumineux traversant le système s'obtient grâce aux relations (III.38) et (III.63)

$$\vec{\alpha}(\vec{a}) = \frac{2\sigma^2}{c^2} \int_{(Oxy)} d^2\xi \frac{1}{\xi} \frac{(\vec{a} - \vec{\xi})}{\|\vec{a} - \vec{\xi}\|^2} . \quad (\text{III.64})$$

Le calcul direct de l'intégrale précédente est certainement difficile. Or, il devient immédiat dès lors que l'on réalise que la situation étudiée ici est analogue à un problème bien connu d'électrostatique. Considérons en effet un fil vertical infini dont la charge électrique par unité de longueur est λ . Ce fil traverse le plan horizontal (Oxy) au point M repéré par le vecteur $\vec{\xi} = \vec{OM}$. Le champ électrique que le fil engendre au point A du plan (Oxy) – point repéré par le vecteur $\vec{a} = \vec{OA}$ – est donné par le théorème de Gauss

$$d\vec{E} \{M \rightarrow A\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{a} - \vec{\xi})}{\|\vec{a} - \vec{\xi}\|^2} . \quad (\text{III.65})$$

Problème n° III–21 – Niveau [3] : La déviation gravitationnelle $\vec{\alpha}$ est analogue au champ électrique engendré par un ensemble de fils verticaux infinis portant chacun la charge $\lambda = \rho_{\text{el}}(\vec{\xi}) d^2\vec{\xi}$ par unité de longueur. Nous sommes en présence d'une distribution cylindrique de charge électrique dont la densité volumique ne dépend que de la distance ξ à l'axe vertical Oz

$$\rho_{\text{el}}(\vec{\xi}) = \frac{4\pi\epsilon_0}{\xi} \frac{\sigma^2}{c^2} . \quad (\text{III.66})$$

En utilisant le théorème de Gauss, montrer rapidement que l'intégrale (III.64) se simplifie trivialement en

$$\vec{\alpha}(\vec{a}) = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} . \quad (\text{III.67})$$

L'équation des lentilles de notre modèle naïf isotherme relie la position $\vec{\eta}$ de la source à celles de ses images \vec{a} en projection sur le plan du déflecteur

$$\vec{\eta} = \vec{a} \left\{ 1 - \frac{R_E}{\|\vec{a}\|} \right\} . \quad (\text{III.68})$$

Il est encore possible de définir un rayon d'Einstein dans le cas d'un amas grâce à

$$R_E = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{ds}D_d}{D_s} . \quad (\text{III.69})$$

Si la source d'arrière plan est une galaxie ou un quasar situé à des distances cosmologiques dont la lumière est défléchiée à mi-chemin par un amas galactique jouant le rôle de lentille, le rayon d'Einstein correspondant est vu par un observateur terrestre sous l'angle

$$\theta_E = 2\pi \frac{\sigma^2}{c^2} . \quad (\text{III.70})$$

Pour des dispersions typiques de vitesse $\sim 500 - 1000 \text{ km s}^{-1}$, nous déduisons un angle $\theta_E \sim 3 - 15 \text{ arcsec}$ tout à fait observable par les télescopes modernes et en particulier par ceux de la classe des 4 à 8 mètres. La source I et ses images A_i sont alignées avec O . Une fois projetées en valeur algébrique sur la ligne radiale joignant O à I , elles satisfont à la relation

$$a - \eta = R_E \frac{a}{|a|} . \quad (\text{III.71})$$

Une solution graphique de cette équation permet de distinguer trois régimes.

- A proximité du centre O de l'amas, la distortion gravitationnelle est si forte qu'elle engendre des images multiples apparaissant sous forme d'arcs géants. Notre modèle naïf de la sphère isotherme prévoit en effet que si la source I se situe **à l'intérieur** du cercle d'Einstein – $\eta < R_E$ – la lentille en donne trois images : A_1 est confondue avec le centre O du déflecteur ($a_1 = 0$), A_2 est à l'intérieur de l'anneau d'Einstein mais du côté opposé à celui de I ($a_2 = \eta - R_E$) alors que la dernière image A_3 se situe à l'extérieur du cercle d'Einstein et au-delà de I ($a_3 = \eta + R_E$). Le seul effet de la lentille est ici de décaler la position radiale des images par rapport à celle de l'objet. Les angles polaires – définis à partir du centre de symétrie O – sont par contre conservés. Il s'ensuit qu'une source étendue en forme de petit disque et proche de O est transformée en arc allongé le long du cercle d'Einstein. Une application importante de l'existence de tels arcs géants est la mesure de la constante de Hubble H_0 grâce à l'observation de l'émission radio des images multiples qu'un amas de galaxies donne d'une même source lointaine. Chaque image est associée à une certaine durée total de trajet entre E et T . La mesure du décalage temporel présenté par l'émission de chaque arc permet d'avoir directement accès à la taille physique du déflecteur et donc à sa distance.

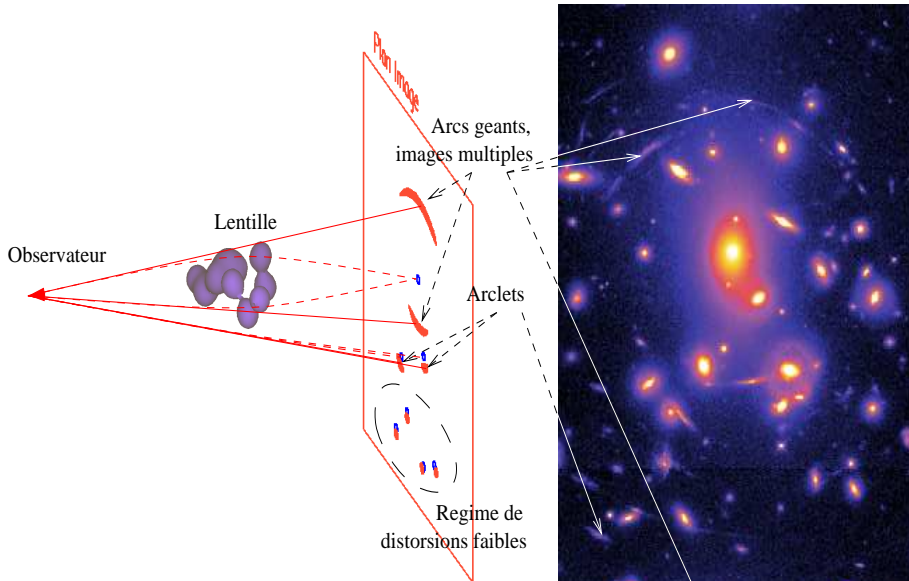
- Lorsque la source I **traverse** l'anneau d'Einstein, les images A_1 et A_2 se confondent pour disparaître dès que $\eta > R_E$. Il ne reste plus que A_3 . Tant que I est proche du cercle d'Einstein, la distortion gravitationnelle est relativement forte et une source étendue est transformée en petit arc : c'est le régime des arclets.

- Finalement, lorsque la source d'arrière plan est **loin** de l'anneau d'Einstein, la distortion de son image A_3 s'atténue au fur et à mesure que $a_3 = \eta + R_E \simeq \eta$ augmente. La source a cependant tendance à apparaître aplatie le long de la direction radiale IO pointant vers le centre de l'amas déflecteur. Cet effet est difficilement observable sur un objet unique dont la morphologie particulière – ellipticité intrinsèque ou orientation sur la ligne de visée – peut tout à fait engendrer un aplatissement en l'absence de toute déflexion gravitationnelle. Il est cependant mesurable statistiquement sur un champ entier de galaxies lointaines dont la corrélation des orientations signale la présence d'une lentille. Ce régime du **weak lensing** permet en effet de remonter à la densité surfacique du déflecteur pro-

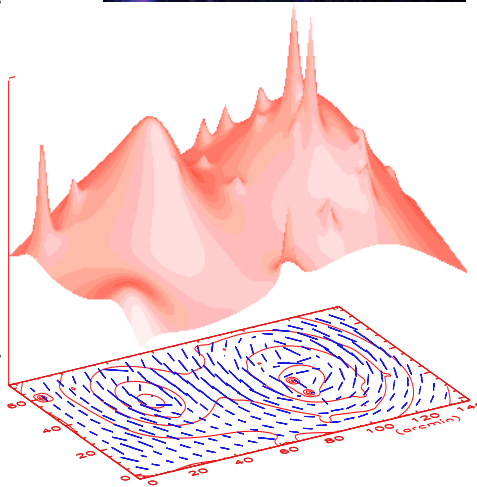
jetée sur le fond du ciel et constitue une sonde de la distribution de matière au sein d'un amas de galaxies.

Encadré 1:

Les différents régimes de distorsion gravitationnelle



On distingue généralement 3 régimes. (1) Près du cœur des amas de galaxies, agissant ici comme déflecteur, l'effet de distorsion peut être critique, et donner lieu à des images multiples qui apparaissent sous forme de grands arcs. (2) Quand les galaxies d'arrière-plan sont légèrement en dehors de la zone critique, la distorsion reste importante mais on n'a plus d'images multiples, c'est le régime dit des arclets. (3) Plus loin, la distorsion est plus ténue; elle n'est plus que de quelques % très loin du centre des amas. C'est le régime de distorsion faible. Cet effet est imperceptible sur un objet unique, mais est détectable par des études statistiques. En effet même si les galaxies d'arrière-plan ont une ellipticité intrinsèque non négligeable (de l'ordre de 30 % en moyenne), celles-ci sont indépendantes les unes des autres. L'effet de distorsion gravitationnelle peut alors être évalué par la mesure de la corrélation résiduelle des orientations. La carte de droite montre une observation profonde de l'amas A2218 où un grand nombre d'arcs et d'arclets sont visibles, et sur la figure du bas, les batonnets en bleu montrent la carte des distorsions faibles. On remarque aisément la cohérence de ce champ de distorsion. On obtient une véritable carte des lignes d'iso-potentiel de l'amas. A partir de ces données il est facile de reconstruire la forme du potentiel de la lentille, et donc la masse projetée de l'amas (figure du bas. Potentiel reconstruit à partir du modèle publié par Kneib et al. 1996).



References

- [1] B. Paczyński, *Astrophys. J.* **304**, 1 (1986).
 - [2] R. Ansari et al. [EROS collaboration], Observational limits on the contribution of substellar and stellar objects to the galactic halo, *Astron. & Astrophys.* **314**, 94 (1996).
 - [3] D. Bennett, Magellanic cloud gravitational microlensing results: What do they mean? *Phys. Rep.* **307**, 97 (1998).
 - [4] C. Alcock et al. [MACHO collaboration], The MACHO projet: Microlensing results from 5.7 years of Large Magellanic Cloud observations, *Astrophys. J.* **542**, 281 (2000).
 - [5] A. Gould, *Astrophys. J.* **441**, 77 (1995).
 - [6] É. Aubourg, N. Palanque-Delabrouille, P. Salati, M. Spiro and R. Taillet, *Astron. & Astrophys.* **347**, 850 (1999).
 - [7] P. Salati, R. Taillet, É. Aubourg, N. Palanque-Delabrouille and M. Spiro, *Astron. & Astrophys.* **350**, L57 (1999).
-

Chapitre IV

Constante cosmologique, quintessence et champ scalaire

L'annonce en 1998 [1] de la découverte d'une constante cosmologique dans les données des supernovae SNeIa a constitué une grande surprise. Les observations se sont améliorées mais notre compréhension théorique de cette composante étonnante n'a pas vraiment progressé. S'agit-il d'une véritable constante cosmologique à l'instar de G , la constante de gravitation universelle ? Sommes-nous plutôt en présence d'une quintessence – fluide de pression négative – dont une incarnation possible prend la forme d'un champ scalaire glissant le long de son potentiel ? Nous allons tout d'abord reprendre les équations du modèle de Friedmann–Lemaître et discuter l'effet d'une éventuelle constante cosmologique sur l'expansion de l'univers. La détermination de la distance de luminosité des supernovae SNeIa en fonction de leur décalage vers le rouge est un test cosmologique important que nous étudierons. Finalement, les propriétés d'un champ scalaire neutre seront présentées et appliquées dans le cadre du modèle de quintessence de Steinhardt, Wang et Zlatev [2].

1) Le bréviaire de l'abbé Lemaître.

L'univers apparaît étonnamment homogène sur des échelles de l'ordre d'une centaine de mégaparsecs. Il semble également isotrope d'où sa description grâce à la métrique de Robertson et Walker

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad (\text{IV.1})$$

qui constitue le cadre géométrique du modèle cosmologique standard de Friedmann et de Lemaître. Plusieurs remarques s'imposent. Tout d'abord, l'intervalle de temps dt qu'une horloge au repos indique est égal à l'intervalle de temps propre $d\tau$. Le système de coordonnées (IV.1) est donc en chute libre – ou plutôt en expansion libre – et le temps cosmologique t se comporte exactement comme si la gravité était absente en vertu du principe d'équivalence. Ensuite, les coordonnées spatiales r , θ et ϕ permettent de repérer la position d'une étoile ou d'une galaxie sur la trame cosmique des coordonnées de Robertson et Walker – trame qui par ailleurs suit l'expansion de l'univers. Ce dernier évolue au gré des variations du facteur d'échelle $a(t)$. Les galaxies s'éloignent les unes des autres essentiellement parce que le réseau cosmique sur lequel elles reposent se dilate lui-même. A tout instant t , le taux d'expansion est défini par

$$H(t) = \frac{d \ln a}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (\text{IV.2})$$

Les coordonnées angulaires θ et ϕ ont leur signification euclidienne usuelle. La métrique de Robertson–Walker se comporte comme dans un espace plat à trois dimensions **vis à vis des petits déplacements perpendiculaires à la ligne de visée radiale**. En particulier, l'énergie que rayonne de manière isotrope une source ponctuelle se répartit sur une sphère dont la surface est toujours donnée par le terme conventionnel $S = 4\pi a^2 r^2$. Remarquons toutefois que le rayon de cette sphère – la distance physique entre son centre O et tout point M de sa surface – n'est égal au produit $a(t) \times r$ que dans un espace plat dont la courbure $k = 0$ – voir Fig. IV.1. Dans ce cas, les surfaces méridiennes obtenues en fixant la longitude ϕ sont également des plans euclidiens. En faisant varier la colatitude θ à r fixé, le point M décrit un cercle méridien du pôle nord N en $\theta = 0$ jusqu'au pôle sud S en $\theta = \pi$. Lorsque la courbure $k > 0$, les surfaces méridiennes ne sont plus planes mais peuvent se concevoir comme les 2D surfaces d'hypersphères 3D s'étendant en direction d'une quatrième dimension spatiale de plongement. L'origine O de notre système de coordonnées devient alors le pôle nord de cette hypersphère. Les points N et S se retrouvent alors sur un cercle parallèle qui entoure le pôle nord O et qui délimite sur l'hypersphère une surface bombée dont l'aire est supérieure à la valeur euclidienne $\pi a^2 r^2$. L'univers a une géométrie sphérique et est fermé puisqu'un voyageur se déplaçant droit devant lui finirait toujours par revenir à son point de départ.

Problème n° IV-1 – Niveau [1] : Interpréter la coordonnée radiale r comme le rayon du cercle parallèle mentionné précédemment et projeté sur le plan équatorial de l'hypersphère. Prendre $a = 1$ et montrer qu'une augmentation dr engendre sur le point M le déplacement

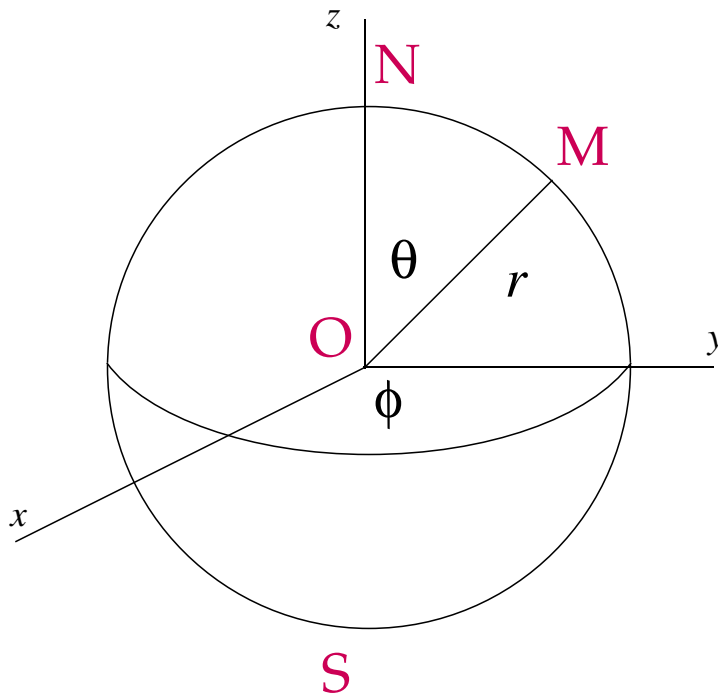
$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (\text{IV.3})$$

Dans le cas hyperbolique où $k < 0$, il n'y a pas de plongement possible dans un espace euclidien de dimension supérieure. La surface englobée par le cercle parallèle est maintenant plus petite que dans le cas plat et chaque point se comporte comme une selle de cheval.

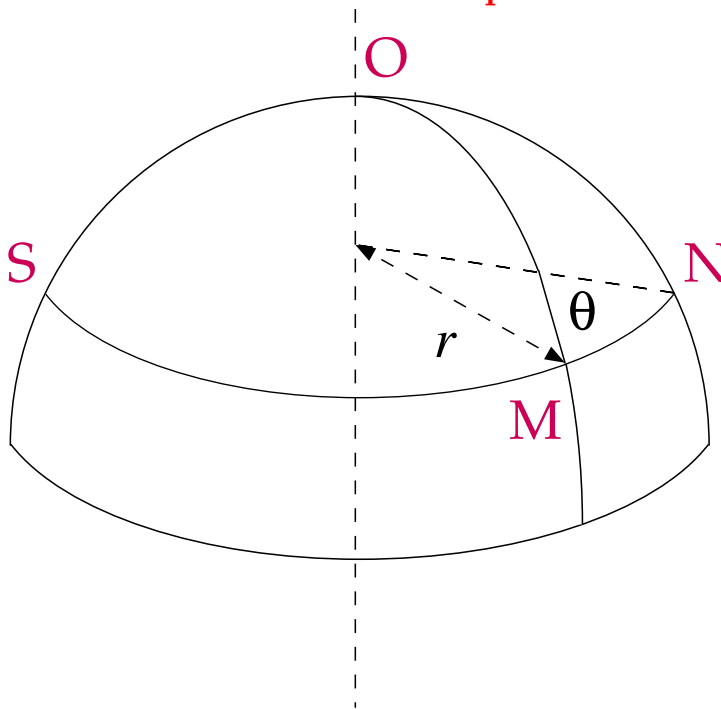
La métrique de Robertson–Walker (IV.1) est associée aux connexions affines

$$\Gamma_{ij}^0 = -H g_{ij} \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = H \delta_j^i , \quad (\text{IV.4})$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = - (1 - kr^2) r \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = - (1 - kr^2) r \sin^2 \theta , \quad (\text{IV.5})$$



L'univers euclidien correspond à $k = 0$.



Le cas sphérique est associé à $k > 0$.

Figure IV.1: Les coordonnées sphériques r , θ et ϕ ont leur signification euclidienne usuelle lorsque l'espace est plat – $k = 0$. En particulier, les surfaces méridiennes définies par une valeur constante de ϕ sont des plans. Lorsque l'univers est sphérique avec $k > 0$, chacun de ces plans méridiens devient la surface d'une hypersphère 3D dont le pôle nord est maintenant l'origine O de notre système de coordonnées.

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} , \quad (\text{IV.6})$$

et

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cotan\theta . \quad (\text{IV.7})$$

Problème n° IV-2 – Niveau [3] : Considérons le Lagrangien effectif construit à partir de l'élément métrique $d\tau^2$

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \quad (\text{IV.8})$$

où $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dp$ est la dérivée de la variable x^μ par rapport au paramètre p qui joue dans ce problème le rôle d'un temps effectif. Montrer que les équations du mouvement associées à \mathcal{L}

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (\text{IV.9})$$

conduisent directement aux géodésiques

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0 . \quad (\text{IV.10})$$

A partir de la métrique de Robertson–Walker, dériver les connexions affines (IV.4), (IV.5), (IV.6) et (IV.7).

Problème n° IV-3 – Niveau [3] : Le tenseur de courbure de Riemann–Christoffel s'exprime en fonction des connexions affines $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ grâce à

$$R_{\mu\beta\nu}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \partial_\beta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\beta\eta}^\alpha , \quad (\text{IV.11})$$

alors que le tenseur de Ricci correspond à la contraction $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$. Montrer que dans le cadre du modèle de Friedmann–Lemaître les seuls éléments non-nuls du tenseur de Ricci sont

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{et} \quad R_{ij} = g_{ij} \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2} \right\} . \quad (\text{IV.12})$$

2) Constante cosmologique et expansion de l'univers.

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'univers décrite par le tenseur de Ricci au tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ de la matière à l'origine du champ gravitationnel

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.13})$$

Einstein a inclus le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ comme une correction aux relations initiales destinée à éviter l'expansion de l'univers. Cette **constante cosmologique** peut être interprétée de deux manières différentes. Tout d'abord, elle peut être introduite comme une constante fondamentale de la Nature au même titre que la constante G de gravitation de Newton. En ce cas, elle doit rester dans le partie gauche de l'équation (IV.13) qui traite de la géométrie de l'espace-temps. La constante Λ a les dimensions de l'inverse d'une longueur au carré L_Λ^{-2} où

$$L_\Lambda = \sqrt{3} h^{-1} \text{Gpc} = 5.3 \times 10^{27} h^{-1} \text{cm} , \quad (\text{IV.14})$$

à comparer avec la valeur de l'échelle de Planck

$$L_P = \left\{ \frac{\hbar G}{c^3} \right\}^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm} . \quad (\text{IV.15})$$

Suivant cette approche, L_P et L_Λ sont toutes deux les échelles fondamentales de la gravitation. L'alternative consiste à interpréter la constante cosmologique comme le tenseur impulsion-énergie d'une composante emplissant l'univers et contribuant à son évolution au même titre que les baryons ou les photons. Le tenseur $\Lambda g_{\mu\nu}$ doit donc apparaître dans le membre de droite de la relation (IV.13) comme une contribution au tenseur impulsion-énergie égale à

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.16})$$

Le tenseur impulsion-énergie d'un fluide de densité d'énergie ρ et de pression P peut s'écrire

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho) U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} , \quad (\text{IV.17})$$

où $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ désigne la 4-vitesse. La constante cosmologique s'interprète dès lors comme un fluide – au repos par rapport aux coordonnées de Robertson et Walker – dont la pression P_Λ et la densité d'énergie ρ_Λ sont reliées par

$$-P_\Lambda = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} . \quad (\text{IV.18})$$

Lorsque $\Lambda > 0$, la densité d'énergie est positive alors que la pression est de manière a priori absurde négative. Pour un fluide réparti uniformément, une telle pression négative engendre un travail de dilatation positif qui a tendance à nourrir l'expansion et donc à

l'accélérer par une phase d'inflation exponentielle. De manière paradoxale également, la pression négative est source de confinement lorsque le fluide est concentré maintenant dans une région limitée de l'espace. Le vieux modèle du sac de quarks du MIT est fondé sur l'existence au sein des nucléons d'une densité d'énergie du vide $B > 0$. La pression associée $P_\Lambda = -B$ est négative et contrebalance la pression cinétique de Fermi des quarks, réalisant ainsi leur confinement. A cause de ces propriétés si bizarres, un tel fluide dont le tenseur impulsion-énergie est donné par la relation (IV.16) est dénommé quintessence ou cinquième élément tant il se comporte à l'opposé de ce que nous connaissons de notre environnement quotidien. Nous verrons ultérieurement qu'un champ scalaire φ fournit un modèle plausible de quintessence.

Nous sommes désormais prêts à dériver les équations du modèle de Friedmann-Lemaître qui décrivent l'expansion de l'univers. Nous supposons ici que le fluide cosmique est associé au tenseur impulsion-énergie donné par l'équation (IV.17) auquel à la fois la matière et la quintessence – ou constante cosmologique – contribuent avec

$$\rho = \rho_M + \rho_\Lambda . \quad (\text{IV.19})$$

La matière est non-relativiste et donc de pression nulle alors que $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Au cours de l'expansion, la matière est diluée et sa densité d'énergie ρ_M décroît comme a^{-3} alors que la constante cosmologique ρ_Λ ne varie pas.

Problème n° IV-4 – Niveau [2] : Dériver l'évolution du facteur d'échelle $a(t)$ à partir du tenseur de Ricci (IV.12) et de la relation (IV.17). Montrer que la composante temps-temps des équations d'Einstein (IV.13) se traduit par

$$\left\{ \frac{\dot{a}}{a} \right\}^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} , \quad (\text{IV.20})$$

alors que les composantes spatiales conduisent à

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \{ \rho + 3P \} . \quad (\text{IV.21})$$

Dans notre système d'unités, la vitesse de la lumière est $c = 1$.

L'évolution de a est complètement déterminée par l'équation fondamentale (IV.20). Aujourd'hui, cette relation s'écrit

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho^0 - \frac{k}{a_0^2} \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_C^0 . \quad (\text{IV.22})$$

Elle permet de définir la densité de fermeture ρ_C^0 comme la valeur critique pour laquelle l'univers est plat et où $k = 0$. La densité actuelle ρ_M^0 de matière peut être exprimée par rapport à cette densité critique ρ_C^0

$$\Omega_M = \rho_M^0 / \rho_C^0 . \quad (\text{IV.23})$$

Il en va de même pour la constante cosmologique

$$\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda / \rho_C^0 . \quad (\text{IV.24})$$

Nous discuterons les différentes évolutions possibles de l'univers en fonction de ces paramètres fondamentaux Ω_M et Ω_Λ qui sont en passe d'être déterminés avec précision grâce à l'observation du fond de rayonnement micro-onde ainsi que par les recherches des supernovae SNeIa. La courbure Ω_K est définie par

$$\Omega_K = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} . \quad (\text{IV.25})$$

L'univers est sphérique si $\Omega_K < 0$. C'est le cas dans la région située au-dessus de la droite $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ dans le diagramme $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ de la figure IV.6. L'évolution du facteur d'échelle $a(t)$ se réduit à un simple problème de mécanique du point matériel le long d'un axe. Il s'agit en fait de déterminer la position $x = a(t)/a_0$ d'une particule se mouvant sur une droite en fonction du temps $\tau = H_0 t$.

Problème n° IV-5 – Niveau [1] : Montrer que la relation (IV.20) peut encore s'écrire sous la forme

$$\dot{x}^2 + V(x) = E , \quad (\text{IV.26})$$

où $\dot{x} = dx/d\tau$ et $E \equiv \Omega_K$. Dériver le potentiel effectif que ressent la particule

$$V(x) = -\frac{\Omega_M}{x} - \Omega_\Lambda x^2 . \quad (\text{IV.27})$$

La relation (IV.26) exprime la conservation de l'énergie mécanique de notre particule fictive. L'évolution de x dépend de la forme du potentiel effectif $V(x)$ et plusieurs cas sont à distinguer en fonction de valeurs de Ω_Λ .

En l'absence de constante cosmologique – $\Omega_\Lambda = 0$ – le potentiel V est képlérien. L'évolution du facteur d'échelle est présentée dans la figure IV.2. Le destin de l'univers dépend du

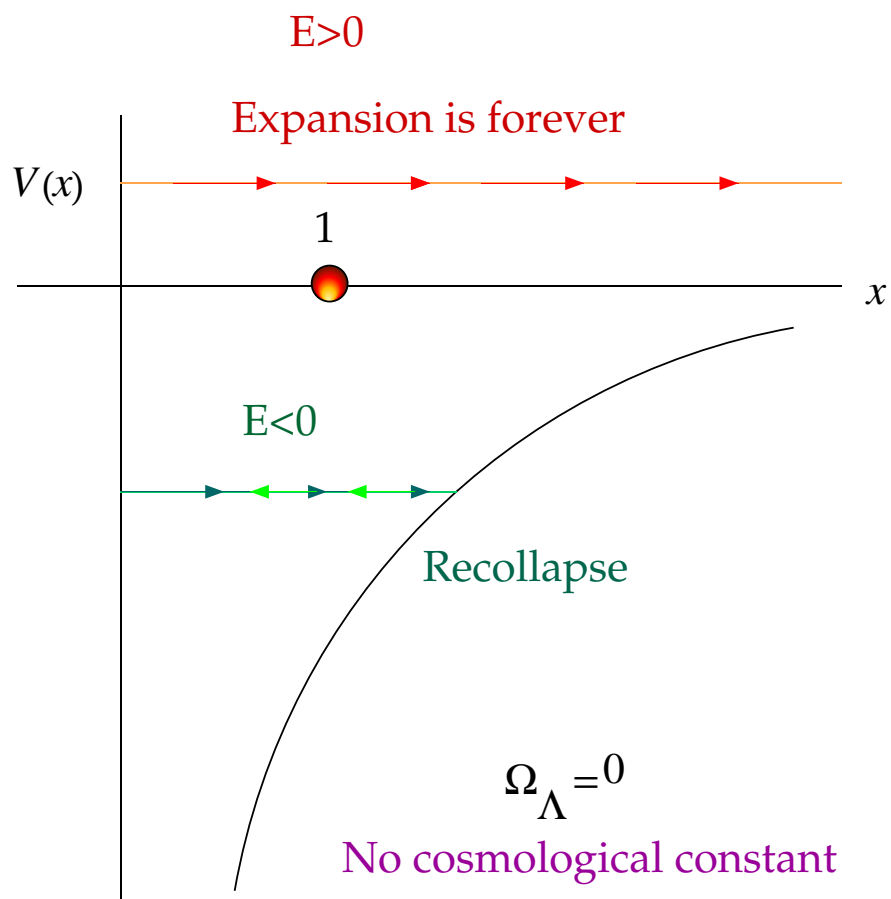


Figure IV.2: Ce cas correspond à une constante cosmologique nulle avec $\Omega_{\Lambda} = 0$. Le sort de l'univers dépend uniquement de son contenu de matière $\Omega_M = 1 - E$. Une valeur négative de E correspond à une trajectoire qui croise V . La particule fictive du texte rebondit en arrière et l'univers se recontracte. Pour $E \geq 0$, l'expansion est éternelle.

signe de Ω_M . Pour $\Omega_M > 1$ et donc $E < 0$, l'univers est sphérique et finira par se recontracter dans le futur. Le facteur d'échelle a évolue en décrivant une cycloïde. Lorsque maintenant $\Omega_M = 1$ soit donc $E = 0$, l'univers est plat et se dilate à jamais. Finalement, pour $\Omega_M < 1$ ou $E > 0$, l'expansion est également éternelle et la géométrie est hyperbolique. Remarquons que par définition Ω_M est positif.

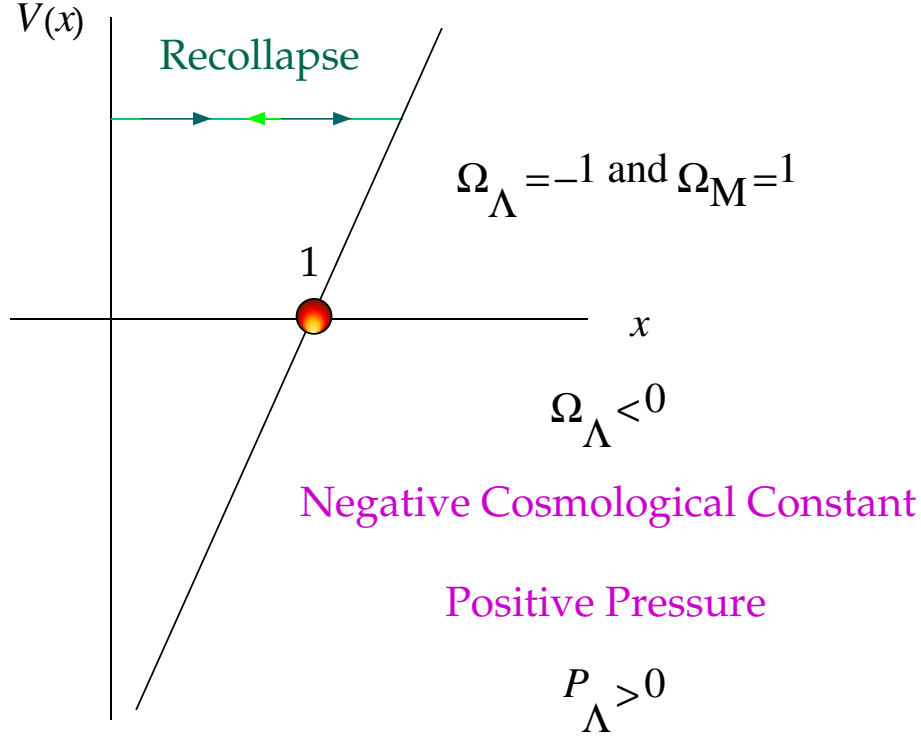


Figure IV.3: Si la constante cosmologique est négative, la pression associée P_Λ est positive et inhibe l'expansion en forçant l'univers à se recontracter après une phase de dilatation.

Lorsque la constante cosmologique est négative, le potentiel fictif V augmente de $-\infty$ pour $x = 0$ jusqu'à $+\infty$ quand x est grand. Quelle que soit la valeur de l'énergie effective E , la trajectoire rebondit sur le potentiel et l'univers se recontracte. Il peut cependant atteindre sa taille actuelle $x = 1$ où $V = E - 1$. Dans le cas de la figure IV.3, les valeurs de Ω_Λ et Ω_M ont été choisies de manière à ce que le potentiel soit nul en $x = 1$ alors que $E = 1$. Pour de fortes valeurs de Ω_M et de $(-\Omega_\Lambda)$, le potentiel $V(x)$ devient terriblement pentu. Le mouvement de notre particule fictive est si rapide que l'âge de l'univers devient inférieur à la limite de ~ 8 Gyr provenant des naines blanches du disque galactique – voir plus loin la discussion de l'équation (IV.35).

Finalement, pour $\Omega_\Lambda > 0$, le potentiel V présente un maximum valant

$$V_{\text{Max}} = -\frac{3}{2^{2/3}} \Omega_M^{2/3} \Omega_\Lambda^{1/3} , \quad (\text{IV.28})$$

Positive Cosmological Constant

$$\Omega_{\Lambda} > 0$$

Negative Pressure

$$P_{\Lambda} < 0$$

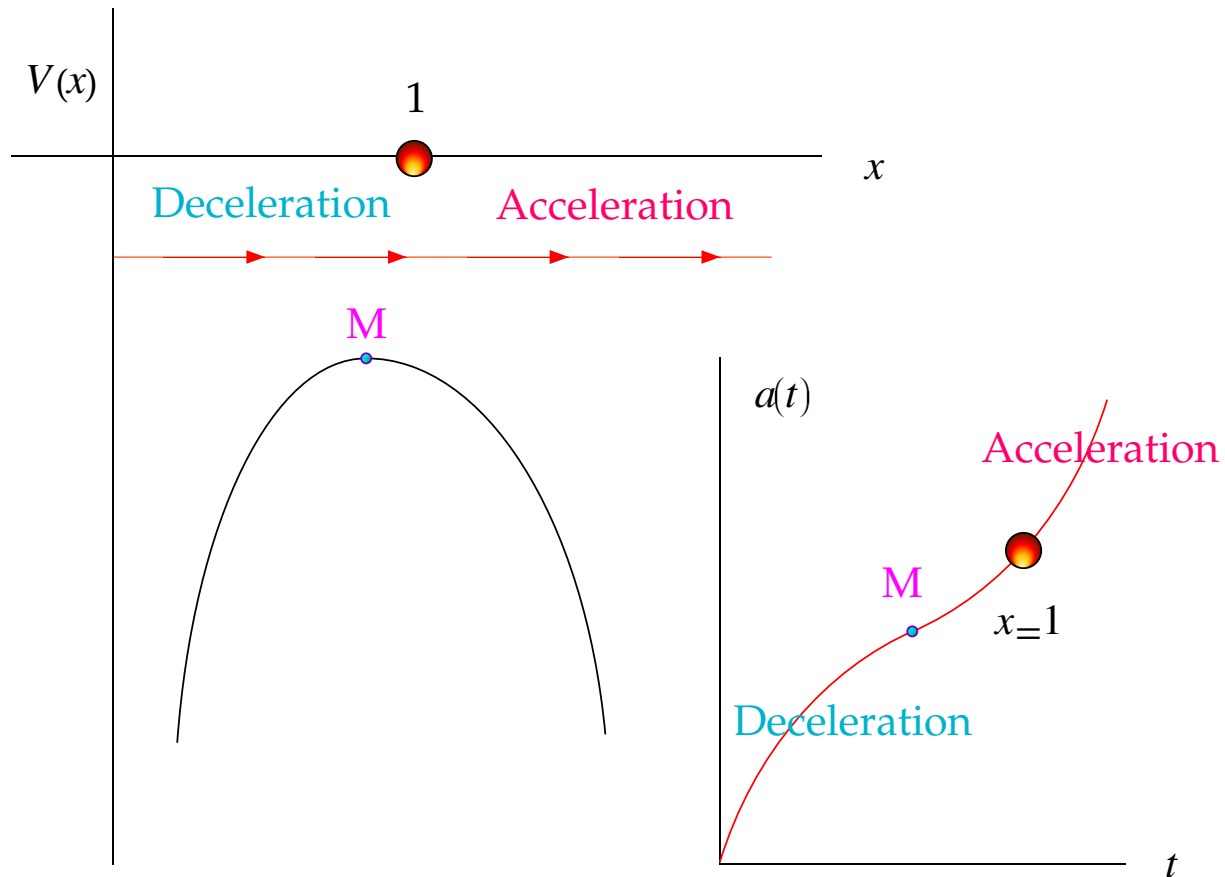


Figure IV.4: Dans le cas d'une constante cosmologique positive, la pression associée négative P_{Λ} est le moteur de l'expansion. Après une période de décélération durant laquelle le sommet M du potentiel effectif est atteint, l'univers bascule de l'autre côté de la colline et se met à dévaler la pente. Suivant ce scénario, nous sommes aujourd'hui en $x = 1$ dans une phase d'accélération avec $\ddot{a} > 0$.

en $x_{\text{Max}} = (\Omega_{\text{M}}/2\Omega_{\Lambda})^{1/3}$. Si l'énergie effective E excède V_{Max} , notre particule représentative grimpe jusqu'au sommet M du potentiel et bascule de l'autre côté. Après une période de décélération correspondant à $x < x_{\text{Max}}$, l'expansion de l'univers se met à s'emballer. Par contre dans le cas où $E < V_{\text{Max}}$, l'univers se recontracte. Cette éventualité correspond à la région située sous la ligne correspondante de la figure IV.6. L'univers est aujourd'hui en phase d'accélération si la condition $x_{\text{Max}} < 1$ est remplie de manière à ce que la particule représentative dévale la pente lorsque $x = 1$. Cela se traduit par $\Omega_{\Lambda} > \Omega_{\text{M}}/2$. Remarquons finalement la présence d'une région grisée dans le coin supérieur gauche de la figure IV.6 avec l'inscription No Big Bang. Dans cette partie du diagramme $(\Omega_{\text{M}}, \Omega_{\Lambda})$, deux conditions contradictoires tentent d'être satisfaites en même temps. D'une part, l'univers doit se recontracter car l'énergie E n'excède pas la valeur maximale V_{Max} du potentiel. D'autre part – parce que cette région grisée est au dessus de la ligne de démarcation $\Omega_{\Lambda} = \Omega_{\text{M}}/2$ – nous devrions être aujourd'hui en phase d'accélération et la position $x = 1$ devrait se trouver de l'autre côté de la colline, une région qui n'est pas atteinte à cause du rebond sur le potentiel. Cette région grisée correspond à une configuration dans laquelle l'univers tel que nous le connaissons ne peut exister.

3) A la recherche des supernovae SNeIa.

Un test cosmologique crucial est la détermination de la relation entre distance de luminosité d_{L} et décalage vers le rouge z de chandelles standards. Dans un espace plat et statique, une source de luminosité absolue L brille à la distance r avec la luminosité apparente l telle que

$$L = 4\pi r^2 l . \quad (\text{IV.29})$$

La même relation est utilisée pour définir d_{L} en cosmologie lorsque l'espace n'est plus euclidien et qu'il se dilate au cours du temps. Considérons une source lointaine – un quasar ou une galaxie – de luminosité absolue L . Cet objet est au repos par rapport à la trame en expansion des coordonnées de Robertson–Walker. Il est situé à la co-distance r_1 de la Terre. La quantité de lumière émise par cette source à l'instant t_1 et pendant l'intervalle de temps δt_1 représente une énergie totale $\delta W_e = L \delta t_1$. Cette énergie est rayonnée de manière isotrope en sorte que lorsqu'elle atteint aujourd'hui la Terre, elle s'est répartie sur une sphère dont la surface est $4\pi r_1^2 a_0^2$. La luminosité apparente l est par définition la quantité d'énergie reçue par unité de temps et par unité de surface d'un télescope. L'énergie δW_e émise par le passé pendant le laps de temps δt_1 est observée maintenant sur la durée plus longue δt_0 donnée par

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = (1 + z) = \frac{a_0}{a_1} . \quad (\text{IV.30})$$

L'espace se dilatant d'un facteur a_0/a_1 , les ondes électromagnétiques sont étirées alors qu'elles se propagent dans le vide intergalactique. Toutes les longueurs d'onde sont alors décalées vers le rouge et la quantité d'énergie qui est collectée à l'arrivée est également réduite du même facteur $(1+z)$. Dans la mesure où la luminosité apparente peut s'écrire

$$l = \left\{ \frac{\delta W_e}{4\pi r_1^2 a_0^2} \right\} \frac{\delta t_1}{\delta t_0} \frac{1}{(1+z)} , \quad (\text{IV.31})$$

nous dérivons une distance de luminosité égale à

$$d_L = r_1 a_0 (1+z) , \quad (\text{IV.32})$$

pour une source située à la co-distance r_1 .

Nous aimerions maintenant établir la relation entre la distance de luminosité d_L d'une source et son décalage vers le rouge z .

Problème n° IV-6 – Niveau [2] : La relation entre le facteur d'échelle réduit $x = a(t)/a_0$ et le décalage vers le rouge – **ou encore redshift** – que présente la lumière émise à l'instant t est précisée dans l'équation (IV.30). En partant des relations (IV.26) et (IV.27), montrer que la variation dz du redshift s'écrit en fonction de dt

$$H_0 dt = \frac{-dz}{(1+z) \sqrt{F(z)}} , \quad (\text{IV.33})$$

où la fonction $F(z)$ est définie par

$$F(z) = (1+z)^2 (1+z \Omega_M) - z(2+z) \Omega_\Lambda . \quad (\text{IV.34})$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer l'âge de l'univers sous la forme d'une intégrale sur le redshift

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = H_0^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{F(z)}} . \quad (\text{IV.35})$$

Si Ω_M augmente ou si Ω_Λ décroît en devenant de plus en plus négatif, la croissance subséquente de la fonction $F(z)$ conduit à des valeurs faibles de l'âge de l'univers. La partie inférieure droite de la figure IV.6 est alors exclue – voir la portion correspondante grisée – car la valeur de t_0 n'y dépasse pas la limite inférieure de 8 Gyr déjà mentionnée.

Un photon émis à l'instant t_1 est reçu aujourd'hui à l'instant t_0 . La co-distance de la source est r_1 . La propagation de la lumière est caractérisée par un intervalle de temps propre $d\tau = 0$ en sorte que

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (\text{IV.36})$$

Problème n° IV-7 – Niveau [1] : Montrer que le membre de droite de l'égalité (IV.36) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(\sqrt{k} r_1) & \quad k > 0 \text{ (spherical)} \\ r_1 & \quad k = 0 \text{ (flat)} \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh^{-1}(\sqrt{-k} r_1) & \quad k < 0 \text{ (hyperbolic)} \end{aligned}$$

Montre ensuite que le membre de gauche de cette égalité (IV.36) se transforme en

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} . \quad (\text{IV.37})$$

Montrer finalement que lorsque l'espace **n'est pas plat**, i.e., pour $k \neq 0$

$$\frac{\sqrt{\pm k}}{a_0 H_0} = \sqrt{|\Omega_K|} . \quad (\text{IV.38})$$

Nous sommes désormais prêts à dériver la relation entre d_L et z . Dans un espace plat, nous pouvons immédiatement affirmer que

$$d_L = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} . \quad (\text{IV.39})$$

Dans le cas d'un univers sphérique ($k > 0$) ou hyperbolique ($k < 0$), le calcul est un zeste moins évident. Il est bon de montrer tout d'abord que

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_K|}} \sqrt{|k|} r_1 , \quad (\text{IV.40})$$

de manière à dériver la relation conventionnelle

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_K|}} \mathcal{S} \left\{ \sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} \right\} , \quad (\text{IV.41})$$

où $\mathcal{S}(x) = \sin x$ pour une géométrie sphérique ($k > 0$) et $\mathcal{S}(x) = \sinh x$ dans le cas d'un univers hyperbolique ($k < 0$). Les paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ entrent en jeu via Ω_K et la fonction $F(z)$. Si nous étendons la définition de $\mathcal{S}(x)$ au cas plat ($k = 0$) avec une valeur égale à x , l'équation (IV.39) s'obtient directement à partir de la relation générale (IV.41) en remarquant que le terme de courbure $\sqrt{|\Omega_K|}$ se simplifie. Nous pouvons appliquer nos calculs au cas où la constante cosmologique est nulle.

Problème n° IV-8 – Niveau [3] : Montrer que lorsque $\Omega_\Lambda = 0$, la distance de luminosité s'exprime en fonction du redshift z grâce à

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{\left\{ q_0 z + (q_0 - 1) \left(-1 + \sqrt{1 + 2 q_0 z} \right) \right\}}{q_0^2}, \quad (\text{IV.42})$$

où le paramètre de décélération $q_0 = \Omega_M / 2$.

La mesure de la relation entre d_L et z permet de déterminer une certaine combinaison des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ .

Problème n° IV-9 – Niveau [1] : Près de la Terre, la relation (IV.41) peut être développée en une série faisant intervenir z . En écrivant la fonction $F(z)$ au premier ordre en z , montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{F(z)}} \simeq 1 + \left\{ \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2} - 1 \right\} z + \dots \quad (\text{IV.43})$$

Lorsque l'argument x est petit, l'égalité $\sin x \simeq x \simeq \sinh x$ est pratiquement vérifiée. Exprimer la distance de luminosité d_L jusqu'au second ordre en z de manière à obtenir

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left\{ z + (1 - q_0) \frac{z^2}{2} + \dots \right\}, \quad (\text{IV.44})$$

où le paramètre q_0 est maintenant égale à la combinaison $\Omega_M / 2 - \Omega_\Lambda$.

Parce que les mesures vont au-delà de notre voisinage immédiat – des valeurs du redshift allant jusqu'à $z \sim 0.8$ sont obtenues – la bonne combinaison de paramètres qui entre en jeu dans notre problème est plutôt $(\Omega_M - \Omega_\Lambda)$. Dans le panneau supérieur de la figure IV.5,

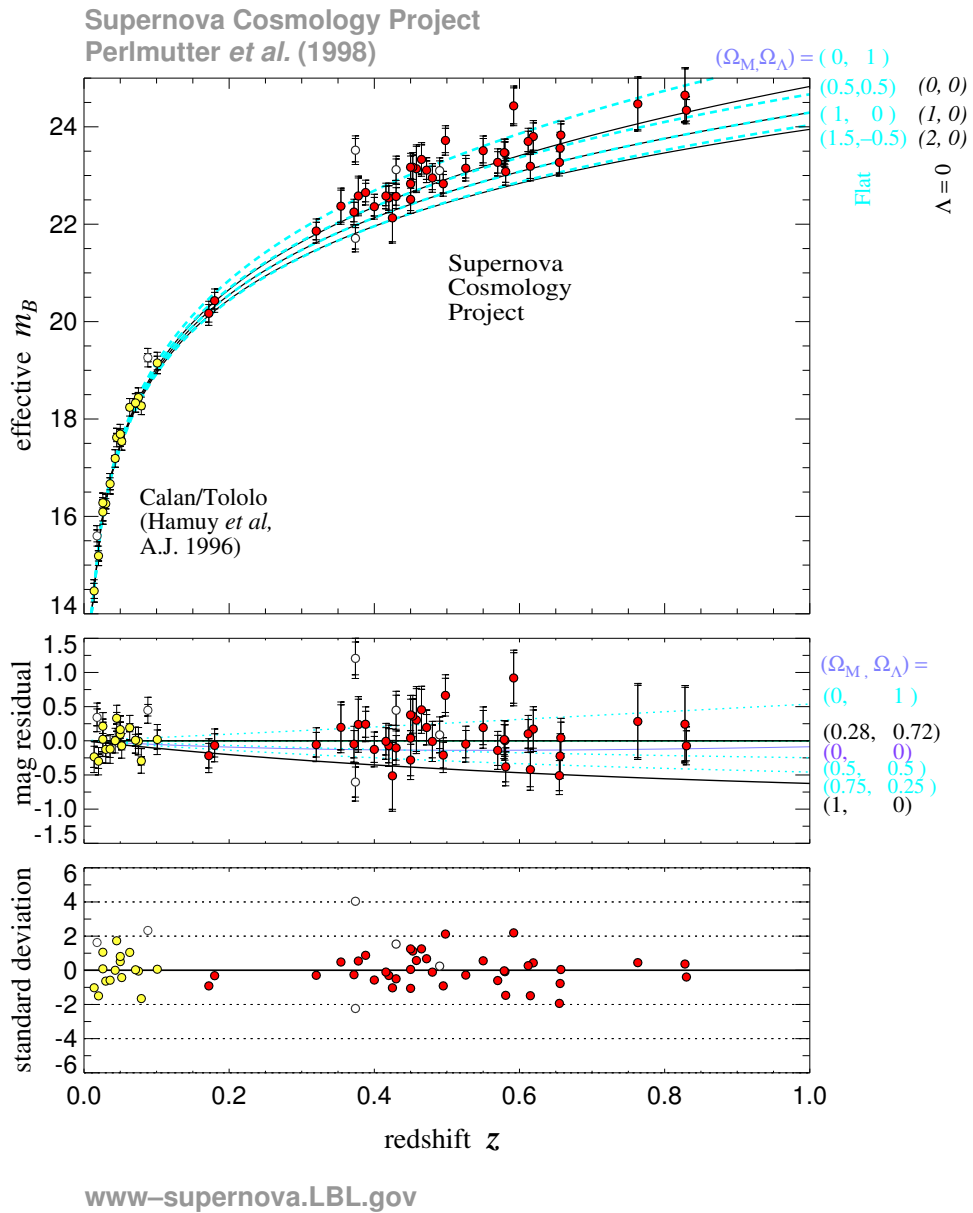


Figure IV.5: La magnitude apparente de deux échantillons de supernovae SNeIa est présentée en fonction du décalage vers le rouge des objets. Le groupe en jaune correspond à des sources locales alors que les points rouges se réfèrent à des supernovae lointaines situées à des distances cosmologiques [1].

la dégénérescence est manifeste pour $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.5, 0.5)$ et $(0, 0)$ ainsi que pour les cas $(1.5, -0.5)$ et $(2, 0)$.

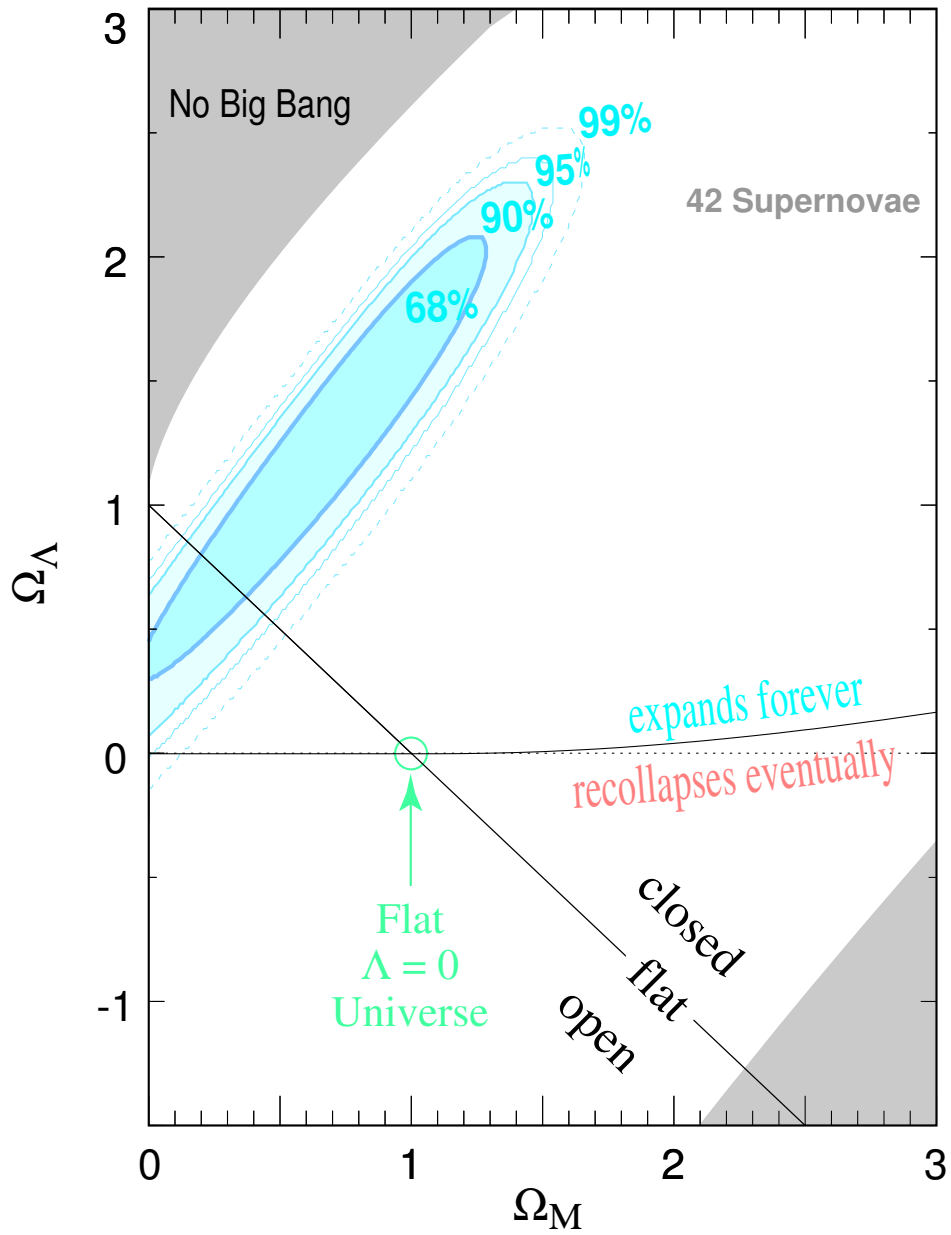
La détermination de la distance d_L requiert la mesure de la luminosité apparente l ainsi que la connaissance de la luminosité absolue L . Il faut donc choisir une classe d'objets qui émettent toujours la même quantité d'énergie. De telles sources s'appellent des **chandelles standards** et leurs caractéristiques – magnitude absolue, durée d'émission et spectre – sont supposées être indépendantes de l'espace et du temps. Les supernovae SNeIa sont des étoiles naines blanches qui accrètent le gaz contenu dans l'enveloppe stellaire étendue d'un compagnon. Lorsque la masse de la naine blanche atteint le seuil fatidique de Chandrasekhar – soit $\sim 1.4 M_\odot$ – les électrons qui assurent la pressurisation de l'astre deviennent ultra-relativistes et l'indice adiabatique Γ_1 du matériau interne passe en dessous de la valeur critique $4/3$. L'équilibre hydrostatique de la naine blanche devient alors instable et son coeur s'effondre. Densité et température augmentent très rapidement jusqu'à ce que le carbone et l'oxygène entrent en fusion thermonucléaire. Dans les conditions dégénérées qui règnent au centre de l'étoile, la pression dépend peu de la température et cette dernière n'étant plus régulée par la gravité, la réaction s'emballe et devient explosive. Une onde de choc et de combustion se propage alors à travers l'étoile à des vitesses subsoniques. Les simulations numériques semblent indiquer en effet qu'une telle déflagration du carbone est plus à même d'expliquer la courbe de lumière et les abondances finales mesurées qu'une détonation supersonique qui produirait presque exclusivement du fer. Puisque la masse qui fusionne est toujours donnée par la valeur critique de Chandrasekhar, on s'attend à ce que les supernovae SNeIa soient de bonnes chandelles standards. Pendant l'explosion, la luminosité de pic atteint $10^{10} L_\odot$. La supernova devient aussi brillante que la galaxie hôte qui l'abrite et elle est alors visible jusqu'à des distances cosmologiques. Située à $z = 0.4$, elle est en effet détectable en 10 minutes sur un télescope de 2.5 m de diamètre. L'événement dure un mois environ. La détection des supernovae cosmologiques est possible en surveillant en permanence des galaxies lointaines et en comparant les images collectées jour après jour.

L'observation permet de déterminer la magnitude apparente m ainsi que le redshift z des sources. La relation entre d_L et z permet d'atteindre les paramètres cosmologiques tout en s'affranchissant de notre méconnaissance de la constante de Hubble H_0 . La relation (IV.41) peut en effet s'écrire

$$d_L = \frac{c}{H_0} \mathcal{G} \{z, \Omega_M, \Omega_\Lambda\} \quad , \quad (\text{IV.45})$$

où la fonction \mathcal{G} ne dépend que du redshift z et des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ .

Supernova Cosmology Project
Perlmutter *et al.* (1998)



Ap.J.
astro-ph/9812133

Figure IV.6: Implications des observations des supernovae sur les valeurs des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ [1].

Pour de petits décalages vers le rouge, cette expression se simplifie en

$$\mathcal{G} \{z, \Omega_M, \Omega_\Lambda\} \simeq z + \left\{ \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2} + 1 \right\} \frac{z^2}{2} . \quad (\text{IV.46})$$

La magnitude apparente m est définie à partir de la luminosité l via

$$m = -2.5 \lg_{10} l + C , \quad (\text{IV.47})$$

où C est une constante. La magnitude absolue M correspond à la valeur qu'aurait m si l'on plaçait la source à la distance canonique de 10 pc. Magnitudes absolue M et apparente m sont donc liées par

$$m - M = 5 \lg_{10} d_L - 5 , \quad (\text{IV.48})$$

où la distance de luminosité d_L est exprimée en parsecs [pc].

Problème n° IV-10 – Niveau [1] : Montrer que la magnitude apparente s'exprime comme la somme

$$m = 5 \lg_{10} \{\mathcal{G}\} + M + 5 \lg_{10} \left\{ \frac{c}{H_0} (10 \text{ Gpc})^{-1} \right\} + 45 . \quad (\text{IV.49})$$

Le premier terme dans le membre de droite de l'équation (IV.49) n'est fonction que du redshift z et des paramètres cosmologiques Ω_M et Ω_Λ . Les autres contributions se comportent comme la magnitude effective constante

$$\mathcal{M} = M + 5 \lg_{10} \left\{ \frac{c}{H_0} (10 \text{ Gpc})^{-1} \right\} + 45 , \quad (\text{IV.50})$$

qui dépend à la fois de la magnitude absolue M de la classe de chandelles standards choisie et de la constante de Hubble H_0 . Les recherches de supernovae locales permettent de calibrer leur luminosité absolue M – voir les points jaunes dans les mesures de la figure IV.5. La distance des objets proches peut être déterminée grâce à d'autres estimateurs. Puisque dans notre voisinage immédiat la relation m - z se simplifie en

$$m = 5 \lg_{10} z + \mathcal{M} , \quad (\text{IV.51})$$

la magnitude \mathcal{M} peut être mesurée. L'analyse d'un échantillon de supernovae proches permet donc d'atteindre leur magnitude absolue M et ainsi la constante de Hubble H_0 . Fort

heureusement, ces difficultés n’affectent en rien la détermination d’un éventuel écart entre le comportement de la magnitude apparente m et la loi en $\lg_{10} z$ susceptible d’apparaître à haut redshift. Aux distances cosmologiques, la relation (IV.51) devient

$$m = \mathcal{M} + 5 \lg_{10} z + 5 \lg_{10} \left\{ 1 + \left(\Omega_{\Lambda} - \frac{\Omega_{\text{M}}}{2} + 1 \right) \frac{z}{2} + \dots \right\} . \quad (\text{IV.52})$$

Le second groupe de points rouges de la figure IV.5 est constitué de supernovae lointaines dont le redshift est $z \sim 0.4 - 0.8$. Dans cette région, les paramètres Ω_{M} et Ω_{Λ} entrent en jeu dans la courbe reliant d_{L} à z . Nous avons précédemment montré que l’observation des supernovae contraignait la différence $\Omega_{\Lambda} - \Omega_{\text{M}}$. C’est pourquoi la région bleue permise par les mesures du Supernova Cosmology Project Collaboration – voir figure IV.6 – a cette forme oblongue si caractéristique. La collaboration High- z supernova search team obtient $\Omega_{\text{M}} (\Lambda = 0) = -0.35 \pm 0.18$ et $\Omega_{\text{M}} (\Omega_{\text{K}} = 0) = 0.24 \pm 0.1$ alors que le Supernova Cosmology Project mesure [1] $1.3 \Omega_{\text{M}} - \Omega_{\Lambda} \simeq -0.4 \pm 0.2$ et

$$\Omega_{\text{M}} (\Omega_{\text{K}} = 0) = 0.28 \begin{array}{l} +0.08 \\ -0.09 \end{array} \text{ (stat)} \begin{array}{l} +0.05 \\ -0.04 \end{array} \text{ (syst)} . \quad (\text{IV.53})$$

Un univers plat uniquement constitué de matière – $\Omega_{\text{M}} = 1$ et $\Omega_{\Lambda} = 0$ – est fortement exclu. L’observation à 3σ d’une valeur positive pour Ω_{Λ} est très excitante et constitue un défi à notre entendement car une telle composante n’a pas été prédite. Les observations de WMAP confortent le modèle d’un univers plat contenant $\sim 30\%$ de matière ainsi que $\sim 70\%$ d’une composante complètement inconnue se comportant comme une constante cosmologique ou un fluide de quintessence. Cette énergie noire serait ainsi la source principale de gravité au niveau cosmologique.

4) Le modèle du champ scalaire.

Les observations précédentes combinées aux données de WMAP sur le fond de rayonnement micro-onde indiquent que l’univers est essentiellement constitué d’une composante dont l’équation d’état

$$P_Q = w_Q \rho_Q \quad (\text{IV.54})$$

est associée à une valeur w_Q du rapport pression-sur-densité **négative**. Un tel gaz ne fait pas partie de notre environnement quotidien. Une détente adiabatique a tendance par exemple à le réchauffer plutôt qu’à le refroidir. Ce fluide aux propriétés étonnantes est dénommé **quintessence** – essence quinte ou encore cinquième élément. Si $w_Q = -1$, nous sommes en présence d’une pure constante cosmologique. Si w_Q varie dans le temps et prend aujourd’hui une valeur négative, nous parlerons plutôt de quintessence.

Un champ scalaire neutre φ de spin 0 fournit un excellent modèle à la quintessence dans la mesure où sa pression est susceptible d'être négative. Ce champ est associé au Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) , \quad (\text{IV.55})$$

dans lequel le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ joue un rôle central. Le potentiel $V(\varphi)$ est une fonction du champ. A partir de l'action associée

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{g(x)} d^4x \mathcal{L} \{ \varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) \} , \quad (\text{IV.56})$$

nous allons dériver ici l'équation de Klein–Gordon qui régit le comportement du champ φ ainsi que le tenseur impulsion–énergie associé.

4.1) Equation de Klein–Gordon.

L'équation du mouvement s'obtient en imposant que l'action soit invariante par rapport à toute perturbation $\delta\varphi$ du champ.

Problème n⁰ IV–11 – Niveau [2] : Montrer que lorsque le champ scalaire est perturbé de $\delta\varphi$, la variation induite sur l'action \mathcal{S} est donnée par

$$\delta\mathcal{S} = - \int \sqrt{g(x)} d^4x \delta\varphi \left\{ \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \partial_\mu \left\{ \sqrt{g(x)} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right\} + \frac{dV}{d\varphi} \right\} . \quad (\text{IV.57})$$

En imposant que l'action \mathcal{S} soit invariante au premier ordre de la perturbation $\delta\varphi$ du champ – principe de moindre action – dériver l'équation de Klein–Gordon que l'on exprimera à l'aide des dérivées covariantes D_μ

$$\square \varphi + \frac{dV}{d\varphi} = D_\mu \{ g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 . \quad (\text{IV.58})$$

Problème n⁰ IV–12 – Niveau [1] : Dans le modèle cosmologique standard de Friedmann–Lemaître – avec la métrique de Robertson–Walker – montrer qu'un champ scalaire $\varphi(t)$ homogène et dépendant du temps vérifie la relation

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 . \quad (\text{IV.59})$$

L'évolution de φ dans le temps est donc analogue au mouvement d'un point matériel de masse unité astreint à se déplacer sur la droite $O\varphi$ et soumis d'une part à la force $-\partial V/\partial\varphi$ dérivant du potentiel V et d'autre part à une force de friction visqueuse $-3H\dot{\varphi}$ dont le coefficient de frottement est $3H$.

4.2) Tenseur impulsion-énergie.

Le tenseur impulsion-énergie $T^{\mu\nu}$ s'obtient également à partir de l'action \mathcal{S} .

Problème n° IV-13 – Niveau [2] : Il s'agit maintenant de calculer la variation $\delta\mathcal{S}$ de l'action du champ scalaire φ sous l'action d'une perturbation $\delta g_{\mu\nu}$ de la métrique. Montrer tout d'abord que

$$\delta\mathcal{S} = \int \delta\sqrt{g(x)} d^4x \mathcal{L} + \int \sqrt{g(x)} d^4x \frac{\delta g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi . \quad (\text{IV.60})$$

En utilisant avec profit le fait que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} , \quad (\text{IV.61})$$

ainsi que

$$\delta \ln \sqrt{g(x)} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} , \quad (\text{IV.62})$$

exprimer la variation de l'action sous la forme

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{g(x)} d^4x \delta g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} , \quad (\text{IV.63})$$

où le tenseur énergie-impulsion est défini par

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi \partial_\beta\varphi - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} . \quad (\text{IV.64})$$

Dans le cadre du modèle standard cosmologique isotrope et homogène, il est naturel de considérer un champ scalaire $\varphi(t)$ ne dépendant que du temps. En ce cas, les composantes correspondantes du tenseur impulsion-énergie sont données par

$$\rho_\varphi \equiv T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (\text{IV.65})$$

pour la composante temporelle et par

$$T_{ij} = -P_\varphi g_{ij} \quad \text{avec} \quad P_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (\text{IV.66})$$

pour les composantes spatiales. La dérivée temporelle de φ est notée $\dot{\varphi}$. Le champ scalaire se comporte dès lors comme un fluide dont la densité ρ_φ et la pression P_φ sont reliées par l'équation d'état

$$w_\varphi = \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2/2 - V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2/2 + V(\varphi)} . \quad (\text{IV.67})$$

Suivant les valeurs respectives du terme cinétique $\dot{\varphi}^2/2$ et du potentiel scalaire $V(\varphi)$, toutes les valeurs de w_φ sont possibles dans l'intervalle allant de -1 à $+1$. Si le potentiel l'emporte, le champ scalaire se comporte comme une constante cosmologique avec $w_\varphi \sim -1$.

Problème n⁰ IV-14 – Niveau [1] : Nous allons relier l'équation de Klein–Gordon – que l'on multipliera par le facteur $a^3 \dot{\varphi}$ – à la conservation de l'impulsion–énergie dans le cas simple du champ scalaire cosmologique $\varphi(t)$. A partir de l'égalité

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 , \quad (\text{IV.68})$$

montrer que

$$\frac{d}{dt} \{a^3 \rho_\varphi\} = -P_\varphi \frac{da^3}{dt} . \quad (\text{IV.69})$$

Interpréter la dernière relation dans laquelle $a(t)$ dénote le facteur d'échelle de l'univers.

La propriété dont nous venons de démontrer une illustration est générale. Il est possible en effet de relier l'équation du mouvement à la conservation de l'impulsion–énergie. A cet effet, substituons aux coordonnées générales x^μ le système de référence y^μ . L'action \mathcal{S} devient

$$\mathcal{S}' = \int \sqrt{g'(y)} d^4y \left\{ \frac{1}{2} g'^{\mu\nu}(y) \frac{\partial \varphi'}{\partial y^\mu} \frac{\partial \varphi'}{\partial y^\nu} - V(\varphi') \right\} . \quad (\text{IV.70})$$

Problème n⁰ IV-15 – Niveau [1] : Justifier l'invariance de l'action sous n'importe quel changement de système de coordonnées et montrer alors que $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}$.

L'action \mathcal{S}' peut s'exprimer comme l'intégrale (IV.70) sur la variable muette y que nous décidons de noter à partir de maintenant x en sorte que

$$\mathcal{S}' = \int \sqrt{g'(x)} d^4x \left\{ \frac{1}{2} g'^{\mu\nu}(x) \frac{\partial \varphi'}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi'}{\partial x^\nu} - V(\varphi') \right\} . \quad (\text{IV.71})$$

Sous le changement infinitésimal de coordonnées $x^\mu \rightarrow y^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ subit la variation

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) , \quad (\text{IV.72})$$

alors que le champ scalaire est transformé en

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x) . \quad (\text{IV.73})$$

Problème n° IV-16 – Niveau [3] : Montrer que ces deux perturbations peuvent se mettre sous la forme

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -D_\mu \epsilon_\nu - D_\nu \epsilon_\mu , \quad (\text{IV.74})$$

et

$$\delta\varphi(x) = -\epsilon^\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi = -\epsilon_\alpha \{g^{\alpha\mu} \partial_\mu \varphi \equiv \partial^\alpha \varphi\} . \quad (\text{IV.75})$$

En implémentant ces variations $-\delta g_{\mu\nu}$ pour la métrique et $\delta\varphi(x)$ pour le champ scalaire – dans l'action \mathcal{S} , montrer que le tenseur impulsion-énergie satisfait à la condition

$$D_\mu T^{\mu\alpha} = (\partial^\alpha \varphi) \cdot \left\{ D_\mu (\partial^\mu \varphi) + \frac{dV}{d\varphi} \right\} . \quad (\text{IV.76})$$

On pourra retrouver la relation (IV.69) à partir de l'expression précédente (IV.76).

5) Quintessence et potentiel scalaire.

Une pure constante cosmologique présente deux problèmes. Tout d'abord, la densité d'énergie du vide ρ_Λ^0 qui lui est associée est de l'ordre de grandeur – à un facteur $\Omega_\Lambda \sim 2/3$ près – de la densité de fermeture actuelle ρ_C^0 . Ces valeurs sont sans commune mesure avec la densité d'énergie typique de Planck $\sim M_P^4$ que l'on s'attendrait à voir surgir d'une théorie unifiée des interactions fondamentales incluant la gravité. Le fait que le rapport entre la constante cosmologique observée et sa valeur théorique pressentie

$$\frac{\rho_\Lambda^0}{M_P^4} \sim \frac{4 \text{ keV cm}^{-3}}{\{1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}\}^4} \sim 10^{-123} \quad (\text{IV.77})$$

soit aussi ridiculement faible constitue le problème de la **hiérarchie** encore dénommé **fine-tuning problem**. Toute autre valeur de ρ_Λ^0 conduirait à une expansion exponentielle plus précoce ou alors plus tardive que celle que nous observons.

La seconde difficulté réside en ce qu'une constante cosmologique doit être infiniment ajustée au départ de manière à ne devenir importante que maintenant. A l'époque de Planck où la température de l'Ylem est $T_0 \sim M_{\text{P}}$, sa contribution à la densité d'énergie radiative environnante est vertigineusement faible avec

$$\frac{\rho_{\Lambda}^i}{\rho_{\text{rad}}^i} \sim \frac{\rho_{\Lambda}^0}{\rho_{\text{rad}}^0} \left\{ \frac{T_0}{M_{\text{P}}} \right\}^4 \sim 10^{-125} . \quad (\text{IV.78})$$

Toute autre valeur de départ pour ρ_{Λ}^i conduirait là encore à une évolution de l'univers radicalement différente de celle que nous connaissons. Nous sommes en présence du problème des **conditions initiales**. Dans la mesure où les relations (IV.77) et (IV.78) sont pratiquement identiques – une constante cosmologique ne varie pas – il est tentant de confondre le problème des conditions initiales avec celui de la hiérarchie et de croire – à tort – que si le premier est résolu par la quintessence alors le second s'évanouit de lui-même.

La proposition de Steinhardt.

Un champ scalaire se comporte comme un fluide dont la pression est susceptible de devenir négative si son potentiel V est dominant. Un tel champ constitue une alternative intéressante à la constante cosmologique et peut être la base d'un modèle où la quintessence évolue dynamiquement dans l'univers primordial. C'est l'idée développée par Steinhardt, Wang et Zlatev en 1998 [2] peu de temps après l'annonce des résultats des supernovae SNeIa [1].

- Un champ scalaire $Q \equiv \varphi$ * roule le long de son potentiel $V(Q)$ alors que l'univers se dilate. Nous sommes en présence d'une composante dynamique dont l'évolution est dictée par l'équation de Klein–Gordon

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} + \frac{dV}{dQ} = 0 . \quad (\text{IV.79})$$

- Le taux d'expansion de Hubble est donné par l'action combinée de la quintessence et du fond – **background** – constitué de radiation et de matière

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left\{ \{\rho_{\text{B}} = \rho_{\text{m}} + \rho_{\text{rad}}\} + \left\{ \rho_{\text{Q}} = \frac{\dot{Q}^2}{2} + V(Q) \right\} \right\} . \quad (\text{IV.80})$$

- L'évolution de Q doit tendre vers une solution de type attracteur – **tracking solution** – dont l'existence même permettrait de résoudre le problème des conditions initiales.

*Le champ scalaire Q – pour quintessence – est introduit par ces auteurs. Il se comporte exactement comme le champ φ que nous avons étudié précédemment.

Quelles que soient ces dernières en effet, Q relaxe vers cette solution-attracteur qu'elle rejoint rapidement. De plus, nous aimerions qu'une fois le champ scalaire sur les rails, le rapport pression-sur-densité

$$w_Q = \frac{P_Q}{\rho_Q} = \frac{\dot{Q}^2/2 - V(Q)}{\dot{Q}^2/2 + V(Q)} \quad (\text{IV.81})$$

soit constant et ce tant que la quintessence est sous-dominante – donc dans le régime où $\rho_Q \ll \rho_B$.

• Finalement, afin que la quintessence ne prenne le pas sur le fond que récemment et ne devienne une composante importante qu'aujourd'hui, nous devons imposer à la solution-attracteur une valeur w_Q inférieure à w_B dans la mesure où

$$\rho_Q \propto a^{-3(1+w_Q)} \quad \text{alors que} \quad \rho_B \propto a^{-3(1+w_B)} . \quad (\text{IV.82})$$

Problème n^o IV-17 – Niveau [2] : Le rapport x entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du champ Q est défini par

$$x = \frac{\dot{Q}^2/2}{V} = \frac{1+w_Q}{1-w_Q} . \quad (\text{IV.83})$$

Montrer que l'équation de Klein-Gordon se met sous la forme

$$\left| \frac{V'}{V} \right| = 3 \sqrt{\frac{\kappa}{\Omega_Q}} \sqrt{1+w_Q} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{d \ln x}{d \ln a} \right\} , \quad (\text{IV.84})$$

où $\kappa = 8\pi G/3$ et $\Omega_Q = \rho_Q/(\rho_B + \rho_Q)$. La dérivée du potentiel V par rapport à Q est notée V' et $a(t)$ désigne le facteur d'échelle spatiale de l'univers.

Conditions sur le potentiel scalaire V .

Notre scénario ne se déroule convenablement que si le champ Q devient de plus en plus important de manière à ne sortir du fond qu'aujourd'hui. La solution-attracteur – pour laquelle w_Q est une constante inférieure à w_B – est alors associée à une croissance de la contribution Ω_Q au cours du temps et la valeur absolue du rapport V'/V doit donc diminuer avec a . Deux cas se présentent suivant le signe de V' . Remarquons que le champ dévale naturellement la pente du potentiel V qui décroît sans cesse de ce fait.

• Si $V' > 0$, le champ diminue au cours de l'expansion et $dQ < 0$. Le rapport V'/V est égal à sa valeur absolue et doit également décroître pendant l'expansion en sorte que sa dérivée par rapport à Q est positive.

• Dans le cas opposé, Q augmente au cours du temps ainsi que $V'/V = -|V'/V|$. Nous aboutissons à la même conclusion que précédemment : la dérivée du rapport V'/V par rapport au champ Q

$$\frac{d}{dQ} \left\{ \frac{V'}{V} \right\} = \left\{ \frac{V'}{V} \right\}^2 \left\{ \frac{V''V}{V'^2} - 1 \right\} > 0 . \quad (\text{IV.85})$$

Une contrainte très forte sur la forme du potentiel est donc imposée par la nécessité d'une progressive domination de la quintessence sur le fond et se traduit par la condition

$$\Gamma = \frac{V''V}{V'^2} > 1 . \quad (\text{IV.86})$$

Problème n° IV-18 – Niveau [3] : Nous avons montré dans l'exercice précédent que

$$\frac{V'}{V} = -\frac{H}{2} \frac{\dot{Q}}{\rho_Q} \{6 + \dot{x}\} , \quad (\text{IV.87})$$

où $\dot{x} = d \ln x / d \ln a$. Nous définissons de même $\ddot{x} = d^2 \ln x / d \ln a^2$. Calculer la dérivée temporelle de l'expression (IV.87) et établir que

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 + \frac{(w_B - w_Q)}{2(1 + w_Q)} - \frac{(1 + w_B - 2w_Q)}{2(1 + w_Q)} \left\{ \frac{\dot{x}}{6 + \dot{x}} \right\} \\ &\quad - \frac{2}{1 + w_Q} \left\{ \frac{\ddot{x}}{(6 + \dot{x})^2} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{IV.88})$$

Dans l'équation d'Einstein donnant \ddot{a}/a , la densité de quintessence ρ_Q sera supposée négligeable par rapport à celle du fond ρ_B . Cette approximation est tout à fait justifiée le long de la solution-attracteur lorsqu'elle est sous-dominante – donc jusqu'à aujourd'hui dans le scénario développé par Steinhardt, Wang et Zlatev.

Le long de la solution attracteur où w_Q – et donc la fraction x – sont constants, l'expression (IV.88) se simplifie en

$$w_Q = \frac{w_B - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)} . \quad (\text{IV.89})$$

Nous connaissons désormais la relation que doivent entretenir w_Q et w_B avec Γ et donc avec la forme du potentiel scalaire V .

Problème n° IV-19 – Niveau [1] : Considérons le potentiel polynômial $V \propto Q^\alpha$.
Montrer que

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{\alpha} , \quad (\text{IV.90})$$

et que seules les valeurs **négatives** de α conviennent. Montrer que $V \propto \exp\{M/Q\}$ conduit également à un scénario acceptable de quintessence.

Remarquons que si $\Gamma = 1$, nous sommes en présence d'un fluide se comportant exactement comme le fond et apparaissant aujourd'hui comme une composante de matière.

Problème n° IV-20 – Niveau [1] : Montrer en particulier que le potentiel exponentiel

$$V(Q) = C^{\text{te}} \exp\{-\beta Q\} \quad (\text{IV.91})$$

est une illustration de ce cas. Supposons de plus que l'univers soit plat et dominé par la matière en sorte que $\{\rho_{\text{tot}} = \{\rho_{\text{B}} = \rho_{\text{m}}\} + \rho_Q\} \propto a^{-3}$ où $a(t)$ est le facteur d'échelle de l'univers. En imposant que la pression P_Q du champ scalaire est nulle, montrer que

$$\frac{1}{2} \dot{Q}^2 = V(Q) = \frac{\rho_Q}{2} , \quad (\text{IV.92})$$

et établir la relation

$$\frac{dQ}{da} = \left\{ \frac{3\Omega_Q}{8\pi G} \right\}^{1/2} \frac{1}{a} . \quad (\text{IV.93})$$

En déduire que le paramètre β intervenant dans l'argument de l'exponentielle est donné par

$$\beta = \sqrt{\frac{24\pi G}{\Omega_Q}} . \quad (\text{IV.94})$$

Evolution temporelle du champ Q et de son énergie ρ_Q .

En prenant la forme particulière $V(Q) \propto Q^{-6}$, Steinhardt, Wang et Zlatev [2] ont étudié numériquement le comportement du champ Q qu'ils placent au repos sur la pente du potentiel V . Si la valeur initiale de Q est faible, l'évolution du champ suit les quatre étapes de **l'overshooting** :

1 – Le champ est placée très haut sur le potentiel. Bien qu'immobile au départ, il glisse de plus en plus vite vers les Q positifs et après un très bref laps de temps – qu'il est

difficile de reproduire sur l'ordinateur tant cette phase est courte – le champ dévale la pente. Son énergie cinétique domine largement le potentiel en sorte que w_Q tends très rapidement vers 1.

2 – Après cette période brutale de démarrage, le champ continue de glisser le long du potentiel. Cette phase de **kination** est caractérisée par une équation d'état $w_Q = 1$ et une décroissance importante de l'énergie de quintessence puisque $\rho_Q \propto a^{-6}$. Le champ dépasse la valeur qu'il devrait avoir s'il suivait tranquillement la solution-attracteur et la densité ρ_Q devient bien inférieure à ce qu'elle devrait être en ce cas. Peu à peu, le champ freine sous l'effet de la force de friction – voir relation (IV.59) – et l'équation d'état w_Q passe de +1 à -1.

3 – Le champ s'est stabilisé et sa densité d'énergie est constante avec $w_Q = -1$. Le potentiel est cette fois dominant et la quintessence se comporte alors comme une véritable constante cosmologique. La densité d'énergie du fond ρ_B diminue.

4 – Le champ Q est alors rejoint par la solution-attracteur qui croît lentement mais sûrement. Cette fois Q est immobile et n'a aucun mal à accrocher la solution-attracteur vers laquelle il relaxe et qu'il se met à suivre jusqu'à présent.

Si la valeur initiale de Q est élevée, le champ démarre sur une pente si douce qu'il ne bouge pratiquement pas – le coefficient de frottement $3H$ est alors très élevé. **L'undershooting** débute directement par l'étape **3** précédente et l'évolution ultérieure de Q est la même.

Nous constatons donc que le problème des conditions initiales est résolu par l'existence d'un champ scalaire – jusqu'à un certain point toutefois. Avec le potentiel choisi, la densité initiale de quintessence ne peut en effet excéder celle du plasma environnant sous peine d'obtenir un overshooting si fort que le champ dépasse de très loin la valeur actuelle associée à la solution-attracteur. En ce cas, sa contribution à la densité d'énergie de l'univers est infinitésimale et il faudra attendre encore longtemps pour que la solution-attracteur finisse par l'accrocher. Dans le cas de l'undershooting – et essentiellement pour les mêmes raisons – la valeur initiale de la densité ρ_Q ne peut être inférieure à la valeur observée aujourd'hui ρ_Λ^0 .

Remarquons finalement que le problème de fine-tuning n'est pas du tout réglé. Lorsque le champ Q émerge du fond, sa valeur est de l'ordre de la masse de Planck et il n'est pas du tout évident que $V(Q \sim M_P)$ soit de l'ordre de grandeur de ρ_Λ^0 .

Stabilité de la solution-attracteur.

Nous avons établi précédemment l'équation maîtresse (IV.88) à partir de laquelle nous pouvons maintenant étudier l'évolution d'une petite perturbation $w_Q = w_0 + \delta$ autour de

la solution-attracteur pour laquelle d'une part $w_Q = w_0$ et d'autre part les dérivées \dot{x} et \ddot{x} sont nulles. La solution-attracteur n'est stable que si δ a tendance à décroître dans le temps et donc si toute petite perturbation s'évanouit.

Problème n^o IV-21 – Niveau [3] : Montrer tout d'abord que la perturbation δ est associée à

$$\dot{x} = \frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{2}{1 - w_0^2} \frac{d\delta}{d \ln a} . \quad (\text{IV.95})$$

Linéariser ensuite l'équation maîtresse (IV.88) au premier ordre en δ et ses dérivées

$$\ddot{\delta} + \frac{3}{2} \{(1 + w_B) - 2w_0\} \dot{\delta} + \frac{9}{2} \{(1 + w_B)(1 - w_0)\} \delta = 0 , \quad (\text{IV.96})$$

où le point dénote la dérivée par rapport à $\ln a$. Nous cherchons une solution de la forme $\delta \propto a^s$ où l'exposant s satisfait une équation polynômiale du second degré. Montrer que $s = s' \pm is''$ où

$$s' = -\frac{3}{4} \{(1 + w_B) - 2w_0\} , \quad (\text{IV.97})$$

alors que

$$s'' = \frac{3}{4} \{8(1 + w_B)(1 - w_0) - (1 + w_B - 2w_0)^2\}^{1/2} . \quad (\text{IV.98})$$

En déduire que la solution-attracteur n'est stable que si

$$w_0 \leq \frac{1}{2} (1 + w_B) , \quad (\text{IV.99})$$

et que cette inégalité est bien vérifiée si $w_0 \leq w_B$.

6) Etude de la solution invariante d'échelle.

Master de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Énoncé de l'examen du jeudi 25 mars 2004

Une partie substantielle de l'univers semble être constituée d'un fluide dénommé – faute de mieux et avec humour – quintessence dont la pression est négative. Il pourrait s'agir simplement d'une constante cosmologique. En ce cas, il faudrait expliquer d'une part sa valeur extrêmement faible par rapport à la masse de Planck M_{P} – l'échelle naturelle de toute théorie subnucléaire incorporant la gravitation – et d'autre part la raison pour laquelle les conditions initiales sont ajustées de manière aussi fine. Une alternative étudiée en cours consiste à admettre l'existence d'un champ scalaire neutre φ homogène glissant le long du potentiel $V(\varphi)$ et obéissant à l'équation dynamique de Klein–Gordon

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 . \quad (\text{IV.100})$$

Le but de ce problème est l'étude de la solution invariante d'échelle [†] de l'équation précédente. Nous allons supposer que le champ scalaire est sous-dominant par rapport au fond mais que sa contribution à la densité de l'univers – pour la solution invariante d'échelle du moins – ne cesse de croître jusqu'à présent. Nous sommes donc en présence de deux fluides : d'une part le fond de densité ρ_{B} et d'équation d'état w_{B} et d'autre part la quintessence de densité ρ_{φ} et d'équation d'état w_{φ} . Les paramètres w_{B} et w_{φ} sont tous deux compris entre -1 et $+1$ et représentent chacun le rapport entre la pression et la densité d'énergie du fluide correspondant

$$-1 \leq \left\{ w = \frac{P}{\rho} \right\} \leq 1 . \quad (\text{IV.101})$$

1) Considérons un fluide d'équation d'état w constante. Il suit l'expansion de l'univers en se dilatant de manière adiabatique. Montrer que

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} , \quad (\text{IV.102})$$

où a désigne le facteur d'échelle.

[†]En cours, cette solution invariante d'échelle a été appelée **solution attracteur**.

2) Nous supposons que l'univers est plat. Son taux d'expansion H est alors donné par

$$\left\{ H = \frac{d \ln a}{dt} \right\}^2 \equiv \frac{8 \pi G}{3} \rho , \quad (\text{IV.103})$$

où ρ désigne la densité d'énergie du fluide précédent. Montrer alors que l'âge t de l'univers est relié au taux d'expansion H par

$$H = \frac{2}{3(1+w)t} . \quad (\text{IV.104})$$

3) Le champ scalaire φ est soumis au potentiel

$$V(\varphi) = \mu^4 \left\{ \frac{M_{\text{P}}}{\varphi} \right\}^\alpha = \frac{C}{\varphi^\alpha} , \quad (\text{IV.105})$$

où la puissance $\alpha > 0$. Nous cherchons la solution invariante d'échelle $\varphi_0(t)$ de l'équation de Klein–Gordon (IV.100) associée à l'équation d'état $w_\varphi = w_0$ constante. Montrer que cette solution se met sous la forme

$$\varphi_0(t) = \mathcal{A} t^\beta , \quad (\text{IV.106})$$

où la constante \mathcal{A} vaut

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\frac{\alpha + 2}{2} \right) \sqrt{2C x_0} \right\}^\beta , \quad (\text{IV.107})$$

et où l'exposant $\beta = 2/(\alpha + 2)$. Le paramètre x_0 désigne le rapport entre énergie cinétique et énergie potentielle en sorte que

$$x_0 = \frac{\dot{\varphi}_0^2/2}{V} . \quad (\text{IV.108})$$

4) Nous aimerions établir maintenant la relation que w_0 et w_{B} entretiennent. Le fond contrôle l'expansion de l'univers et donc le taux H qui lui est associé. En imposant que la solution invariante d'échelle (IV.106) obéisse à l'équation de Klein–Gordon (IV.100), exprimer w_0 en fonction de w_{B} et de α ‡.

5) Nous avons montré en cours que w_0 et w_{B} étaient reliés par

$$w_0 = \frac{w_{\text{B}} - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)} , \quad (\text{IV.109})$$

où le paramètre Γ est défini par

$$\Gamma = \frac{V''V}{V'^2} . \quad (\text{IV.110})$$

‡ **Astuce** : on pourra exprimer chacun des termes intervenant dans l'équation de Klein–Gordon en fonction de α , C et φ_0 et également – le cas échéant – de x_0 et w_{B} .

Calculer Γ en fonction de α et retrouver le résultat de la question précédente. Montrer ensuite que $w_0 \leq w_B$ lorsque $\alpha > -2$. Cette dernière condition est toujours satisfaite puisque α est positif. Décrire finalement l'évolution de la quintessence par rapport au fond.

6) Nous aimerions analyser la stabilité de la solution attracteur φ_0 . Considérons donc la perturbation

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) \{1 + \epsilon(t)\} , \quad (\text{IV.111})$$

où ϵ désigne l'écart relatif à la solution attracteur

$$\epsilon = \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} . \quad (\text{IV.112})$$

La fonction $\varphi(t)$ suit également l'équation de Klein–Gordon (IV.100) qu'il conviendra de linéariser afin de montrer que la perturbation infinitésimale ϵ satisfait à la relation

$$\ddot{\epsilon} + 2\mathcal{B} \frac{\dot{\epsilon}}{t} + 2\mathcal{D} \frac{\epsilon}{t^2} = 0 . \quad (\text{IV.113})$$

On exprimera les coefficients \mathcal{B} et \mathcal{D} en fonction de w_0 et w_B .

7) On cherche une solution de la forme $\epsilon \propto t^s$. Montrer que la relation (IV.113) se traduit par l'équation du second degré

$$s^2 + \left\{1 - \frac{2w_0}{1+w_B}\right\} s + 2 \left\{\frac{1-w_0}{1+w_B}\right\} = 0 . \quad (\text{IV.114})$$

8) Nous ne connaissons pas encore le signe du discriminant de l'équation (IV.114). Il conviendra donc de discuter les deux cas possibles et de montrer que la perturbation ϵ décroît au cours du temps – et donc que la solution attracteur φ_0 est stable – si la condition

$$w_0 \leq \frac{1+w_B}{2} \quad (\text{IV.115})$$

est remplie. Est-ce bien le cas ?

9) Afin de déterminer le signe du discriminant de l'équation (IV.114), il est utile d'étudier la fonction

$$f(x, y) = 8(1+x)(1-y) - (1+x-2y)^2 , \quad (\text{IV.116})$$

sur le domaine défini par $0 \leq x \leq +1$ et $-1 \leq y \leq y_{\max}$ où

$$y_{\max}(x) = \frac{x+1}{2} . \quad (\text{IV.117})$$

En évaluant par exemple $f(x, y_{\max})$, $f(x, -1)$ ainsi que la dérivée partielle f'_y , déterminer le signe de la fonction f sur le domaine considéré.

10) A partir de maintenant, l'équation d'état du fond w_B est comprise entre 0 et 1. C'est bien le cas pour la matière ou la radiation. En déduire que la solution de l'équation (IV.114) est

$$s = s' \pm i s'' , \quad (\text{IV.118})$$

où la partie réelle s' est donnée par

$$s' = - \frac{\{(1 + w_B) - 2w_0\}}{2(1 + w_B)} , \quad (\text{IV.119})$$

alors que la partie imaginaire s'' s'exprime comme

$$s'' = \frac{\{8(1 + w_B)(1 - w_0) - (1 + w_B - 2w_0)^2\}^{1/2}}{2(1 + w_B)} . \quad (\text{IV.120})$$

Décrire le comportement de la perturbation ϵ au cours du temps.

11) Exprimer la solution perturbative de la question **7)** en fonction du facteur d'échelle et montrer alors que

$$\epsilon \propto a^\gamma , \quad (\text{IV.121})$$

où γ est un nombre complexe que l'on exprimera en fonction de w_0 et de w_B . Commentaires ?

12) Lorsque la solution attracteur émerge du fond – plus précisément lorsque les densités d'énergie du fond et de la quintessence sont égales – le champ scalaire a une valeur particulière que l'on exprimera en fonction de α , de w_0 et de la masse de Planck M_P .

References

- [1] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [2] P. J. Steinhardt, L. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999).